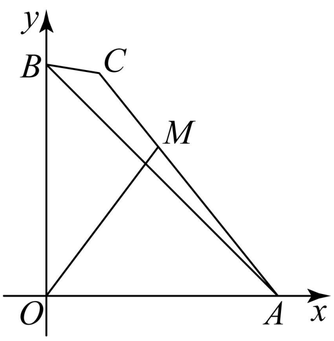
昆山提招数学模拟卷（五）------- 图形的相似

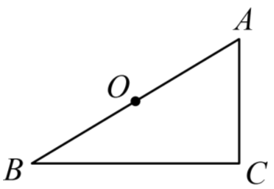
一、单选题

1．如图，在平面直角坐标系中，O为原点，$OA=OB=3\sqrt{5}$，点C为平面内一动点，$BC=\frac{3}{2}$，连接AC，点M是线段AC上的一点，且满足$CM:MA=1:2$．当线段OM取最大值时，点M的坐标是（　　）



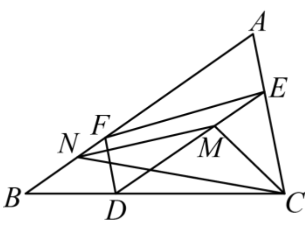
A．$\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{3}{5}\sqrt{5},\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$　　C．$\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{6}{5}\sqrt{5},\frac{12}{5}\sqrt{5}\right)$

2．如图$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°, AB=4, AC=x, \angle BAC=\alpha$，$O$为$AB$中点，若点$D$为直线$BC$下方一点，且$\triangle BCD$与$\triangle ABC$相似，则下列结论：①若$\alpha=45°$，$BC$与$OD$相交于$E$，则点$E$不一定是$\triangle ABD$的重心；②若$\alpha=60°$，则$AD$的最大值为$2\sqrt{7}$；③若$\alpha=60°, \triangle ABC\backsim\triangle CBD$，则$OD$的长为$2\sqrt{3}$；④若$\triangle ABC\backsim\triangle BCD$，则当$x=2$时，$AC+CD$取得最大值．其中正确的为（　）



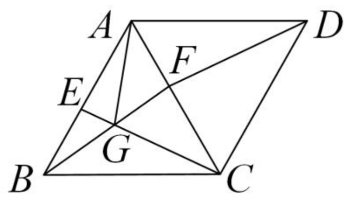
A．①④　　B．②③　　C．①②④　　D．①③④

3．如图，在$\triangle ABC$中，D是边BC上的点（不与点B，C重合）．过点D作$DE\parallel AB$交AC于点E；过点D作$DF\parallel AC$交AB于点F．N是线段BF上的点，$BN=2NF$；M是线段DE上的点，$DM=2ME$．若已知$\triangle CMN$的面积，则一定能求出（　）



A．$\triangle AFE$的面积　B．△BDF 的面积　C．$\triangle BCN$的面积　D．$\triangle DCE$的面积

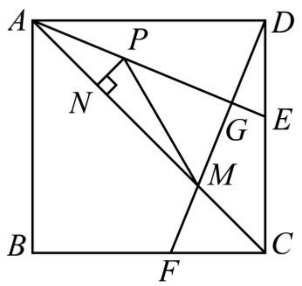
4．如图，在边长为1的菱形$ABCD$中，$\angle ABC=60°$，动点E在AB边上（与点A、B均不重合），点F在对角线AC上，CE与BF相交于点G，连接AG,DF，若$AF=BE$，则下列结论错误的是（　）



A．$DF=CE$　　B．$\angle BGC=120°$

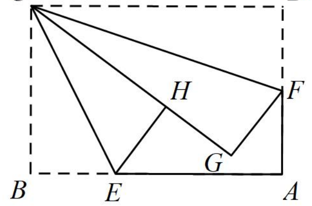
C．$AF^2=EG\cdot EC$　　D．AG的最小值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5．如图，正方形$ABCD$的边长为4，点E，F分别在边DC，BC上，且$BF=CE$，AE平分$\angle CAD$，连接DF，分别交AE，AC于点G，M，P是线段AG上的一个动点，过点P作$PN\perp AC$垂足为N，连接PM，有下列四个结论：①AE垂直平分DM；②$PM+PN$的最小值为$3\sqrt{2}$；③$CF^2=GE\cdot AE$；④$S_{\Delta ADM}=6\sqrt{2}$．其中正确的是（　　）



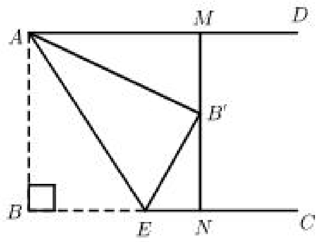
A．①②　　B．②③④　　C．①③④　　D．①③

6．如图，在矩形纸片$ABCD$中，点E、F分别在矩形的边AB、AD上，将矩形纸片沿CE、CF折叠，点B落在H处，点D落在G处，点C、H、G恰好在同一直线上，若AB＝6，AD＝4，BE＝2，则DF的长是（　）



A．2　　B．$\frac{7}{4}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．3

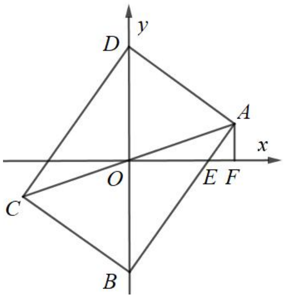
7．如图，已知 $AD//BC$，$AB\perp BC$，$AB=3$，点 E 为射线 BC 上一个动点，连接 AE，将△ABE 沿 AE 折叠，点 B 落在点 B' 处，过点 B' 作 AD 的垂线，分别交 AD，BC 于 M，N 两点，当 B' 为线段 MN 的三等分点时，BE 的长为（　）



A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　C．$\frac{3}{2}$或$\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　D．$\frac{3}{2}\sqrt{2}$或$\frac{3}{5}\sqrt{5}$

8．如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 在第一象限，B，D 分别在 y 轴上，AB 交 x 轴于点 E，$AF\perp x$ 轴，垂足为 F．若 $OE=3$，$EF=1$．以下结论正确的个数是（　）

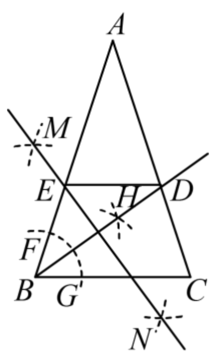
①$OA=3AF$；②AE 平分 $\angle OAF$；③点 C 的坐标为$\left(-4,-\sqrt{2}\right)$；④$BD=6\sqrt{3}$；⑤矩形 $ABCD$ 的面积为 $24\sqrt{2}$．



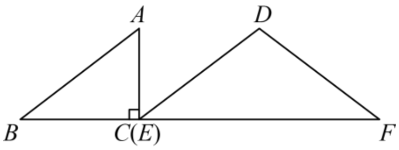
A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

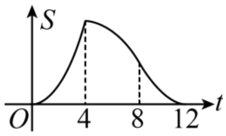
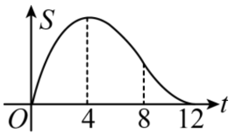
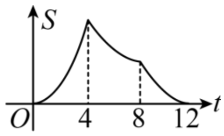
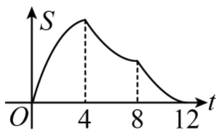
9．如图，△ABC 是等腰三角形，$AB=AC$，$\angle A=36°$．以点 B 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 F，交 BC 于点 G，分别以点 F 和点 G 为圆心，大于$\frac{1}{2}FG$的长为半径作弧，两弧相交于点 H，作射线 BH 交 AC 于点 D；分别以点 B 和点 D 为圆心，大于$\frac{1}{2}BD$的长为半径作弧，两孤相交于 M、N 两点，作直线 MN 交 AB 于点 E，连接 DE．下列四个结论：①$\angle AED=\angle ABC$；②$BC=AE$；③$ED=\frac{1}{2}BC$；④当 $AC=2$ 时，$AD=\sqrt{5}-1$．其中正确结论的个数是（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4



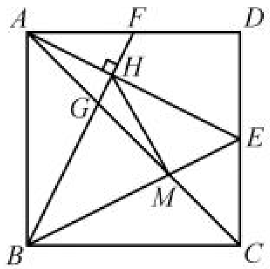
10．如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$，$BC=4$，在$\triangle DEF$中，$DE=DF=5$，$EF=8$，BC与EF在同一条直线上，点C与点E重合．$\triangle ABC$以每秒1个单位长度的速度沿线段EF所在直线向右匀速运动，当点B运动到点F时，$\triangle ABC$停止运动．设运动时间为t秒，$\triangle ABC$与$\triangle DEF$重叠部分的面积为S，则下列图象能大致反映S与t之间函数关系的是（　　）



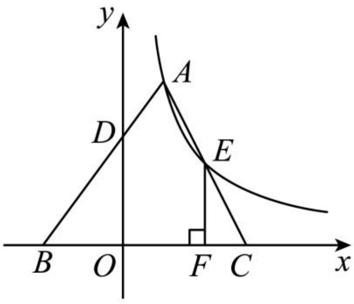
A. 
B. 
C. 
D. 

二、填空题

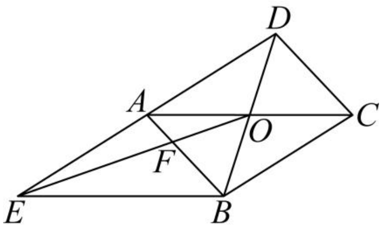
11．如图，正方形$ABCD$的边长为$2\sqrt{5}$，点E是CD的中点，BE与AC交于点M，F是AD上一点，连接BF分别交AC，AE于点G，H，且$BF\perp AE$，连接MH，则$AH=$________，$MH=$________.



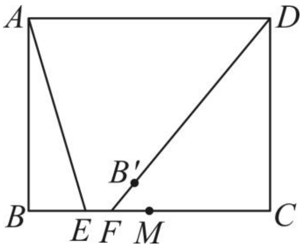
12．如图，在$\triangle ABC$中，$BA=BC$，顶点C，B分别在x轴的正、负半轴上，点A在第一象限，经过点A的反比例函数$y=\frac{k}{x}(x>0)$的图象交AC于点E，过点E作$EF\perp x$轴，垂足为点F．若点E为AC的中点，$BD=2AD$，$BF-CF=3$，则k的值为________.



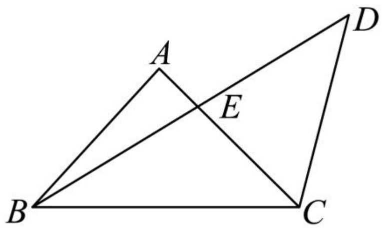
13．如图，平行四边形$ABCD$的对角线AC，BD相交于点O，过点B作$BE\parallel AC$，交DA的延长线于点B，连接OE，交AB于点F，则四边形$BCOF$的面积与$\triangle AEF$的面积的比值为________.



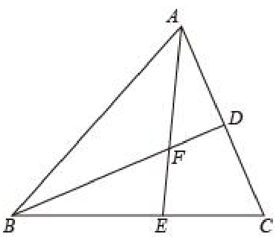
14．如图，在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$AD=10$，点M为BC的中点，E是BM上的一点，连接AE，作点B关于直线AE的对称点B'，连接DB'并延长交BC于点F．当BF最大时，点B'到BC的距离是________.



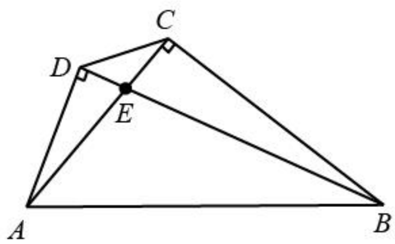
15．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，将AC绕着点C按顺时针旋转$60°$得到CD，连接BD交AC于在E，则$\dfrac{AE}{ED}=$______.



