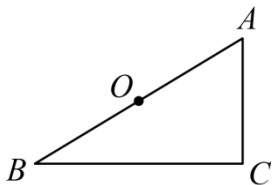


昆山提招数学模拟卷（五）----- 图形的相似

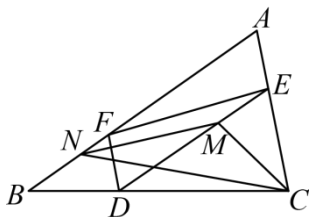
一、单选题

1. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AB = 4, AC = x, \angle BAC = \alpha$, O 为 AB 中点, 若点 D 为直线 BC 下方一点, 且 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 则下列结论: ①若 $\alpha = 45^\circ$, BC 与 OD 相交于 E , 则点 E 不一定是 $\triangle ABD$ 的重心; ②若 $\alpha = 60^\circ$, 则 AD 的最大值为 $2\sqrt{7}$; ③若 $\alpha = 60^\circ, \triangle ABC \sim \triangle CBD$, 则 OD 的长为 $2\sqrt{3}$; ④若 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, 则当 $x = 2$ 时, $AC + CD$ 取得最大值. 其中正确的为 ()



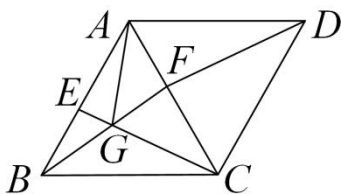
- A. ①④ B. ②③ C. ①②④ D. ①③④

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的点 (不与点 B, C 重合). 过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 AC 于点 E ; 过点 D 作 $DF \parallel AC$ 交 AB 于点 F . N 是线段 BF 上的点, $BN = 2NF$; M 是线段 DE 上的点, $DM = 2ME$. 若已知 $\triangle CMN$ 的面积, 则一定能求出 ()



- A. $\triangle AFE$ 的面积 B. $\triangle BDF$ 的面积 C. $\triangle BCN$ 的面积 D. $\triangle DCE$ 的面积

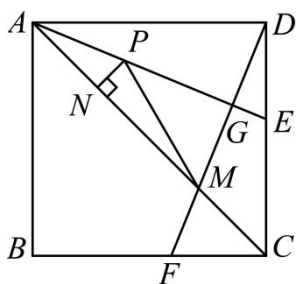
3. 如图, 在边长为 1 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 动点 E 在 AB 边上 (与点 A, B 均不重合), 点 F 在对角线 AC 上, CE 与 BF 相交于点 G , 连接 AG, DF , 若 $AF = BE$, 则下列结论错误的是 ()



- A. $DF = CE$ B. $\angle BGC = 120^\circ$
 C. $AF^2 = EG \cdot EC$ D. AG 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

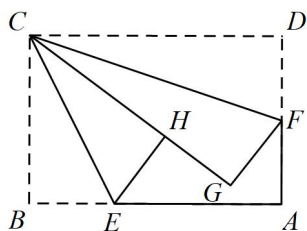
4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E, F 分别在边 DC, BC 上，且 $BF = CE$ ， AE 平分 $\angle CAD$ ，连接 DF ，分别交 AE, AC 于点 G, M ， P 是线段 AG 上的一个动点，过点 P 作 $PN \perp AC$ 垂足为 N ，连接 PM ，有下列四个结论：① AE 垂直平分 DM ；② $PM + PN$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$ ；③ $CF^2 = GE \cdot AE$ ；④

$S_{\triangle ADM} = 6\sqrt{2}$ ．其中正确的是（ ）



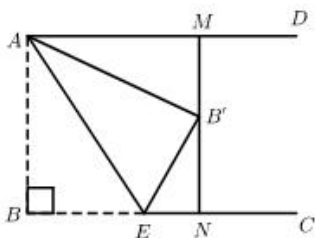
- A. ①② B. ②③④ C. ①③④ D. ①③

5. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在矩形的边 AB, AD 上，将矩形纸片沿 CE, CF 折叠，点 B 落在 H 处，点 D 落在 G 处，点 C, H, G 恰好同一直线上，若 $AB = 6, AD = 4, BE = 2$ ，则 DF 的长是（ ）