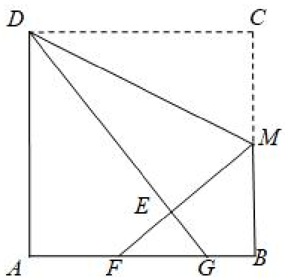
16．如图，在△ABC中，D是AC的中点，△ABC的角平分线AE交BD于点F，若BF：FD＝3：1，$AB+BE$＝$3\sqrt{3}$，则△ABC的周长为_____.



17．如图，在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点E，$AC=BC=6\text{cm}$，$\angle ACB=\angle ADB=90°$．若$BE=2AD$，则$\triangle ABE$的面积是_______$\text{cm}^2$，$\angle AEB=$_______度.



18．如图，折叠边长为4cm的正方形纸片$ABCD$，折痕是DM，点C落在点E处，分别延长ME、DE交AB于点F、G，若点M是BC边的中点，则$FG=$______cm．



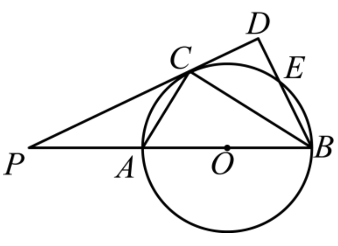
三、解答题

19．已知抛物线$y=-x^2+2x+8$与x轴交于点A、B（其中A在点B的左侧），与y轴交于点C.

（1）求点B、C的坐标；

（2）设点C'与点C关于该抛物线的对称轴对称在y轴上是否存在点P，使$\triangle PCC'$与$\triangle POB$相似且PC与PO是对应边？若存在，求点P的坐标；若不存在，请说明理由．

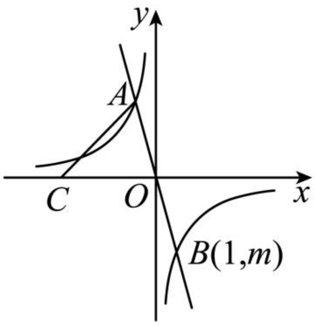
20．如图，AB是$\odot O$的直径，E为$\odot O$上的一点，点C是$\overset{\frown}{AE}$的中点，连接BC，过点C的直线垂直于BE的延长线于点D，交BA的延长线于点P．



（1）求证：PC为$\odot O$的切线；

（2）若$PC=2\sqrt{2}BO$，$PB=10$，求BE的长．

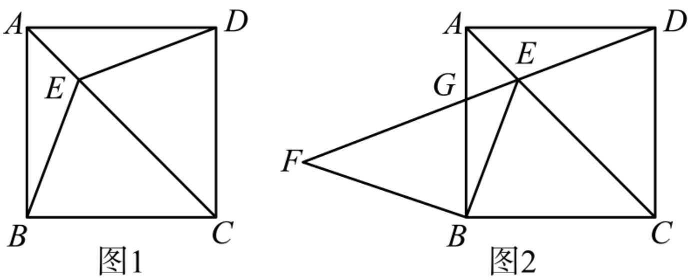
21．如图，正比例函数 $y=-3x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的图象交于 A，$B\left(1,m\right)$ 两点，点 C 在 x 轴负半轴上，$\angle ACO=45^{\circ}$．



（1）$m=$______，$k=$______，点 C 的坐标为______．

（2）点 P 在 x 轴上，若以 B，O，P 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似，求点 P 的坐标．

22．已知正方形 $ABCD$，E 是对角线 AC 上一点．

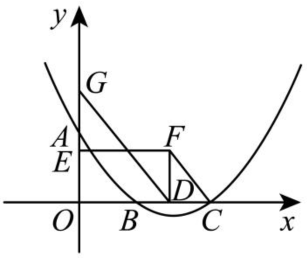


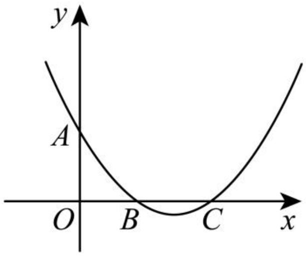
（1）如图 1，连接 BE，DE．求证：$\triangle ABE\cong\triangle ADE$；

（2）如图 2，F 是 DE 延长线上一点，DF 交 AB 于点 G，$BF\perp BE$．判断 $\triangle FBG$ 的形状并说明理由；

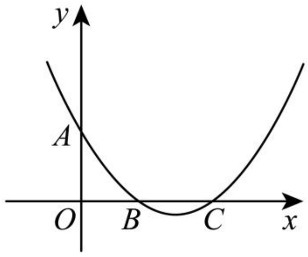
（3）在第（2）题的条件下，$BE=BF=2$．求 $\frac{AE}{AB}$ 的值．

23．如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A\left(0,2\right)$，与 x 轴的交点为点 $B\left(\sqrt{3},0\right)$ 和点 C.





备用图



备用图

（1）求这个二次函数的表达式；

（2）点 E，G 在 y 轴正半轴上，$OG=2OE$，点 D 在线段 OC 上，$OD=\sqrt{3}OE$. 以线段 OD，OE 为邻边作矩形 $ODFE$，连接 GD，设 $OE=a$.

① 连接 FC，当 $\triangle GOD$ 与 $\triangle FDC$ 相似时，求 a 的值；

② 当点 D 与点 C 重合时，将线段 GD 绕点 G 按逆时针方向旋转 $60°$ 后得到线段 GH，连接 FH，FG，将 $\triangle GFH$ 绕点 F 按顺时针方向旋转 $\alpha(0°<\alpha\le 180°)$ 后得到 $\triangle G'FH'$，点 G，H 的对应点分别为 G'、H'，连接 DE. 当 $\triangle G'FH'$ 的边与线段 DE 垂直时，请直接写出点 H' 的横坐标.

24．综合与实践

【思考尝试】

（1）数学活动课上，老师出示了一个问题：如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上一点，$DF\perp CE$ 于点 F，$GD\perp DF$，$AG\perp DG$，$AG=CF$．试猜想四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由；

【实践探究】

（2）小睿受此问题启发，逆向思考并提出新的问题：如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上一点，$DF\perp CE$ 于点 F，$AH\perp CE$ 于点 H，$GD\perp DF$ 交 AH 于点 G，可以用等式表示线段 FH，AH，CF 的数量关系，请你思考并解答这个问题；

【拓展迁移】

（3）小博深入研究小睿提出的这个问题，发现并提出新的探究点：如图 3，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AB 上一点，$AH\perp CE$ 于点 H，点 M 在 CH 上，且 $AH=HM$，连接 AM，BH，可以用等式表示线段 CM，BH 的数量关系，请你思考并解答这个问题．

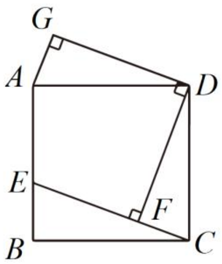


图1

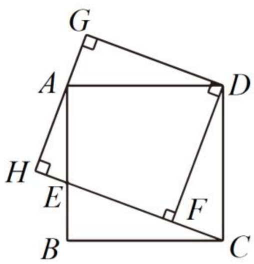


图2

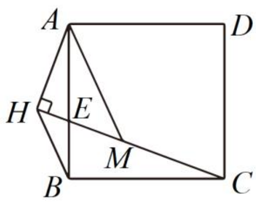


图3

答案与解析

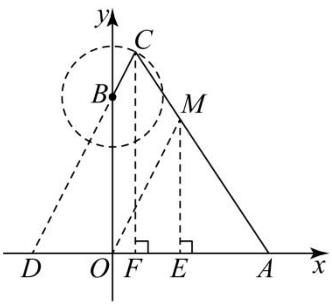
1．D

【分析】由题意可得点C在以点B为圆心，$\frac{3}{2}$为半径的OB上，在x轴的负半轴上取点$D\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},0\right)$，连接$BD$，分别过$C$、$M$作$CF\perp OA$，$ME\perp OA$，垂足为$F$、$E$，先证$\triangle OAM\backsim\triangle DAC$，得$\frac{OM}{CD}=\frac{OA}{AD}=\frac{2}{3}$，从而当$CD$取得最大值时，$OM$取得最大值，结合图形可知当$D$，$B$，$C$三点共线，且点$B$在线段$DC$上时，$CD$取得最大值，然后分别证$\triangle BDO\backsim\triangle CDF$，$\triangle AEM\backsim\triangle AFC$，利用相似三角形的性质即可求解．

解：$\because$点C为平面内一动点，$BC=\frac{3}{2}$，

$\therefore$点C在以点B为圆心，$\frac{3}{2}$为半径的OB上，

在x轴的负半轴上取点$D\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},0\right)$，连接$BD$，分别过$C$、$M$作$CF\perp OA$，$ME\perp OA$，垂足为$F$、$E$，



$\because OA=OB=3\sqrt{5}$，

$\therefore AD=OD+OA=\frac{9\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore \frac{OA}{AD}=\frac{2}{3}$，

$\because CM:MA=1:2$，

$\therefore \frac{OA}{AD}=\frac{2}{3}=\frac{CM}{AC}$，

$\because \angle OAM=\angle DAC$，

$\therefore \triangle OAM\backsim\triangle DAC$，

$\therefore \frac{OM}{CD}=\frac{OA}{AD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$当CD取得最大值时，OM取得最大值，结合图形可知当D，B，C三点共线，且点B在线段DC上时，CD取得最大值，

$\because OA=OB=3\sqrt{5}$，$OD=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\dfrac{15}{2}$，

$\therefore CD=BC+BD=9$，

$\because \dfrac{OM}{CD}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore OM=6$，

$\because y$轴$\perp x$轴，$CF\perp OA$，

$\therefore \angle DOB=\angle DFC=90^\circ$，

$\because \angle BDO=\angle CDF$，

$\therefore \triangle BDO\backsim\triangle CDF$，

$\therefore \dfrac{OB}{CF}=\dfrac{BD}{CD}$即$\dfrac{3\sqrt{5}}{CF}=\dfrac{\frac{15}{2}}{9}$，

解得$CF=\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$，

同理可得，$\triangle AEM\backsim\triangle AFC$，

$\therefore \dfrac{ME}{CF}=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{2}{3}$即$\dfrac{ME}{\frac{18\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{2}{3}$，

解得$ME=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore OE=\sqrt{OM^2-ME^2}=\sqrt{6^2-\left(\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$当线段OM取最大值时，点M的坐标是$\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5},\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\right)$，

故选 D.

【点拨】本题主要考查了勾股定理、相似三角形的判定及性质、圆的一般概念以及坐标与图形，熟练掌握

相似三角形的判定及性质是解题的关键.

2．A

【分析】①有 3 种情况，分别画出图形，得出$\triangle ABD$的重心，即可求解；当$\alpha=60^\circ$，$BD\perp BC$时，AD取得最大值，进而根据已知数据，结合勾股定理，求得AD的长，即可求解；③如图 5，若$\alpha=60^\circ$，$\triangle ABC\backsim\triangle CBD$，根据相似三角形的性质求得$CD=\sqrt{3}$，$GE=DF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$CF=\dfrac{3}{2}$，进而求得$OD$，即可求解；④如图 6，根据相似三角形的性质得出$CD=\dfrac{1}{4}BC^2$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$BC^2=16-x^2$，根据二次函数的性质，即可求$AC+CD$取得最大值时，$x=2$.

解：①有 3 种情况，如图1，BC和OD都是中线，点E是重心；

如图2，四边形$ABDC$是平行四边形，F是AD中点，点E是重心；

如图3，点F不是AD中点，所以点E不是重心；

①正确

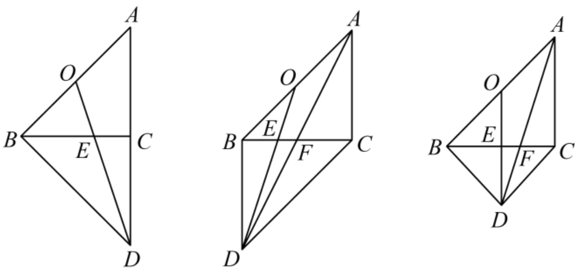


图1 图2 图3

②当$\alpha=60^\circ$，如图4时AD最大，$AB=4$，

$\therefore AC=BE=2$，$BC=AE=2\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{3}BC=6$，

$\therefore DE=8$，

$\therefore AD=2\sqrt{19}\neq 2\sqrt{7}$，

$\therefore$②错误；

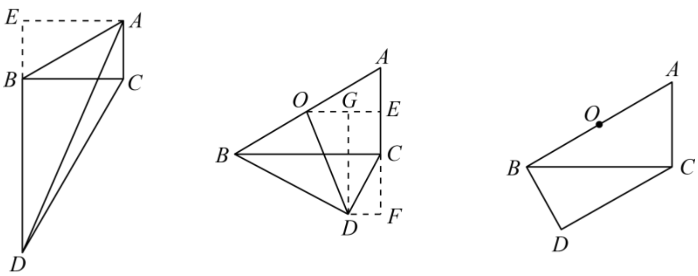


图4 图5 图6

③如图 5，若$\alpha=60^\circ$，$\triangle ABC\backsim\triangle CBD$，

$\therefore\angle BCD=60^\circ$， $\angle CDB=90^\circ$， $AB=4$， $AC=2$， $BC=2\sqrt{3}$， $OE=\sqrt{3}$， $CE=1$，

$\therefore CD=\sqrt{3}$， $GE=DF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $CF=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore EF=DG=\dfrac{5}{2}$， $OG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OD=\sqrt{7}\neq 2\sqrt{3}$，

∴③错误；

④如图 6， $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$，

$\therefore\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{BC}{AB}$，

即 $CD=\dfrac{1}{4}BC^2$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中， $BC^2=16-x^2$，

$\therefore CD=\dfrac{1}{4}\left(16-x^2\right)=-\dfrac{1}{4}x^2+4$，

$\therefore AC+CD=x-\dfrac{1}{4}x^2+4=-\dfrac{1}{4}(x-2)^2+5$，

当 $x=2$ 时， $AC+CD$ 最大为 5，

∴④正确.

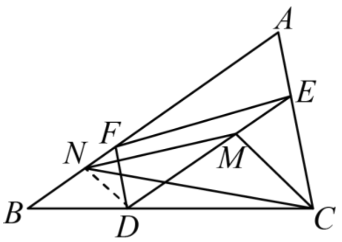
故选：A.

【点拨】本题考查了三角形重心的定义，勾股定理，相似三角形的性质，二次函数的性质，分类讨论，画出图形是解题的关键.

3．D

【分析】如图所示，连接 ND，证明 $\triangle FBD\backsim\triangle EDC$，得出 $\dfrac{FB}{ED}=\dfrac{FD}{EC}$，由已知得出 $\dfrac{NF}{ME}=\dfrac{BF}{DE}$，则 $\dfrac{FD}{EC}=\dfrac{NF}{ME}$，又 $\angle NFD=\angle MEC$，则 $\triangle NFD\sim\triangle MEC$，进而得出 $\angle MCD=\angle NDB$，可得 $MC\parallel ND$，结合题意得出 $S_{\triangle EMC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle DMC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle MNC}$，即可求解.

解：如图所示，连接 ND，



$\because DE \parallel AB$， $DF \parallel AC$，

$\therefore \angle ECD=\angle FDB$， $\angle FBD=\angle EDC$， $\angle BFD=\angle A$， $\angle A=DEC$．

$\therefore \triangle FBD\sim\triangle EDC$， $\angle NFD=\angle MEC$．

$\therefore \dfrac{FB}{ED}=\dfrac{FD}{EC}$．

$\because DM=2ME$， $BN=2NF$，

$\therefore NF=\dfrac{1}{3}BF$， $ME=\dfrac{1}{3}DE$

$\therefore \dfrac{NF}{ME}=\dfrac{BF}{DE}$．

$\therefore \dfrac{FD}{EC}=\dfrac{NF}{ME}$．

又$\because \angle NFD=\angle MEC$，

$\therefore \triangle NFD\sim\triangle MEC$．

$\therefore \angle ECM=\angle FDN$．

$\because \angle FDB=\angle ECD$

$\therefore \angle MCD=\angle NDB$．

$\therefore MC\parallel ND$．

$\therefore S_{\triangle MNC}=S_{\triangle MDC}$．

$\because DM=2ME$，

$\therefore S_{\triangle EMC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle DMC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle MNC}$．

$\because S_{\triangle DCE}=S_{\triangle EMC}+S_{\triangle DMC}$，

$\therefore S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle MNC}+S_{\triangle MNC}=\dfrac{3}{2}S_{\triangle MNC}$．

故选：D．

【点拨】本题考查了相似三角形的知识，解题的关键是掌握相似三角形的性质与判定，平行线的判定和性质，等面积转换．

4．D

【分析】先证明△BAF≌△DAF≌CBE，△ABC是等边三角形，得$DF=CE$，判断A项答案正确，由∠GCB+∠GBC=60°，得∠BGC=120°，判断B项答案正确，证△BEG∽△CEB得$\frac{BE}{GE}=\frac{CE}{BE}$，即可判断$C$项答案正确，由$\angle BGC=120°$，$BC$=1，得点$G$在以线段$BC$为弦的弧$BC$上，易得当点$G$在等边△$ABC$的内心处时，$AG$取最小值，由勾股定理求得$AG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即可判断$D$项错误.

解：∵四边形$ABCD$是菱形，$\angle ABC=60°$，

∴$AB=AD=BC=CD$，∠BAC=∠DAC=$\frac{1}{2}$∠BAD=$\frac{1}{2}\times(180°-\angle ABC)=60°=\angle ABC$，

∴△BAF≌△DAF≌△CBE，△ABC是等边三角形，

∴$DF=CE$，故A项答案正确，

∠ABF=∠BCE，

∵∠ABC=∠ABF+∠CBF=60°，

∴∠GCB+∠GBC=60°，

∴∠BGC=180°-（∠GCB+∠GBC）=120°，故B项答案正确，

∵∠ABF=∠BCE，∠BEG=∠CEB，

∴△BEG∽△CEB，

∴$\frac{BE}{GE}=\frac{CE}{BE}$，

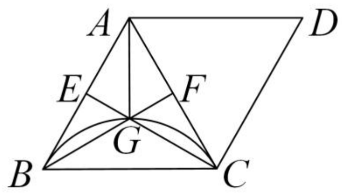
∴$BE^2=GE\bullet CE$，

∵$AF=BE$，

∴$AF^2=GE\bullet CE$，故C项答案正确，

∵$\angle BGC=120°$，BC=1，点G在以线段BC为弦的弧BC上，

∴当点G在等边△ABC的内心处时，AG取最小值，如下图，



∵△ABC是等边三角形，BC=1，

∴$BF\perp AC$，$AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，$\angle GAF=30°$，

∴$AG=2GF$，$AG^2=GF^2+AF^2$，

∴$AG^2=\left(\frac{1}{2}AG\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，解得$AG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 项错误，

故应选：D

【点拨】本题主要考查了菱形的基本性质、等边三角形的判定及性质、圆周角定理，熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

5．D

【分析】根据正方形的性质和三角形全等即可证明$\angle DAE=\angle FDC$，通过等量转化即可求证$AG\perp DM$，利用角平分线的性质和公共边即可证明$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，从而推出①的结论；利用①中的部分结果可证明$\triangle ADE\backsim\triangle DGE$推出$DE^2=GE\cdot AE$，通过等量代换可推出③的结论；利用①中的部分结果和勾股定理推出AM和CM长度，最后通过面积法即可求证④的结论不对；结合①中的结论和③的结论可求出$PM+PN$的最小值，从而证明②不对.

解： ∵$ABCD$为正方形，

∴$BC=CD=AD$，$\angle ADE=\angle DCF=90°$，

∵$BF=CE$，

∴$DE=FC$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle DCF(\mathrm{SAS})$.

∴$\angle DAE=\angle FDC$，

∵$\angle ADE=90°$，

∴$\angle ADG+\angle FDC=90°$，

∴$\angle ADG+\angle DAE=90°$，

∴$\angle AGD=\angle AGM=90°$.

$\because AE$ 平分 $\angle CAD$，

$\therefore \angle DAG=\angle MAG$.

$\because AG=AG$，

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$.

$\therefore DG=GM$，

$\because \angle AGD=\angle AGM=90°$，

$\therefore AE$ 垂直平分 DM，

故①正确.

由①可知，$\angle ADE=\angle DGE=90°$，$\angle DAE=\angle GDE$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle DGE$，

$\therefore \dfrac{DE}{GE}=\dfrac{AE}{DE}$，

$\therefore DE^2=GE\cdot AE$，

由①可知 $DE=CF$，

$\therefore CF^2=GE\cdot AE$.

故③正确.

$\because ABCD$ 为正方形，且边长为 4，

$\therefore AB=BC=AD=4$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{2}AB=4\sqrt{2}$.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AM=AD=4$，

$\therefore CM=AC-AM=4\sqrt{2}-4$.

由图可知，$\triangle DMC$ 和 $\triangle ADM$ 等高，设高为 h，

$\therefore S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle DMC}$，

$\therefore \dfrac{4\times h}{2}=\dfrac{4\times 4}{2}-\dfrac{(4\sqrt{2}-4)\cdot h}{2}$，

$\therefore h=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADM}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot h=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

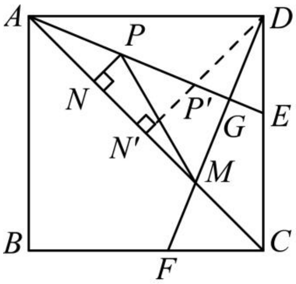
故④不正确.

由①可知，$\triangle ADG \cong \triangle AMG(\text{ASA})$，

$\therefore DG = GM$，

$\therefore M$ 关于线段 AG 的对称点为 D，过点 D 作 $DN' \perp AC$，交 AC 于 N'，交 AE 于 P'，

$\therefore PM + PN$ 最小即为 DN'，如图所示，



由④可知△ADM 的高 $h = 2\sqrt{2}$ 即为图中的 DN'，

$\therefore DN' = 2\sqrt{2}$.

故②不正确.

综上所述，正确的是①③.

故选：D.

【点拨】本题考查的是正方形的综合题，涉及到三角形相似，最短路径，三角形全等，三角形面积法，解题的关键在于是否能正确找出最短路径以及运用相关知识点.

6．A

【分析】构造如图所示的正方形 $CMPD$，然后根据相似三角形的判定和性质解直角三角形 FNP 即可.

解：如图，延长 CE，FG 交于点 N，过点 N 作 $l // AB$，延长 CB, DA 交 l 于 M, P，

$\therefore \angle CMN = \angle DPN = 90°$，

$\therefore$四边形 $CMPD$ 是矩形，

根据折叠，$\angle MCN = \angle GCN$，$CD = CG$，$DF = FG$，

$\because \angle CMN = \angle CGN = 90°$，$CN = CN$，

$\therefore Rt\Delta MNC \cong Rt\Delta GNC$，

$\therefore CM = CG = CD = 6$，$MN = NG$

$\therefore$四边形 $CMPD$ 为正方形，

$\because BE//MN$

$\therefore \triangle CBE \sim \triangle CMN$，

$\therefore \dfrac{BE}{MN}=\dfrac{CB}{CM}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，

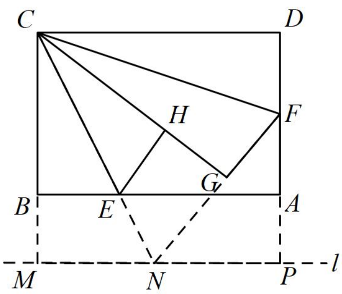
$\because BE=2$， $\therefore MN=3$，

$\therefore NP=3$，

设 $DF=x$，则 $AF=4-x$，

在 $Rt\triangle PNF$ 中，由 $FP^2+NP^2=NF^2$ 可得 $(4-x+2)^2+3^2=(3+x)^2$

解得 $x=2$；



故选 A.