- A. 2 B. $\frac{7}{4}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. 3

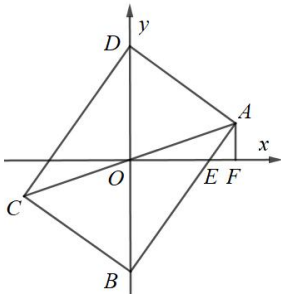
6. 如图，已知 $AD \parallel BC, AB \perp BC, AB = 3$ ，点 E 为射线 BC 上一个动点，连接 AE ，将 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，点 B 落在点 B' 处，过点 B' 作 AD 的垂线，分别交 AD, BC 于 M, N 两点，当 B' 为线段 MN 的三等分点时， BE 的长为（ ）



- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ C. $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 或 $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

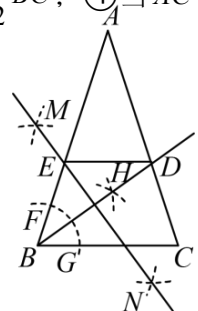
7. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 在第一象限， B, D 分别在 y 轴上， AB 交 x 轴于点 E ， $AF \perp x$ 轴，垂足为 F 。若 $OE=3$ ， $EF=1$ 。以下结论正确的个数是（ ）

- ① $OA=3AF$ ；② AE 平分 $\angle OAF$ ；③ 点 C 的坐标为 $(-4, -\sqrt{2})$ ；④ $BD=6\sqrt{3}$ ；⑤ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $24\sqrt{2}$ 。



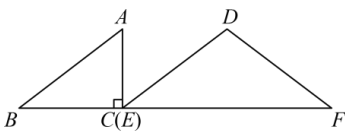
- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

8. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB=AC$ ， $\angle A=36^\circ$ 。以点 B 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 F ，交 BC 于点 G ，分别以点 F 和点 G 为圆心，大于 $\frac{1}{2}FG$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 H ，作射线 BH 交 AC 于点 D ；分别以点 B 和点 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M, N 两点，作直线 MN 交 AB 于点 E ，连接 DE 。下列四个结论：① $\angle AED = \angle ABC$ ；② $BC = AE$ ；③ $ED = \frac{1}{2}BC$ ；④ 当 $AC=2$ 时， $AD = \sqrt{5} - 1$ 。其中正确结论的个数是（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

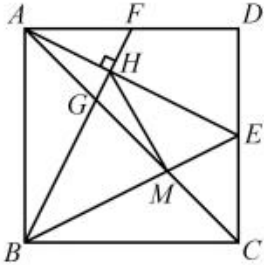
9. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ，在 $\triangle DEF$ 中， $DE=DF=5$ ， $EF=8$ ， BC 与 EF 在同一条直线上，点 C 与点 E 重合。 $\triangle ABC$ 以每秒 1 个单位长度的速度沿线段 EF 所在直线向右匀速运动，当点 B 运动到点 F 时， $\triangle ABC$ 停止运动。设运动时间为 t 秒， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 重叠部分的面积为 S ，则下列图象能大致反映 S 与 t 之间函数关系的是（ ）



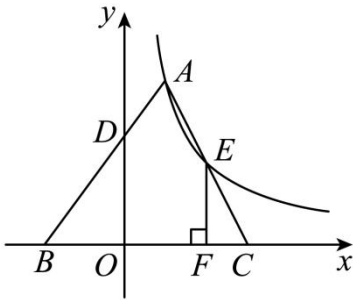
- A. B. C. D.

二、填空题

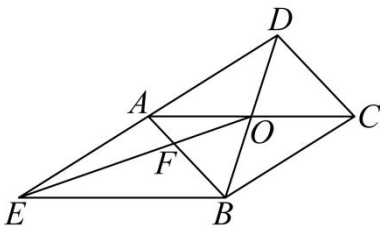
10. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{5}$ ，点 E 是 CD 的中点， BE 与 AC 交于点 M ， F 是 AD 上一点，连接 BF 分别交 AC ， AE 于点 G ， H ，且 $BF \perp AE$ ，连接 MH ，则 $AH =$ _____， $MH =$ _____.