【点拨】本题考查了折叠问题，正方形的性质与判定，矩形的性质，平行线的性质，全等三角形的性质和判定，相似三角形，勾股定理等知识点的综合运用，难度较大．作出合适的辅助线是解题的关键．

7．D

【分析】因为点 B' 为线段 MN 的三等分点，没有指明线段 $B'M$ 的占比情况，所以需要分两种情况讨论：①$B'M=\dfrac{1}{3}MN$；② $B'M=\dfrac{2}{3}MN$．然后由一线三垂直模型可证 $\triangle AMB' \backsim \triangle B'NE$，再根据相似三角形的性质求得 EN 的值，最后由 $BE=BN-EN$ 即可求得 BE 的长．

解：当点 B' 为线段 MN 的三等分点时，需要分两种情况讨论：

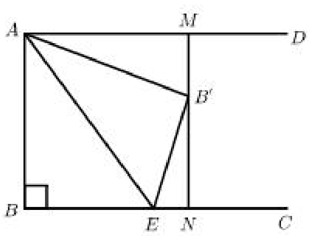


图1

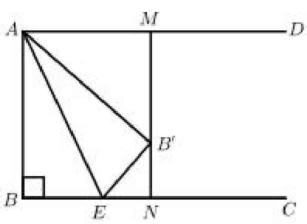


图2

①如图 1，当 $B'M=\dfrac{1}{3}MN$ 时，

$\because AD \parallel BC$， $AB \perp BC$， $MN \perp BC$，

$\therefore$四边形 $ABNM$ 为矩形，

$\therefore B'M = \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3}AB = 1$， $B'N = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}AB = 2$， $BN = AM$．

由折叠的性质可得 $A'B = AB = 3$， $\angle AB'E = \angle ABC = 90°$．

在 $Rt\triangle AB'M$ 中， $AM = \sqrt{AB'^2 - B'M^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$．

$\because \angle AB'M + \angle MAB' = 90°$， $\angle AB'M + \angle EB'N = 90°$，

$\therefore \angle EB'N = \angle MAB'$，

$\therefore \triangle B'NE \backsim \triangle AMB'$，

$\therefore \frac{EN}{B'M} = \frac{B'N}{AM}$，即 $\frac{EN}{1} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$，解得 $EN = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore BE = BN - EN = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$．

②如图 2，当 $B'M = \frac{2}{3}MN$ 时，

$\because AD \parallel BC$， $AB \perp BC$， $MN \perp BC$，

$\therefore$四边形 $ABNM$ 为矩形，

$\therefore B'M = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}AB = 2$， $B'N = \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3}AB = 1$， $BN = AM$．

由折叠的性质可得 $AB' = AB = 3$， $\angle AB'E = \angle ABC = 90°$．

在 $Rt\triangle AB'M$ 中， $AM = \sqrt{AB'^2 - B'M^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$．

$\because \angle AB'M + \angle MAB' = 90°$， $\angle AB'M + \angle EB'N = 90°$，

$\therefore \angle EB'N = \angle MAB'$，

$\therefore \triangle B'NE \backsim \triangle AMB'$，

$\therefore \frac{EN}{B'M} = \frac{B'N}{AM}$，即 $\frac{EN}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$，解得 $EN = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BE = BN - EN = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$．

综上所述， BE 的长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$．

故选：D.

【点拨】本题考查了矩形的判定，勾股定理，相似三角形的判定和性质，由 B' 为线段 MN 的三等分点，分两种情况讨论线段 $B'M$ 的占比情况，以及利用 K 型相似进行相关计算是解决此题的关键.

8．C

【分析】根据相似三角形的判定得出 $\triangle EOB \backsim \triangle EFA$，利用相似三角形的性质及已知 OE，EF 的值即可判断结论①；由①分析得出的条件，结合相似三角形、矩形的性质（对角线）即可判断结论②；根据直角坐标系上点的表示及结论① $OA=3AF$，利用勾股定理建立等式求解可得点 A 坐标，再根据关于原点对称的点的坐标得出点 D 坐标，即可判断结论③；由③可知 $AF=\sqrt{2}$，进而得出 OA 的值，根据矩形的性质即可判断结论④；根据矩形的性质及④可知 $BD=6\sqrt{2}$，利用三角形的面积公式求解即可判断结论⑤.

解：∵矩形 $ABCD$ 的顶点 A 在第一象限，$AF \perp x$ 轴，垂足为 F，

$\therefore \angle EOB=\angle EFA=90^{\circ}$，$AC=BD$，$OD=OA=OB=OC$.

$\because \angle AEF=\angle BEO$，

$\therefore \triangle EOB \backsim \triangle EFA$.

$\because OE=3$，$EF=1$，

$\therefore \frac{EF}{EO}=\frac{AF}{OB}=\frac{AF}{OA}=\frac{1}{3}$，即 $OA=3AF$.（①符合题意）

$\because OA=OB$，$\triangle EOB \backsim \triangle EFA$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA$，$\angle EAF=EBO$.

$\therefore \angle OAB=\angle EAF$.

$\therefore AE$ 平分 $\angle OAF$.（②符合题意）

$\because OF=OE+EF=3+1=4$，

∴点 A 的横坐标为 4.

$\because OA=3AF$，

$\therefore 9AF^2-AF^2=OF^2$，即 $8AF^2=16$.

$\therefore AF=\sqrt{2}$，点 A 的纵坐标为 $\sqrt{2}$.

$\therefore A(4,\sqrt{2})$.

∵点 A 与点 C 关于原点对称，

$\therefore C(-4,-\sqrt{2})$.（③符合题意）

$\because OA=3AF=3\sqrt{2}$，

$\therefore BD=OD+OB=2OA=6\sqrt{2}$．（④不符合题意）

$\because S_{矩形ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BAD}=2S_{\triangle BAD}$，

$\therefore S_{矩形ABCD}=2\times\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times4=24\sqrt{2}$．（⑤符合题意）

∴结论正确的共有 4 个符合题意．

故选：C．

【点拨】本题考查矩形与坐标的综合应用．涉及矩形的性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，直角坐标系上点的表示，关于原点对称的点的坐标，三角形的面积公式等知识点．矩形的对角线相等且互相平分；两角分别相等的两个三角形相似；相似三角形对应角相等，对应边成比例；两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 $P(x,y)$ 关于原点的对称点位 $P'(-x,-y)$．灵活运用相关知识点，通过已知条件建立等式关系是解本题的关键．

9．C

【分析】根据等腰三角形两底角相等与 $\angle A=36°$，得到 $\angle ABC=\angle C=72°$，根据角平分线定义得到 $\angle ABD=\angle CBD=36°$，根据线段垂直平分线性质得到 $EB=ED$，得到 $\angle EBD=\angle EDB$，推出 $\angle EDB=\angle CBD$，得到 $DE\,/\!/\,BC$，推出 $\angle AED=\angle ABC$，①正确；根据等角对等边得到 $AD=AE$，$AD=BD$，根据三角形外角性质得到 $\angle BDC=72°=\angle C$，得到 $BC=BD$，推出 $BC=AE$，②正确；根据 $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，得到 $\frac{ED}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{AD+DC}$，推出 $ED=\frac{\sqrt{5}-1}{2}BC$，③错误；根据 $AC=2$ 时，$CD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AD$，得到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}AD=2-AD$，推出 $AD=\sqrt{5}-1$，④正确．

解：$\because\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，

$\therefore\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=72°$，

由作图知，BD 平分 $\angle ABC$，MN 垂直平分 BD，

$\therefore\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=36°$，$EB=ED$，

$\therefore\angle EBD=\angle EDB$，

$\therefore\angle EDB=\angle CBD$，

$\therefore DE\,/\!/\,BC$，

$\therefore\angle AED=\angle ABC$，①正确；

$\angle ADE=\angle C$，

$\therefore \angle AED = \angle ADE$，

$\therefore AD = AE$，

$\because \angle A = \angle ABD$，

$\therefore AD = BD$，

$\because \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72°$，

$\therefore \angle BDC = \angle C$，

$\therefore BC = BD$，

$\therefore BC = AE$，②正确；

设 $ED = x$，$BC = a$，

则 $AD = a$，$BE = x$，

$\therefore CD = BE = x$，

$\because \triangle AED \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD + DC}$，

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{a}{a + x}$，

$\therefore x^2 + ax - a^2 = 0$，

$\because x > 0$，

$\therefore x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a$，

即 $ED = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}BC$，③错误；

当 $AC = 2$ 时，$CD = 2 - AD$，

$\because CD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}AD$，

$\therefore \frac{\sqrt{5} - 1}{2}AD = 2 - AD$，

$\therefore AD = \sqrt{5} - 1$，④正确

∴正确的有①②④，共 3 个.

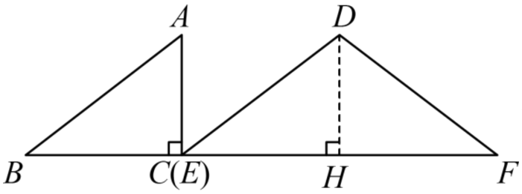
故选：C.

【点拨】本题主要考查了等腰三角形，相似三角形，解决问题的关键是熟练掌握等腰三角形判定和性质，相似三角形的判定和性质，角平分线的定义和线段垂直平分线的性质.

10．A

【分析】分$0\le t<4$，$4\le t<8$，$8\le t<12$三种情况，分别求出函数解析即可判断.

解：过点 D 作 $DH\perp CB$ 于 H，



，

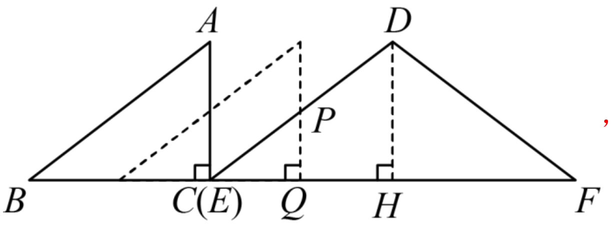
$\because DE=DF=5$，$EF=8$，

$\therefore EH=FH=\frac{1}{2}EF=4$，

$\therefore DH=\sqrt{DE^2-EH^2}=3$

当$0\le t<4$时，

如图，重叠部分为$\triangle EPQ$，此时$EQ=t$，$PQ\,//\,DH$，



，

$\therefore \triangle EPQ\backsim\triangle EDH$，

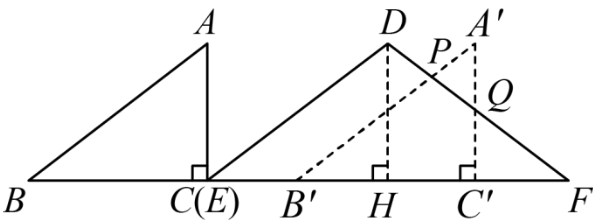
$\therefore \frac{PQ}{DH}=\frac{EQ}{EH}$，即$\frac{PQ}{3}=\frac{t}{4}$，

$\therefore PQ=\frac{3}{4}t$

$\therefore S=\frac{1}{2}t\times\frac{3}{4}t=\frac{3}{8}t^2$；

当$4\le t<8$时，

如图，重叠部分为四边形$PQC'B'$，此时$BB'=CC'=t$，$PB'\,//\,DE$，



$\therefore B'F = BC + CF - BB' = 12 - t$， $FC' = 8 - t$，

$\because PB' \parallel DE$，

$\therefore \triangle PB'F \backsim \triangle DCF$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PB'F}}{S_{\triangle DCF}} = \left(\dfrac{B'F}{CF}\right)^2$，