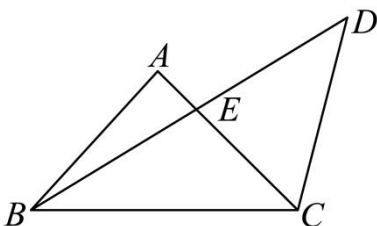
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BA = BC$ ，顶点 C ， B 分别在 x 轴的正、负半轴上，点 A 在第一象限，经过点 A 的反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交 AC 于点 E ，过点 E 作 $EF \perp x$ 轴，垂足为点 F 。若点 E 为 AC 的中点， $BD = 2AD$ ， $BF - CF = 3$ ，则 k 的值为 _____.



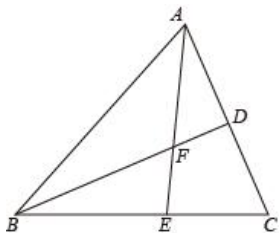
12. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，过点 B 作 $BE \parallel AC$ ，交 DA 的延长线于点 E ，连接 OE ，交 AB 于点 F ，则四边形 $BCOF$ 的面积与 $\triangle AEF$ 的面积比值为 _____.



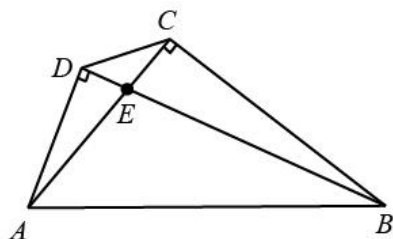
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，将 AC 绕着点 C 按顺时针旋转 60° 得到 CD ，连接 BD 交 AC 于在 E ，则 $\frac{AE}{ED} =$ _____.



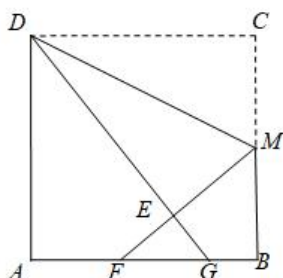
14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AC 的中点， $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 交 BD 于点 F ，若 $BF:FD=3:1$ ， $AB+BE=3\sqrt{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.



15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 E ， $AC=BC=6\text{cm}$ ， $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ 。若 $BE=2AD$ ，则 $\triangle ABE$ 的面积是_____ cm^2 ， $\angle AEB=$ _____度.



16. 如图，折叠边长为 4cm 的正方形纸片 $ABCD$ ，折痕是 DM ，点 C 落在点 E 处，分别延长 ME 、 DE 交 AB 于点 F 、 G ，若点 M 是 BC 边的中点，则 $FG=$ _____ cm .

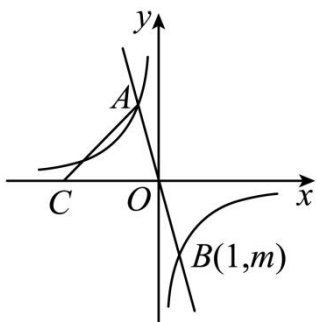


三、解答题

17. 已知抛物线 $y=-x^2+2x+8$ 与 x 轴交于点 A 、 B （其中 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C .

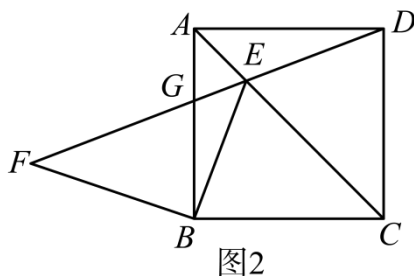
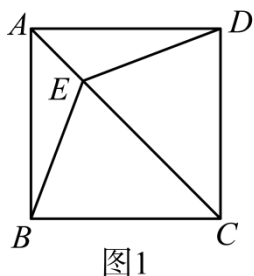
- (1) 求点 B 、 C 的坐标；
- (2) 设点 C' 与点 C 关于该抛物线的对称轴对称在 y 轴上是否存在点 P ，使 $\triangle PCC'$ 与 $\triangle POB$ 相似且 PC 与 PO 是对应边？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

18. 如图，正比例函数 $y = -3x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象交于 $A, B(1, m)$ 两点，点 C 在 x 轴负半轴上， $\angle ACO = 45^\circ$.



- (1) $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $k = \underline{\hspace{2cm}}$, 点 C 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 点 P 在 x 轴上，若以 B, O, P 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似，求点 P 的坐标.

19. 已知正方形 $ABCD$, E 是对角线 AC 上一点.



- (1) 如图 1, 连接 BE, DE . 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ADE$;
- (2) 如图 2, F 是 DE 延长线上一点, DF 交 AB 于点 G , $BF \perp BE$. 判断 $\triangle FBG$ 的形状并说明理由;
- (3) 在第 (2) 题的条件下, $BE = BF = 2$. 求 $\frac{AE}{AB}$ 的值.

20. 综合与实践

【思考尝试】

(1) 数学活动课上, 老师出示了一个问题: 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $DF \perp CE$ 于点 F , $GD \perp DF$, $AG \perp DG$, $AG = CF$. 试猜想四边形 $ABCD$ 的形状, 并说明理由;

【实践探究】

(2) 小睿受此问题启发, 逆向思考并提出新的问题: 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $DF \perp CE$ 于点 F , $AH \perp CE$ 于点 H , $GD \perp DF$ 交 AH 于点 G , 可以用等式表示线段 FH , AH , CF 的数量关系, 请你思考并解答这个问题;

【拓展迁移】

(3) 小博深入研究小睿提出的这个问题, 发现并提出新的探究点: 如图 3, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $AH \perp CE$ 于点 H , 点 M 在 CH 上, 且 $AH = HM$, 连接 AM , BH , 可以用等式表示线段 CM , BH 的数量关系, 请你思考并解答这个问题.

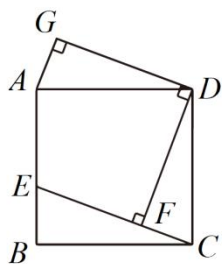


图1

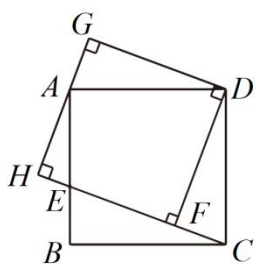


图2

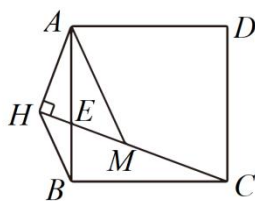


图3

答案与解析

1. A

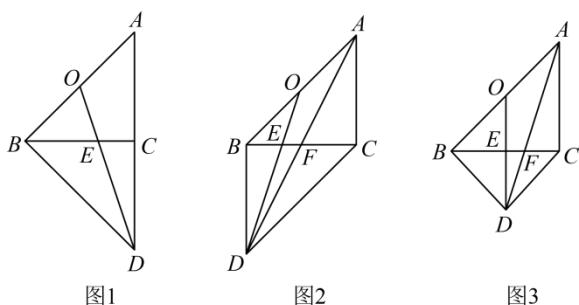
【分析】①有3种情况，分别画出图形，得出 $\triangle ABD$ 的重心，即可求解；当 $\alpha = 60^\circ$ ， $BD \perp BC$ 时， AD 取得最大值，进而根据已知数据，结合勾股定理，求得 AD 的长，即可求解；③如图5，若 $\alpha = 60^\circ$ ， $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，根据相似三角形的性质求得 $CD = \sqrt{3}$ ， $GE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $CF = \frac{3}{2}$ ，进而求得 OD ，即可求解；④如图6，根据相似三角形的性质得出 $CD = \frac{1}{4}BC^2$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC^2 = 16 - x^2$ ，根据二次函数的性质，即可求 $AC + CD$ 取得最大值时， $x = 2$ 。