又 $S_{\triangle DCF} = \dfrac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PB'F}}{12} = \left(\dfrac{12-t}{8}\right)^2$，

$\therefore S_{\triangle PB'F} = \dfrac{3}{16}(12-t)^2$，

$\because DH \perp BC$， $\angle A'B'C' = 90°$，

$\therefore A'C' \parallel DH$，

$\therefore \triangle C'QF \backsim \triangle HFD$，

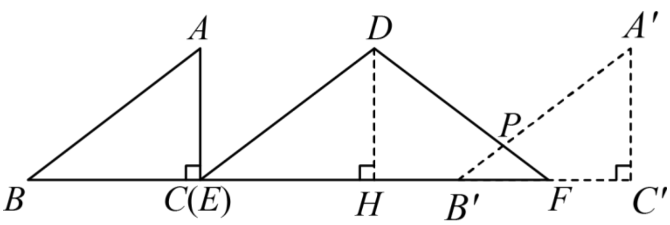
$\therefore \dfrac{S_{\triangle C'QF}}{S_{\triangle HFD}} = \left(\dfrac{C'F}{HF}\right)^2$， 即 $\dfrac{S_{\triangle C'QF}}{\frac{1}{2} \times 4 \times 3} = \left(\dfrac{8-t}{4}\right)^2$，

$\therefore S_{\triangle C'QF} = \dfrac{3}{8}(8-t)^2$，

$\therefore S = S_{\triangle PB'F} - S_{\triangle C'QF} = \dfrac{3}{16}(12-t)^2 - \dfrac{3}{8}(8-t)^2 = -\dfrac{3}{16}t^2 + \dfrac{3}{2}t + 3$；

当 $8 \le t < 12$ 时

如图，重叠部分为四边形 $\triangle PFB'$，此时 $BB' = CC' = t$， $PB' \parallel DE$，



$\therefore B'F = BC + CF - BB' = 12 - t$，

$\because PB' \parallel DE$，

$\therefore \triangle PB'F \backsim \triangle DCF$，

$\therefore \frac{S_{\triangle PB'F}}{S_{\triangle DCF}} = \left(\frac{B'F}{CF}\right)^2$，即 $\frac{S_{\triangle PB'F}}{12} = \left(\frac{12-t}{8}\right)^2$

$\therefore S = S_{\triangle PB'F} = \frac{3}{16}(12-t)^2$，

综上，$S = \begin{cases} \frac{3}{8}t^2 \ (0 \le t < 4) \\ -\frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{2}t + 3 \ (4 \le t < 8) \\ \frac{3}{16}(12-t)^2 \ (8 \le t < 12) \end{cases}$，

$\therefore$符合题意的函数图象是选项 A．

故选：A．

【点拨】此题结合图像平移时面积的变化规律，考查二次函数相关知识，根据平移点的特点列出函数表达式是关键，有一定难度．

11．　2　$\frac{2\sqrt{13}}{3}$

【分析】如图，证明$\triangle AFB \cong \triangle DEA$，得到$AF = DE$，勾股定理求出$BF$的长，等积法求出$AH$的长，证明$\triangle AGF \backsim \triangle CGB$，相似比求出$AG$的长，证明$\triangle AMB \backsim \triangle CME$，求出$AM$的长，证明$\triangle AHG \backsim \triangle ANM$，求出$HN, MN$的长，再利用勾股定理求出$MH$的长．

解：$\because$正方形$ABCD$的边长为$2\sqrt{5}$，点E是CD的中点，

$\therefore \angle BAD = \angle CDA = 90°, AB = AD = CD = 2\sqrt{5}, DE = \frac{1}{2}CD = \sqrt{5}$，　$AB \parallel CD, AD \parallel BC$，

$\therefore AC = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{10}$，

$\because BF \perp AH$，

$\therefore \angle AHF = 90° = \angle BAD$，

$\therefore \angle DAE = \angle BAF = 90° - \angle AFH$，

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA$，

$\therefore AF = DE = \sqrt{5}$，

$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = 5$，

$\because S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot AF = \frac{1}{2} BF \cdot AH$，

$\therefore 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5AH$，

$\therefore AH = 2$；

$\because AB \parallel CD, AD \parallel BC$，

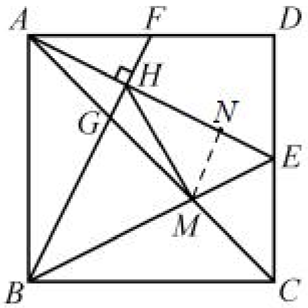
$\therefore \triangle AGF \backsim \triangle CGB$， $\triangle AMB \backsim \triangle CME$，

$\therefore \frac{AG}{CG} = \frac{AF}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{AM}{CM} = \frac{AB}{CE} = 2$，

$\therefore AG = \frac{1}{3} AC = \frac{2\sqrt{10}}{3}, AM = \frac{2}{3} AC = \frac{4\sqrt{10}}{3}$，

$\therefore GH = \sqrt{AG^2 - AH^2} = \frac{2}{3}$，

故点 M 作 $MN \perp AE$，则： $GH \parallel MN$，



$\therefore \triangle AHG \backsim \triangle ANM$，

$\therefore \frac{AH}{AN} = \frac{GH}{MN} = \frac{AG}{AM} = \frac{1}{2}$，

$\therefore AN = 2AH = 4, MN = 2GH = \frac{4}{3}$，

$\therefore HN = 2$，

$\therefore MH = \sqrt{NM^2 + NH^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$．

故答案为：2， $\frac{2\sqrt{13}}{3}$．

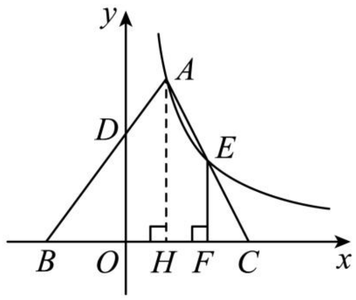
【点拨】本题考查正方形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，本题

的综合形较强，属于中考填空题中的压轴题．熟练掌握正方形的性质，证明三角形全等和相似，是解题的关键．

12．4

【分析】过点A作 $AH\perp x$ 轴于点 H，证明 $\triangle AHC\backsim\triangle EFC$，得 $AH=2EF,CF=HF$，再根据 $BF-CF=3$，可得 $BH=3$，再证明 $\triangle DOB\backsim\triangle BHA$，得到 OB,OH 的长，设 $CF=HF=a$，$EF=b$，得到 A,E 的坐标，根据两点在同一反比例函数上，可解得 a 的值，从而可得 $BA=BC=5$，再利用勾股定理解得 $AH=4$，从而求得 k 的值．

解：如图，过点A作 $AH\perp x$ 轴于点 H，



$\because EF\perp x$ 轴，

$\therefore AH\,//\,EF$，

$\therefore\angle HAC=\angle FEC$，

$\therefore\triangle AHC\backsim\triangle EFC$，

$\because E$ 是 AC 的中点，

$\therefore\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{HC}{FC}=2$，

$\therefore HF=FC$，

$\because BF-FC=3$，

$\therefore BF-FC=BF-HF=3$，

即 $BH=3$，

同理可得 $\triangle AHB\backsim\triangle DOB$，

$\because BD=2AD$，

$\therefore\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BH}{BO}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore BO=2,OH=BH-BO=1$，

设 $FC=a,EF=b$，则 $HF=a$，$AH=2b$，

$\therefore A(1,2b),E(1+a,b)$，

ō A,E 都在反比例函数上，

$\therefore 1\times 2b=(1+a)\times b$，

解得 $a=1$，

$\therefore BA=BC=BH+HF+FC=5$，

在 Rt△ABH 中， $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=4$，

$\therefore A(1,4)$，

$\therefore k=1\times 4=4$，

故答案为：4．

【点拨】本题考查了反比例函数的图像，相似三角形的判定及性质，勾股定理，理解反比例函数图像上的点横坐标与纵坐标的乘积相同，是解题的关键．

13．$\frac{5}{2}$

【分析】根据平行四边形 $ABCD$ 推出平行四边形 $AEBC$，根据 $\triangle OAF$ 和 $\triangle EFB$ 相似，进而求出各个三角形的面积比，设 $S_{\triangle OAF}=x$，表示出其他三角形面积，进而作答．

解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$， $OA=OC$，

又∵ $BE\parallel AC$，

∴四边形 $AEBC$ 是平行四边形，

$AC=BE$，

∴ $BE=2OA$，

∵ $BE\parallel AC$，

∴ $\angle OAF=\angle EBF$， $\angle AOF=\angle BEF$，

∴ $\triangle OAF\backsim\triangle EBF$，

∴ $\frac{S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle EBF}}=\left(\frac{OA}{BE}\right)^2=\frac{1}{4}$， $\frac{OF}{EF}=\frac{OA}{BE}=\frac{1}{2}$，

∴ $S_{\triangle EBF}=4S_{\triangle OAF}$， $EF=2OF$，

∴ $S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle AOF}$

同理 $S_{\triangle EBF}=2S_{\triangle OBF}$，

$\because OA=OC$，

$\therefore S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAB}$，

设 $S_{\triangle OAF}=x$， 则 $S_{\triangle EBF}=4x$， $S_{\triangle AEF}=2x$， $S_{\triangle OBF}=2x$， $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}=x+2x=3x$

$\therefore S_{四边形BCOF}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle BOF}=3x+2x=5x$

$\therefore \dfrac{S_{四边形BCOF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$

故答案为：$\dfrac{5}{2}$

【点拨】本题考查平行四边形及三角形的相似，相似比和面积比，解题的关键是根据三角形的相似比表示出三角形的面积.

14．$\dfrac{16}{5}$

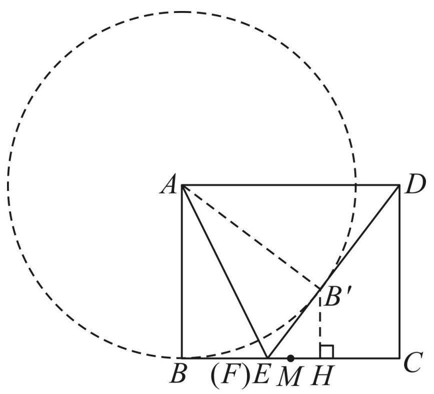
【分析】如图，由题意可得：B' 在 $\odot A$ 上，过 B' 作 $B'H\perp BC$ 于 H，由点 B 关于直线 AE 的对称点 B'，可得 $AB=AB'$， $BE=B'E$， $\angle AEB=\angle AEB'$， $\angle ABE=\angle AB'E$，当 DE 与 $\odot A$ 切于点 B' 时， BF 最大，此时 $DF\perp AB'$，证明 E， F 重合，可得 $\angle DAE=\angle AEB=\angle AEB'$， $AD=DE=10$，求解 $BE=B'E=4$，证明 $\triangle EB'H\backsim\triangle EDC$，可得 $\dfrac{EB'}{ED}=\dfrac{B'H}{CD}$，从而可得答案.