解：①有3种情况，如图1， BC 和 OD 都是中线，点 E 是重心；

如图2，四边形 $ABDC$ 是平行四边形， F 是 AD 中点，点 E 是重心；

如图3，点 F 不是 AD 中点，所以点 E 不是重心；

①正确

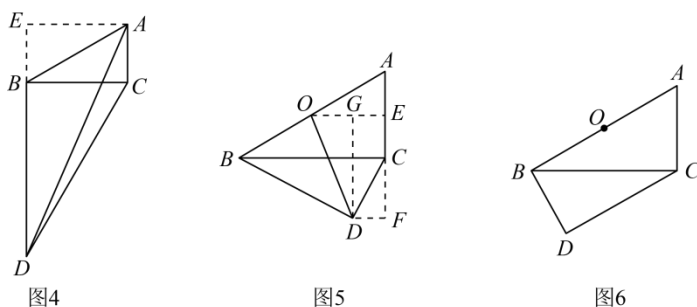
②当 $\alpha = 60^\circ$ ，如图4时 AD 最大， $AB = 4$ ，

$$\therefore AC = BE = 2, BC = AE = 2\sqrt{3}, BD = \sqrt{3}BC = 6,$$

$$\therefore DE = 8,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{19} \neq 2\sqrt{7},$$

②错误；

③如图5，若 $\alpha = 60^\circ$ ， $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ, \angle CDB = 90^\circ, AB = 4, AC = 2, BC = 2\sqrt{3}, OE = \sqrt{3}, CE = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{3}, GE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}, CF = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EF = DG = \frac{5}{2}, OG = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OD = \sqrt{7} \neq 2\sqrt{3},$$

\therefore ③ 错误;

④ 如图 6, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$,

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{即 } CD = \frac{1}{4}BC^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC^2 = 16 - x^2$,

$$\therefore CD = \frac{1}{4}(16 - x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + 4,$$

$$\therefore AC + CD = x - \frac{1}{4}x^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 5,$$

当 $x = 2$ 时, $AC + CD$ 最大为 5,

\therefore ④ 正确.

故选: A.

【点拨】 本题考查了三角形重心的定义, 勾股定理, 相似三角形的性质, 二次函数的性质, 分类讨论, 画出图形是解题的关键.

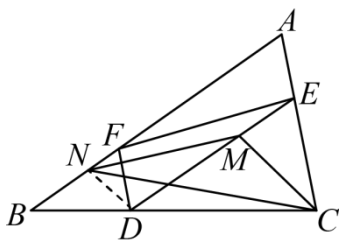
2. D

【分析】 如图所示, 连接 ND , 证明 $\triangle FBD \sim \triangle EDC$, 得出 $\frac{FB}{ED} = \frac{FD}{EC}$, 由已知得出 $\frac{NF}{ME} = \frac{BF}{DE}$, 则

$\frac{FD}{EC} = \frac{NF}{ME}$, 又 $\angle NFD = \angle MEC$, 则 $\triangle NFD \sim \triangle MEC$, 进而得出 $\angle MCD = \angle NDB$, 可得 $MC \parallel ND$, 结合题

意得出 $S_{\triangle EMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle MNC}$, 即可求解.

解: 如图所示, 连接 ND ,



$$\because DE \parallel AB, DF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle FDB, \angle FBD = \angle EDC, \angle BFD = \angle A, \angle A = \angle DEC.$$

$$\therefore \triangle FBD \sim \triangle EDC, \angle NFD = \angle MEC.$$

$$\therefore \frac{FB}{ED} = \frac{FD}{EC}.$$

$$\because DM = 2ME, BN = 2NF,$$

$$\therefore NF = \frac{1}{3}BF, ME = \frac{1}{3}DE$$

$$\therefore \frac{NF}{ME} = \frac{BF}{DE}.$$

$$\therefore \frac{FD}{EC} = \frac{NF}{ME}.$$

$$\text{又} \because \angle NFD = \angle MEC,$$

$$\therefore \triangle NFD \sim \triangle MEC.$$

$$\therefore \angle ECM = \angle FDN.$$

$$\because \angle FDB = \angle ECD$$

$$\therefore \angle MCD = \angle NDB.$$

$$\therefore MC \parallel ND.$$

$$\therefore S_{\triangle MNC} = S_{\triangle MDC}.$$

$$\because DM = 2ME,$$

$$\therefore S_{\triangle EMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle MNC}.$$

$$\therefore S_{\triangle DCE} = S_{\triangle EMC} + S_{\triangle DMC},$$

$$\therefore S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2}S_{\triangle MNC} + S_{\triangle MNC} = \frac{3}{2}S_{\triangle MNC}.$$

故选：D.

【点拨】本题考查了相似三角形的知识，解题的关键是掌握相似三角形的性质与判定，平行线的判定和性质，等面积转换.

3. D

【分析】先证明 $\triangle BAF \cong \triangle DAF \cong \triangle CBE$ ， $\triangle ABC$ 是等边三角形，得 $DF=CE$ ，判断A项答案正确，由 $\angle GCB + \angle GBC = 60^\circ$ ，得 $\angle BGC = 120^\circ$ ，判断B项答案正确，证 $\triangle BEG \sim \triangle CEB$ 得 $\frac{BE}{GE} = \frac{CE}{BE}$ ，即可判断C项答案正确，由 $\angle BGC = 120^\circ$ ， $BC=1$ ，得点G在以线段BC为弦的弧BC上，易得当点G在等边 $\triangle ABC$ 的内心处时，AG取最小值，由勾股定理求得 $AG = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即可判断D项错误。

解： \because 四边形ABCD是菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore AB=AD=BC=CD$ ， $\angle BAC = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle ABC) = 60^\circ = \angle ABC$ ，

$\therefore \triangle BAF \cong \triangle DAF \cong \triangle CBE$ ， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore DF=CE$ ，故A项答案正确，

$\angle ABF = \angle BCE$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ABF + \angle CBF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle GCB + \angle GBC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BGC = 180^\circ - (\angle GCB + \angle GBC) = 120^\circ$ ，故B项答案正确，

$\therefore \angle ABF = \angle BCE$ ， $\angle BEG = \angle CEB$ ，

$\therefore \triangle BEG \sim \triangle CEB$ ，

$\therefore \frac{BE}{GE} = \frac{CE}{BE}$ ，

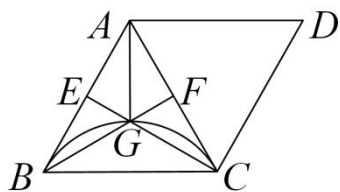
$\therefore BE^2 = GE \cdot CE$ ，

$\therefore AF = BE$ ，

$\therefore AF^2 = GE \cdot CE$ ，故C项答案正确，

$\therefore \angle BGC = 120^\circ$ ， $BC=1$ ，点G在以线段BC为弦的弧BC上，

\therefore 当点G在等边 $\triangle ABC$ 的内心处时，AG取最小值，如下图，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $BC=1$,

$\therefore BF \perp AC$, $AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$, $\angle GAF = 30^\circ$,

$\therefore AG = 2GF$, $AG^2 = GF^2 + AF^2$,

$\therefore AG^2 = \left(\frac{1}{2}AG\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, 解得 $AG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 项错误,

故应选: D

【点拨】 本题主要考查了菱形的基本性质、等边三角形的判定及性质、圆周角定理, 熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

4. D

【分析】 根据正方形的性质和三角形全等即可证明 $\angle DAE = \angle FDC$, 通过等量转化即可求证 $AG \perp DM$, 利用角平分线的性质和公共边即可证明 $\triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA), 从而推出 ① 的结论; 利用 ① 中的部分结果可证明 $\triangle ADE \sim \triangle DGE$ 推出 $DE^2 = GE \cdot AE$, 通过等量代换可推出 ③ 的结论; 利用 ① 中的部分结果和勾股定理推出 AM 和 CM 长度, 最后通过面积法即可求证 ④ 的结论不对; 结合 ① 中的结论和 ③ 的结论可求出 $PM + PN$ 的最小值, 从而证明 ② 不对.