解：如图，由题意可得：B' 在 $\odot A$ 上，过 B' 作 $B'H\perp BC$ 于 H，

$\because$点 B 关于直线 AE 的对称点 B'，

$\therefore AB=AB'$， $BE=B'E$， $\angle AEB=\angle AEB'$， $\angle ABE=\angle AB'E$，

当 DE 与 $\odot A$ 切于点 B' 时， BF 最大，此时 $DF\perp AB'$，



$\therefore \angle ABE=\angle AB'F=90°$，

$\therefore E$， F 重合，

$\therefore \angle AEB=\angle AEB'$，

$\because$矩形 $ABCD$，

$\therefore AD // BC$， $\angle C=90^{\circ}$， $AD=BC=10$， $AB=CD=8$，

$\therefore \angle DAE=\angle AEB=\angle AEB'$，

$\therefore AD=DE=10$，

$\therefore CE=\sqrt{10^{2}-8^{2}}=6$，

$\therefore BE=B'E=4$，

$\because B'H\perp BC$， $\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore B'H // CD$，

$\therefore \triangle EB'H\backsim\triangle EDC$，

$\therefore \dfrac{EB'}{ED}=\dfrac{B'H}{CD}$，

$\therefore \dfrac{4}{10}=\dfrac{B'H}{8}$，

$\therefore B'H=\dfrac{16}{5}$，

$\therefore$点 B' 到 BC 的距离是 $\dfrac{16}{5}$.

故答案为： $\dfrac{16}{5}$.

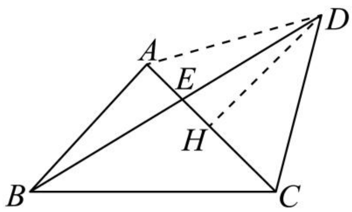
【点拨】本题考查的是轴对称的性质，矩形的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，圆的基本性质，作出合适的辅助线是解本题的关键.

15． $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

【分析】连接 AD， 证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形，则 $AC=AD=CD$， $\angle ADC=\angle CAD=60^{\circ}$， 设 $AC=AD=CD=a$， 则 $AB=AC=a$， 取 AC 的中点 H，连接 DH， 求出 $DH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$， 设 $AE=x$， 则 $EH=\dfrac{1}{2}a-x$， 证明 $\triangle AEB\backsim\triangle HED$， 得到 $\dfrac{AE}{HE}=\dfrac{AB}{DH}$， 解得 $x=\left(2-\sqrt{3}\right)a$， 即 $AE=\left(2-\sqrt{3}\right)a$， 再利用勾股

定理求出 $DE^2=3\left(2-\sqrt{3}\right)a^2$，进一步即可得到答案.

解：连接 AD，



$\because$将 AC 绕着点 C 按顺时针旋转 $60°$ 得到 CD，

$\therefore AC=CD$，

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore AC=AD=CD$，$\angle ADC=\angle CAD=60°$，

设 $AC=AD=CD=a$，则 $AB=AC=a$，

取 AC 的中点 H，连接 DH，

$\therefore AH=CH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$，$\angle AHD=90°$，

$\therefore DH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

设 $AE=x$，则 $EH=AH-AE=\frac{1}{2}a-x$，

$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAE=\angle DHE$，

$\because \angle AEB=\angle HED$，

$\therefore \triangle AEB\backsim\triangle HED$，

$\therefore \frac{AE}{HE}=\frac{AB}{DH}$，

$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}a-x}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$，

解得 $x=\left(2-\sqrt{3}\right)a$，

即 $AE=\left(2-\sqrt{3}\right)a$，

$\therefore EH = AH - AE = \frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - \left(2-\sqrt{3}\right)a = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}a$,

$\therefore DE^2 = 3\left(2-\sqrt{3}\right)a^2$,

$\therefore \frac{AE}{ED} = \sqrt{\frac{AE^2}{ED^2}}$

$= \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 a^2}{3\left(2-\sqrt{3}\right)a^2}}$

$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$

$= \frac{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{3}$

$= \frac{\sqrt{\frac{24-12\sqrt{3}}{4}}}{3}$

$= \frac{\sqrt{\frac{18-12\sqrt{3}+6}{4}}}{3}$

$= \frac{\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2}{4}}}{3}$

$= \frac{\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{4}}}{3}$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$,

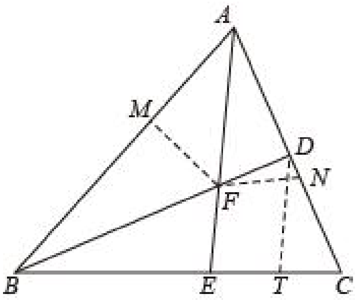
故答案为：$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$.

【点拨】此题考查了相似三角形的判定和性质、勾股定理、旋转的性质、等边三角形的判定和性质等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

16．$5\sqrt{3}$

【分析】如图，过点F作$FM\perp AB$于点M，$FN\perp AC$于点N，过点D作$DT//AE$交BC于点T．证明$AB=3AD$，设$AD=CD=a$，证明$ET=CT$，设$ET=CT=b$，则$BE=3b$，求出$a+b$，可得结论.

解：如图，过点F作$FM\perp AB$于点M，$FN\perp AC$于点N，过点D作$DT//AE$交BC于点T.



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$， $FM \perp AB$， $FN \perp AC$，

$\therefore FM = FN$，

$\therefore \frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta ADF}} = \frac{BF}{DF} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot FM}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot FN} = 3$，

$\therefore AB = 3AD$，

设 $AD = DC = a$， 则 $AB = 3a$，

$\because AD = DC$， $DT // AE$，

$\therefore ET = CT$，

$\therefore \frac{BE}{ET} = \frac{BF}{DF} = 3$，

设 $ET = CT = b$， 则 $BE = 3b$，

$\because AB + BE = 3\sqrt{3}$，

$\therefore 3a + 3b = 3\sqrt{3}$，

$\therefore a + b = \sqrt{3}$，

$\therefore \Delta ABC$ 的周长 $= AB + AC + BC = 5a + 5b = 5\sqrt{3}$，

故答案为： $5\sqrt{3}$.

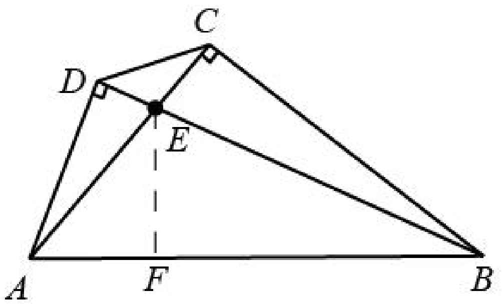
【点拨】本题考查平行线分线段成比例定理，角平分线的性质定理等知识，解题的关键是学会利用参数解决问题.

17. $36-18\sqrt{2}$ / $-18\sqrt{2}+36$ 112.5

【分析】通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle BCE$，利用相似三角形的性质求出 $AE = \frac{m^2}{3}$， $CE = 6 - \frac{m^2}{3}$， 再利用勾股定理求出其长度，即可求三角形 ABE 的面积，过点 E 作 $EF \perp AB$，垂足为 F，证明 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，再求出 $AE = CE$， 继而证明 $Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle BFE\,(HL)$， 可知 $\angle EBF = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 22.5°$， 利用外角的

性质即可求解.

解：



$\because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ, \angle AED = \angle BEC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BCE$，

$\therefore \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AE}{BE}$，

$\because BC = AC = 6, BE = 2AD$ ，

设 $AD = m, BE = 2m$，

$\therefore \dfrac{m}{6} = \dfrac{AE}{2m}$，

$\therefore AE = \dfrac{m^2}{3}$，

$\therefore CE = 6 - \dfrac{m^2}{3}$，

在 $Rt\triangle BCE$ 中，由勾股定理得 $BC^2 + CE^2 = BE^2$，

$\therefore 6^2 + \left(6 - \dfrac{m^2}{3}\right)^2 = (2m)^2$，

解得 $m^2 = 36 - 18\sqrt{2}$ 或 $m^2 = 36 + 18\sqrt{2}$ ，

$\because$ 对角线 AC， BD 相交于点 E，

$\therefore m^2 = 36 - 18\sqrt{2}$ ，

$\therefore AE = 12 - 6\sqrt{2}$，

$\therefore CE = 6\sqrt{2} - 6$，

$\therefore S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \dfrac{1}{2} \times \left(12 - 6\sqrt{2}\right) \times 6 = 36 - 18\sqrt{2}\text{cm}^2$ ，

过点 E 作 $EF \perp AB$，垂足为 F，

$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = BC$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ = \angle AEF$，

$\therefore FE=AF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AE=6\sqrt{2}-6=CE$，

$\because BE=BE$，

$\therefore Rt\triangle BCE\cong Rt\triangle BFE(HL)$，

$\therefore \angle EBF=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=22.5°$，

$\therefore \angle AEB=\angle ACB+\angle EBC=112.5°$，

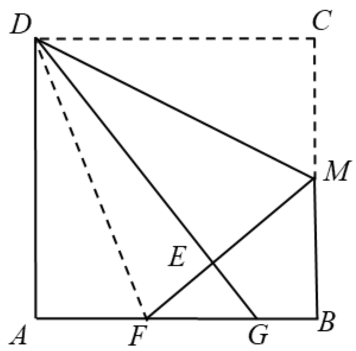
故答案为：$36-18\sqrt{2}$，112.5．

【点拨】本题考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理，等腰直角三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质及三角形外角的性质，熟练掌握知识点是解题的关键．

18．$\dfrac{5}{3}/1\dfrac{2}{3}$

【分析】根据折叠的性质可得 $DE=DC=4$，$EM=CM=2$，连接 DF，设 $FE=x$，由勾股定理得 BF，DF，从而求出 x 的值，得出 FB，再证明 $\Delta FEG\sim\Delta FBM$，利用相似三角形对应边成比例可求出 FG．

解：连接 DF，如图，



$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=DA=4,\angle A=\angle B=\angle C=\angle CDA=90^{\circ}$.

$\because$点 M 为 BC 的中点，

$\therefore BM=CM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

由折叠得，$ME=CM=2,DE=DC=4,\angle DEM=\angle C=90^{\circ}$,

$\therefore\angle DEF=90^{\circ}$，$\angle FEG=90°$,

设 $FE=x$,则有 $DF^2=DE^2+EF^2$

$\therefore DF^2=4^2+x^2$

又在 $Rt\Delta FMB$ 中， $FM=2+x, BM=2$，

$\because FM^2=FB^2+BM^2$

$\therefore FB=\sqrt{FM^2-BM^2}=\sqrt{(2+x)^2-2^2}$

$\therefore AF=AB-FB=4-\sqrt{(2+x)^2-2^2}$

在 $Rt\Delta DAF$ 中， $DA^2+AF^2=DF^2$,

$\therefore 4^2+\left(4-\sqrt{(2+x)^2-2^2}\right)^2=4^2+x^2$,

解得， $x_1=\frac{4}{3}, x_2=-8$ （舍去）

$\therefore FE=\frac{4}{3}$,

$\therefore FM=FE+ME=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$

$\therefore FB=\sqrt{(2+\frac{4}{3})^2-2^2}=\frac{8}{3}$

$\because \angle DEM=90^\circ$

$\therefore \angle FEG=90^\circ$

$\therefore \angle FEG=\angle B$,

又$\angle GFE=\angle MFB$.

$\therefore \triangle FEG\sim\Delta FBM$

$\therefore \frac{FG}{FM}=\frac{FE}{FB}$, 即 $\frac{FG}{\frac{10}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}$

$\therefore FG=\frac{5}{3}$,

故答案为： $\frac{5}{3}$

【点拨】本题主要考查了正方形的性质，折叠的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质，正确作出辅助线是解答本题的关键.

19.（1） $B(4,0)$， $C(0,8)$；（2）存在， $P(0,16)$或$P\left(0,\frac{16}{3}\right)$.

【分析】(1）令 y=0,求 $-x^2+2x+8=0$ 的根即可；令 x=0,求得 y 值即可确定点 C 的坐标；

（2）确定抛物线的对称轴为 x=1,确定 C' 的坐标为（2，8），计算 $C'C$=2，利用直角相等，两边对应成比例及其夹角相等的两个三角形相似，分类求解即可.