解: $\because ABCD$ 为正方形,

$\therefore BC = CD = AD$, $\angle ADE = \angle DCF = 90^\circ$,

$\therefore BF = CE$,

$\therefore DE = FC$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$ (SAS).

$\therefore \angle DAE = \angle FDC$,

$\because \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADG + \angle FDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADG + \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AGD = \angle AGM = 90^\circ$.

$\because AE$ 平分 $\angle CAD$,

$\therefore \angle DAG = \angle MAG$.

$\because AG = AG$,

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA).

$\therefore DG = GM$,

$\because \angle AGD = \angle AGM = 90^\circ$,

$\therefore AE$ 垂直平分 DM ,

故①正确.

由①可知, $\angle ADE = \angle DGE = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle GDE$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DGE$,

$$\therefore \frac{DE}{GE} = \frac{AE}{DE},$$

$\therefore DE^2 = GE \cdot AE$,

由①可知 $DE = CF$,

$\therefore CF^2 = GE \cdot AE$.

故③正确.

$\because ABCD$ 为正方形, 且边长为 4,

$\therefore AB = BC = AD = 4$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}$.

由①可知, $\triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA),

$\therefore AM = AD = 4$,

$\therefore CM = AC - AM = 4\sqrt{2} - 4$.

由图可知, $\triangle DMC$ 和 $\triangle ADM$ 等高, 设高为 h ,

$\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle DMC}$,

$$\therefore \frac{4 \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} - \frac{(4\sqrt{2} - 4) \cdot h}{2},$$

$\therefore h = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

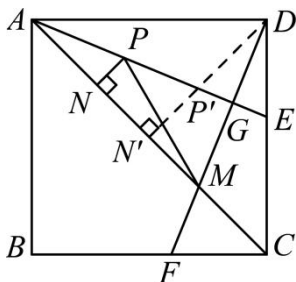
故④不正确.

由①可知, $\triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA),

$\therefore DG = GM$,

$\therefore M$ 关于线段 AG 的对称点为 D , 过点 D 作 $DN' \perp AC$, 交 AC 于 N' , 交 AE 于 P' ,

$\therefore PM + PN$ 最小即为 DN' , 如图所示,



由④可知 $\triangle ADM$ 的高 $h = 2\sqrt{2}$ 即为图中的 DN' ,

$\therefore DN' = 2\sqrt{2}$.

故②不正确.

综上所述, 正确的是①③.

故选: D.

【点拨】 本题考查的是正方形的综合题, 涉及到三角形相似, 最短路径, 三角形全等, 三角形面积法, 解题的关键在于是否能正确找出最短路径以及运用相关知识点.

5. A

【分析】 构造如图所示的正方形 $CMPD$, 然后根据相似三角形的判定和性质解直角三角形 FNP 即可.

解: 如图, 延长 CE , FG 交于点 N , 过点 N 作 $l \parallel AB$, 延长 CB, DA 交 l 于 M, P ,

$\therefore \angle CMN = \angle DPN = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $CMPD$ 是矩形,

根据折叠, $\angle MCN = \angle GCN$, $CD = CG$, $DF = FG$,

$\therefore \angle CMN = \angle CGN = 90^\circ$, $CN = CN$,

$\therefore Rt\triangle MNC \cong Rt\triangle GNC$,

$\therefore CM = CG = CD = 6$, $MN = NG$

\therefore 四边形 $CMPD$ 为正方形,

$\therefore BE \parallel MN$

$\therefore \triangle CBE \sim \triangle CMN$,

$$\therefore \frac{BE}{MN} = \frac{CB}{CM} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

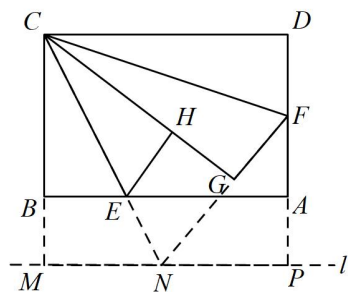
$\therefore BE = 2, \therefore MN = 3,$

$\therefore NP = 3,$

设 $DF = x$, 则 $AF = 4 - x$,

在 $Rt\triangle PNF$ 中, 由 $FP^2 + NP^2 = NF^2$ 可得 $(4 - x + 2)^2 + 3^2 = (3 + x)^2$

解得 $x = 2$;



故选 A.