解：（1）令 $y=0$，则 $-x^2+2x+8=0$，

$\therefore x_1=-2$， $x_2=4$

$\therefore B(4,0)$.

令 $x=0$，则 $y=8$.

$\therefore C(0,8)$.

（2）存在．由已知得，该抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

$\because$点 C' 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore C(2,8)$， $CC'=2$.

$\therefore CC'//OB$.

$\because$点 P 在 y 轴上，

$\therefore \angle PCC'=\angle POB=90°$

$\therefore$当 $\dfrac{PC}{PO}=\dfrac{CC'}{OB}$ 时， $\triangle PCC'\backsim\triangle POB$.

设 $P(0,y)$，

i）当 $y>8$ 时，则 $\dfrac{y-8}{y}=\dfrac{2}{4}$，

$\therefore y=16$.

$\therefore P(0,16)$

ii）当 $0<y<8$ 时，则 $\dfrac{8-y}{y}=\dfrac{2}{4}$，

$\therefore y=\dfrac{16}{3}$

$\therefore P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$.

iii）当 $y<0$ 时，则 $CP>OP$，与 $\dfrac{PC}{PO}=\dfrac{1}{2}$ 矛盾.

$\therefore$点 P 不存在

$\therefore P(0,16)$ 或 $P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$.

【点拨】本题考查了二次函数与一元二次方程的关系，对称轴的意义，三角形相似的判定和性质，熟练掌握二次函数的性质，灵活运用三角形的相似和进行一元二次方程根的求解是解题的关键.

20.（1）见分析；（2）$BE=\dfrac{5}{3}$

【分析】(1) 连接 OC，根据点 C 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点可得 $\angle ABC=\angle CBD$，进而证 $OC \parallel BD$，从而得证 $\angle PCO=\angle D=90°$ 即可；

（2）解法一：连接 AE 交 OC 于 M，根据 $PC=2\sqrt{2}BO$ 及勾股定理求出 $OC=\dfrac{5}{2}$，再证明 $AE \parallel PD$，从而得到 $\dfrac{OM}{OC}=\dfrac{OA}{OP}$，即可求出 BE 的值；解法二：过点 O 作 $OH\perp BD$ 于点 H，按照解法一步骤求出 $OC=\dfrac{5}{2}$，然后证明四边形 $COHD$ 是矩形，再证明 $\triangle PCO \backsim \triangle PDB$，求得 $BD=\dfrac{10}{3}$，进而求出 BE 的值.

解：（1）证明：连接 OC，

$\because BD\perp CD$，

$\therefore \angle D=90°$，

$\because$ 点 C 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$，

$\therefore \angle ABC=\angle CBD$，

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=\angle OCB$，

$\therefore \angle OCB=\angle CBD$，

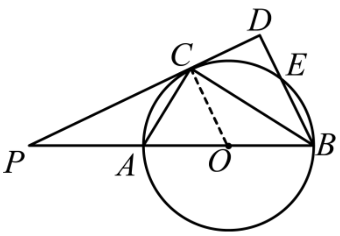
$\therefore OC \parallel BD$，

$\therefore \angle PCO=\angle D=90°$，

$\therefore OC\perp PD$，

$\because OC$ 是半径，

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线；



（2）解法一：连接 AE 交 OC 于 M，

$\because PC=2\sqrt{2}BO$， $BO=CO$，

$\therefore PC=2\sqrt{2}CO$，

$\because PB=10$，

$\therefore PO=PB-OB=10-OC$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCO$ 中 $PC^2+OC^2=PO^2$，

$\therefore \left(2\sqrt{2}CO\right)^2+OC^2=\left(10-OC\right)^2$，

$\therefore OC=\dfrac{5}{2}$ 或 $OC=-5$（不符合题意，舍去），

$\because$ 点 C 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点， OC 是半径，

$\therefore OC$ 垂直平分 AE，

$\because OA=OB$，

$\therefore OM$ 是 $\triangle AEB$ 的中位线，

$\therefore BE=2OM$，

$\because AB$ 是直径，

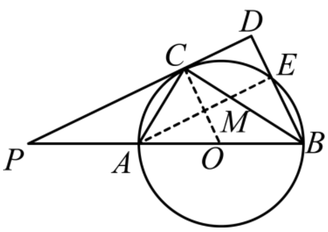
$\therefore \angle AEB=\angle D=90^\circ$，

$\therefore AE \parallel PD$，

$\therefore \dfrac{OM}{OC}=\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{\frac{5}{2}}{10-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore OM=\dfrac{1}{3}OC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{6}$，

$\therefore BE=2\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{3}$；



解法二：过点 O 作 $OH\perp BD$ 于点 H，

$\therefore \angle DHO=90^\circ$， $BE=2BH$，

$\because PC=2\sqrt{2}BO$， $BO=CO$，

$\therefore PC=2\sqrt{2}CO$，

$\because PB=10$，

$\therefore PO=PB-OB=10-OC$，

$\therefore$在$\text{Rt}\triangle PCO$中，$PC^2+OC^2=PO^2$，

$\therefore \left(2\sqrt{2}CO\right)^2+OC^2=\left(10-OC\right)^2$，

$\therefore OC=\dfrac{5}{2}$或$OC=-5$（不符合题意，舍去），

$\because \angle PDB=\angle DHO=\angle OCD=90^\circ$，

$\therefore$四边形$COHD$是矩形，

$\therefore DH=CO=\dfrac{5}{2}$，

$\because OC\parallel BD$，

$\therefore \triangle PCO\backsim\triangle PDB$，

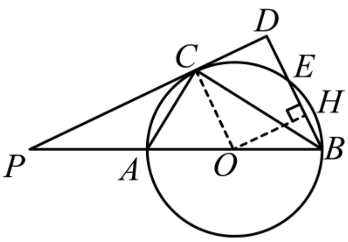
$\therefore \dfrac{PO}{PB}=\dfrac{CO}{BD}$，

$\therefore \dfrac{\frac{15}{2}}{10}=\dfrac{\frac{5}{2}}{BD}$，

\ $BD=\dfrac{10}{3}$，

$\therefore BH=\dfrac{10}{3}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{6}$，

$\therefore BE=2BH=2\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{3}$.



【点拨】本题考查切线的判定，圆的相关性质，勾股定理，平行线间线段成比例，相似三角形的的判定与性质，掌握并理解相关性质定理并能综合应用是关键.

21.（1）-3，-3，$\left(-4,0\right)$；（2）点P的坐标为$\left(4,0\right)$或$\left(\dfrac{5}{2},0\right)$

【分析】（1）点B是两函数图象的交点，利用待定系数法求出m，k的值；根据“A，B两点关于原点对称”求出点A的坐标，过点A作x轴的垂线，利用等腰直角三角形的性质，结合图形，求出点C的坐标.

（2）根据点 P 在 x 轴上，结合图形，排除点 P 在 x 轴负半轴上的情形，当点 P 在 x 轴正半轴上时，两个三角形中已有一对角相等，而夹角的两边的对应关系不确定，故分类讨论：①$\triangle AOC\backsim\triangle BOP$；②$\triangle AOC\backsim\triangle POB$．分别求出两种情况下 OP 的长，从而得出点 P 的坐标．

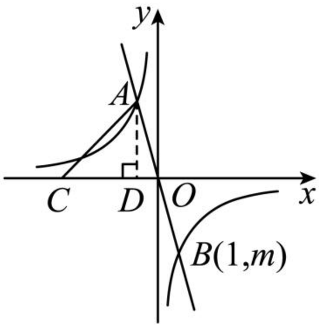
解：（1）（1）将 $B(1,m)$ 代入 $y=-3x$，得 $m=-3\times1=-3$，

$\therefore B(1,-3)$．

将 $B(1,-3)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $-3=\dfrac{k}{1}$，

$\therefore k=-3$．

如图，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴于点 D，则 $\angle ADC=90^\circ$．



$\because$点 A，B 关于原点 O 对称，

$\therefore A(-1,3)$，

$\therefore OD=1$，$AD=3$．

又$\because\angle ACO=45^\circ$，

$\therefore CD=AD=3$，

$\therefore OC=OD+CD=1+3=4$，

$\therefore C(-4,0)$．

故答案为：-3，-3，$(-4,0)$；

（2）由（1）可知，$B(1,-3)$，$A(-1,3)$．

当点 P 在 x 轴的负半轴上时，$\angle BOP>90^\circ$，

$\therefore\angle BOP>\angle AOC$．

又$\because \angle BOP > \angle ACO$，$\angle BOP > \angle CAO$，

$\therefore \triangle BOP$与$\triangle AOC$不可能相似.

当点P在x轴的正半轴上时，$\angle AOC = \angle BOP$.

①若$\triangle AOC \backsim \triangle BOP$，则$\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OP}$，

$\because OA = OB$，

$\therefore OP = OC = 4$，

$\therefore P(4,0)$；

②若$\triangle AOC \backsim \triangle POB$，则$\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OC}{OB}$，

又$\because OA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$，$OB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$，$OC = 4$，

$\therefore OP = \dfrac{5}{2}$，

$\therefore P\left(\dfrac{5}{2},0\right)$.

综上所述，点P的坐标为$(4,0)$或$\left(\dfrac{5}{2},0\right)$.

【点拨】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、相似三角形的性质．熟练掌握用待定系数法求函数表达式，并能利用数形结合思想和分类讨论思想分析是解答本题的关键．

22．（1）见分析；（2）$\triangle FBG$是等腰三角形，理由见分析；（3）$\sqrt{2}-1$

【分析】（1）利用正方形的性质得出$AB = AD$，$\angle BAE = \angle DAE = 45°$，进而即可得到$\triangle ABE \cong \triangle ADE(\text{SAS})$；

（2）先判断出$\angle AGD = \angle FGB$，进而判断出$\angle FGB = \angle FBG$，即可得到结论；

（3）先求出FG的长，可证明$\triangle FBE$是等腰直角三角形．从而得到EF的长，再利用$\angle BEF = \angle BAE = 45°$，$\angle ABE = \angle EBG$，可证得$\triangle ABE \sim \triangle EBG$，进而得到$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EG}{BE}$，从而可得到答案．

（1）解：$\because$四边形$ABCD$是正方形，AC是对角线，

$\therefore AB = AD$，$\angle BAE = \angle DAE = 45°$，

在$\triangle ABE$和$\triangle ADE$中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE(\mathrm{SAS})$.

（2）解：$\triangle FBG$ 是等腰三角形，理由如下：

$\because \triangle ABE \cong \triangle ADE$，

$\therefore \angle ABE = \angle ADE$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle DAG = 90^\circ$，

$\therefore \angle ADE + \angle AGD = 90^\circ$，

$\because \angle AGD = \angle FGB$，

$\therefore \angle ADE + \angle FGB = 90^\circ$，

$\because FB \perp BE$，

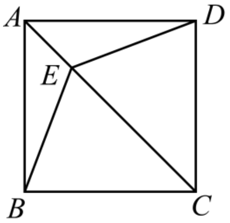
$\therefore \angle EBF = 90^\circ$，

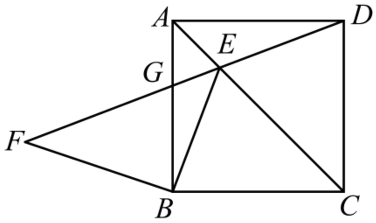
$\therefore \angle ABE + \angle FBG = 90^\circ$，

$\therefore \angle FGB = \angle FBG$，

$\therefore BF = FG$，

$\therefore \triangle FBG$ 是等腰三角形.





（3）解：$\because BE = BF = 2$， $BF = FG$，

$\therefore BE = BF = FG = 2$，

又$\because FB \perp BE$，

$\therefore \triangle FBE$ 是等腰直角三角形.

$\therefore \angle BEF = \angle BAE = 45^\circ$， $BF^2 + BE^2 = EF^2$，

$\therefore EF^2 = 2^2 + 2^2 = 8$，

$\therefore EF = 2\sqrt{2}$，

$\therefore GE = 2\sqrt{2} - 2$，

$\because \angle BEF = \angle BAE = 45^\circ$， $\angle ABE = \angle EBG$，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EBG$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EG}{BE}$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF - FG}{BE} = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$.

【点拨】本题考查四边形综合题，主要考查了正方形的性质，全等三角形，等腰三角形以及相似三角形，熟练掌握等腰三角形以及全等三角形的判定与性质是解题的关键.

23.（1） $y = \dfrac{1}{3}x^2 - \sqrt{3}x + 2$；（2）①$\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{6}{5}$；②$2\sqrt{3} + 3$或$2\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$或$\sqrt{3}$

【分析】（1）利用待定系数法解答即可；

（2）①利用已知条件用含 a 的代数式表示出点 E，D，F，G 的坐标，进而得到线段 CD 的长度，利用分类讨论的思想方法和相似三角形的性质，列出关于 a 的方程，解方程即可得出结论；

②利用已知条件，点的坐标的特征，平行四边形的判定与性质，旋转的性质，全等三角形的判定与性质求得 $FH = OD = 2\sqrt{3}$ ， $\angle GOD = \angle GFH = 90^\circ$ 和 GH 的长，利用分类讨论的思想方法分三种情形讨论解答利用旋转的性质，直角三角形的边角关系定理，勾股定理求得相应线段的长度即可得出结论；

解：（1）$\because$ 二次函数 $y = \dfrac{1}{3}x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0,2)$， 与 x 轴的交点为点 $B(\sqrt{3},0)$，

$\therefore \begin{cases} c = 2 \\ 1 + \sqrt{3}b + 2 = 0 \end{cases}$,

解得：$\begin{cases} b = -\sqrt{3} \\ c = 2 \end{cases}$

$\therefore$此抛物线的解析式为$y=\frac{1}{3}x^2-\sqrt{3}x+2$

（2）①令$y=0$，则$\frac{1}{3}x^2-\sqrt{3}x+2=0$

解得：$x=\sqrt{3}$或$x=2\sqrt{3}$，

$\therefore C(2\sqrt{3},0)$

$\therefore OC=2\sqrt{3}$．

$\because OE=a, OG=2OE, OD=\sqrt{3}OE$，

$\therefore OG=2a, OD=\sqrt{3}a$

$\because$四边形$ODFE$为矩形，

$\therefore EF=OD=\sqrt{3}a, FD=OE=a$

$\therefore E(0,a), D(\sqrt{3}a,0), F(\sqrt{3}a,a), G(0,2a)$

$\therefore CD=OC-OD=2\sqrt{3}-\sqrt{3}a$

Ⅰ·当$\triangle GOD\backsim\triangle FDC$时，

$\therefore \frac{OG}{OD}=\frac{FD}{CD}$

$\therefore \frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{a}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}a}$

$\therefore a=\frac{4}{3}$

Ⅱ·当$\triangle GOD\backsim\triangle CDF$时，

$\therefore \frac{OG}{OD}=\frac{CD}{FD}$

$\therefore \frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{a}$

$\therefore a=\frac{6}{5}$

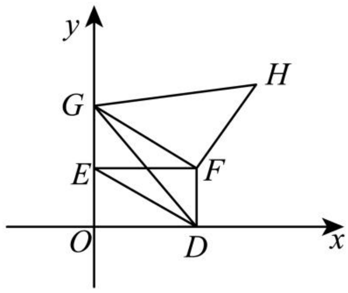
综上，当$\triangle GOD$与$\triangle FDC$相似时，a的值为$\frac{4}{3}$或$\frac{6}{5}$；

②$\because$点D与点C重合，

$\therefore OD=OC=2\sqrt{3}$

$\therefore OE=2, OG=2OE=4, EF=OD=2\sqrt{3}, DF=OE=2$

$\therefore EG=OE=2$



$\therefore EG=DF=2,$

$\because EG \parallel DF,$

$\therefore$ 四边形 $GEDF$ 为平行四边形，

$\therefore FG=DE=\sqrt{OE^2+OD^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$

$\therefore \angle GFE=30°,$

$\therefore \angle EGF=60°,$

$\because \angle DGH=60°,$

$\therefore \angle EGF=\angle DGH,$

$\therefore \angle OGD=\angle FGH.$

在 $\triangle GOD$ 和 $\triangle GFH$ 中，

$$\begin{cases} GO=GF=4 \\ \angle OGD=\angle FGH, \\ GD=GH \end{cases}$$

$\therefore \triangle GOD \cong \triangle GFH(SAS),$

$\therefore FH=OD=2\sqrt{3}, \angle GOD=\angle GFH=90°.$

$\therefore GH=\sqrt{GF^2+FH^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}.$

Ⅰ、当 $G'F$ 所在直线与 DE 垂直时，如图，

$\because \angle GFH=90°, GF \parallel DE,$

$\therefore \angle G'FH'=90°,$

$\therefore G$， F， H' 三点在一条直线上，

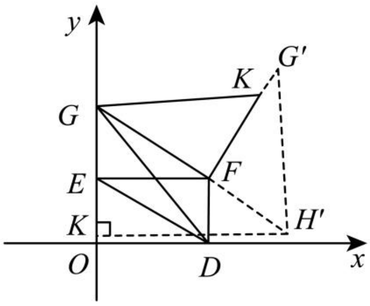
$\therefore GH'=GF+FH'=FG+FH=4+2\sqrt{3}.$

过点 H' 作 $H'K \perp y$ 轴于点 K，则 $H'K \parallel FE$

$\therefore \angle KH'G = \angle EFG = 30^\circ$,

$\therefore H'K = H'G \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times (4+2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}+3$,

$\therefore$此时点 H' 的横坐标为 $2\sqrt{3}+3$



Ⅱ·当$G'H'$所在直线与DE垂直时，如图，

$\because GF \parallel DE$，

$\therefore G'H' \perp GF$，

设GF的延长线交$G'H'$于点M，过点M作$MP \perp EF$，交EF的延长线于点P，过点H'作$H'N \perp MP$，交PM的延长线于点N，则$H'N \parallel PF \parallel x$轴，$\angle PFM = \angle EFG = 30^\circ$.

$\because S_{\triangle FG'H'} = \dfrac{1}{2} G'H' \cdot FM = \dfrac{1}{2} FH' \cdot FG'$，

$\therefore 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{7} FM$，

$\therefore FM = \dfrac{4\sqrt{21}}{7}$.

$\therefore FP = FM \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{4\sqrt{21}}{7} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore PE = PF + EF = 2\sqrt{3} + \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$.

$\because H'M = \sqrt{FH'^2 - FM^2} = \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore H'N = H'M \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore$此时点H'的横坐标为$PE - H'N = 2\sqrt{3} + \dfrac{6\sqrt{7}}{7} - \dfrac{3\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$；

Ⅲ·当FH'所在直线与DE垂直时，如图，

$\because \angle H'FG' = 90^\circ$，$GF \parallel DE$，

$\therefore \angle GFH' = 90^\circ$，

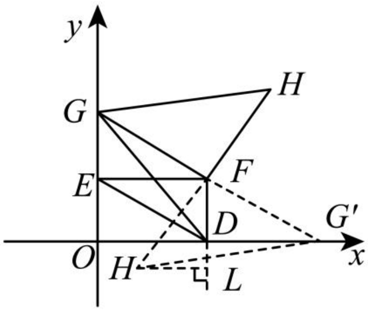
$\therefore H$， F， H'三点在一条直线上，则$\angle H'FD = 30°$，

过点H'作$H'L \perp DF$，交FD的延长线于点L，

$H'L = H'F \cdot \sin 30° = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$，

$\therefore$此时点H'的横坐标为$EF - H'L = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$．

综上，当$\triangle G'FH'$的边与线段DE垂直时，点H'的横坐标为$2\sqrt{3}+3$或$2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{7}}{7}$或$\sqrt{3}$．



【点拨】本题主要考查了二次函数的图象与性质，抛物线上点的坐标的特征，矩形的性质，相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，直角三角形的性质，勾股定理，直角三角形的边角关系定理，利用点的坐标表示出相应线段的长度和正确利用分类讨论的思想方法是解题的关键

24．（1）四边形$ABCD$是正方形，证明见分析；（2）$FH = AH + CF$；（3）$MC = \sqrt{2}BH$，证明见分析；

【分析】（1）证明$\triangle ADG \cong \triangle CDF$，可得$AD = CD$，从而可得结论；

（2）证明四边形$DGHF$是矩形，可得$\angle G = 90° = \angle DFC$，同理可得：$\angle ADG = \angle CDF$，证明$\triangle ADG \cong \triangle CDF$，$DG = DF$，$AG = CF$，证明四边形$DGHF$是正方形，可得$HG = HF$，从而可得结论；

（3）如图，连接AC，证明$\angle AHE = \angle ABC = 90°$，$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$，$\angle BAC = 45°$，$\triangle AHE \backsim \triangle CBE$，可得$\frac{AE}{CE} = \frac{HE}{BE}$，再证明$\triangle HEB \backsim \triangle AEC$，可得$\angle HBE = \angle MCA$，证明$\triangle AHB \backsim \triangle AMC$，可得$\frac{HB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，从而可得答案．

解：（1）$\because GD \perp DF$，$DF \perp CE$，$AG \perp DG$，

$\therefore \angle G = \angle DFC = 90°$，$\angle ADG + \angle ADF = 90°$，

$\because$矩形$ABCD$，

$\therefore \angle ADC = 90° = \angle ADF + \angle CDF$，

$\therefore \angle ADG = \angle CDF$，

$\because AG = CF$，

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF$，

$\therefore AD = CD$，

$\therefore$矩形 $ABCD$ 是正方形.

（2）$\because DF \perp CE$， $AH \perp CE$， $GD \perp DF$，

$\therefore \angle DFH = \angle H = \angle GDF = 90^{\circ}$，

$\therefore$四边形 $DGHF$ 是矩形，

$\therefore \angle G = 90^{\circ} = \angle DFC$，

同理可得：$\angle ADG = \angle CDF$，

$\because$正方形 $ABCD$，

$\therefore AD = CD$，

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF$，

$\therefore DG = DF$， $AG = CF$，

$\therefore$四边形 $DGHF$ 是正方形，

$\therefore HG = HF$，

$\therefore FH = HG = AH + AG = AH + CF$.

（3）如图，连接 AC，

$\because AH \perp CE$， 正方形 $ABCD$，

$\therefore \angle AHE = \angle ABC = 90^{\circ}$， $\dfrac{AC}{AB} = \sqrt{2}$， $\angle BAC = 45^{\circ}$，

$\because \angle AEH = \angle CEB$，

$\therefore \triangle AHE \backsim \triangle CBE$，

$\therefore \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{HE}{BE}$，

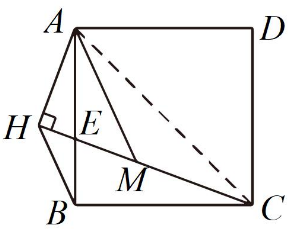


图3

$\because \angle BEH=\angle AEC$，

$\therefore \triangle HEB \backsim \triangle AEC$，

$\therefore \angle HBE=\angle MCA$，

$\because AH\perp CE, AH=HM$，

$\therefore \angle HAM=45^{\circ}=\angle BAC$，

$\therefore \angle HAE=\angle MAC$，

$\therefore \triangle AHB \backsim \triangle AMC$，

$\therefore \dfrac{HB}{MC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore MC=\sqrt{2}BH$.

【点拨】本题考查的是矩形的判定与性质，正方形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，作出合适的辅助线，构建相似三角形是解本题的关键.