【点拨】本题考查了折叠问题，正方形的性质与判定，矩形的性质，平行线的性质，全等三角形的性质和判定，相似三角形，勾股定理等知识点的综合运用，难度较大。作出合适的辅助线是解题的关键。

6. D

【分析】因为点 B' 为线段 MN 的三等分点，没有指明线段 $B'M$ 的占比情况，所以需要分两种情况讨论：

① $B'M = \frac{1}{3}MN$ ；② $B'M = \frac{2}{3}MN$ 。然后由一线三垂直模型可证 $\triangle AMB' \sim \triangle B'NE$ ，再根据相似三角形的性质求得 EN 的值，最后由 $BE = BN - EN$ 即可求得 BE 的长。

解：当点 B' 为线段 MN 的三等分点时，需要分两种情况讨论：

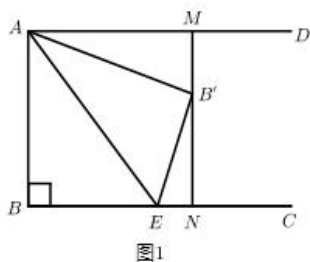


图1

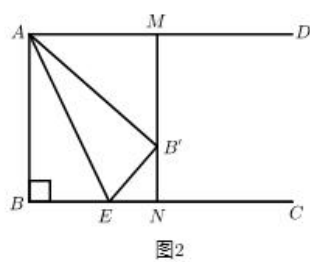


图2

①如图 1, 当 $B'M = \frac{1}{3}MN$ 时,

$\because AD \parallel BC, AB \perp BC, MN \perp BC,$

\therefore 四边形 $ABNM$ 为矩形,

$$\therefore B'M = \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3}AB = 1, \quad B'N = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}AB = 2, \quad BN = AM.$$

由折叠的性质可得 $A'B = AB = 3, \angle AB'E = \angle ABC = 90^\circ.$

$$\text{在 } Rt\triangle AB'M \text{ 中, } AM = \sqrt{AB'^2 - B'M^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore \angle AB'M + \angle MAB' = 90^\circ, \quad \angle AB'M + \angle EB'N = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EB'N = \angle MAB',$$

$$\therefore \triangle B'NE \sim \triangle AMB',$$

$$\therefore \frac{EN}{B'M} = \frac{B'N}{AM}, \text{ 即 } \frac{EN}{1} = \frac{2}{2\sqrt{2}}, \text{ 解得 } EN = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE = BN - EN = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

② 如图 2, 当 $B'M = \frac{2}{3}MN$ 时,

$\because AD \parallel BC, AB \perp BC, MN \perp BC,$

\therefore 四边形 $ABNM$ 为矩形,

$$\therefore B'M = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}AB = 2, \quad B'N = \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3}AB = 1, \quad BN = AM.$$

由折叠的性质可得 $AB' = AB = 3, \angle AB'E = \angle ABC = 90^\circ.$

$$\text{在 } Rt\triangle AB'M \text{ 中, } AM = \sqrt{AB'^2 - B'M^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \angle AB'M + \angle MAB' = 90^\circ, \quad \angle AB'M + \angle EB'N = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EB'N = \angle MAB',$$

$$\therefore \triangle B'NE \sim \triangle AMB',$$

$$\therefore \frac{EN}{B'M} = \frac{B'N}{AM}, \text{ 即 } \frac{EN}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 解得 } EN = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BE = BN - EN = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

综上所述, BE 的长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{5}.$

故选：D.

【点拨】本题考查了矩形的判定，勾股定理，相似三角形的判定和性质，由 B' 为线段 MN 的三等分点，分两种情况讨论线段 $B'M$ 的占比情况，以及利用 K 型相似进行相关计算是解决此题的关键.

7. C

【分析】根据相似三角形的判定得出 $\triangle EOB \sim \triangle EFA$ ，利用相似三角形的性质及已知 OE ， EF 的值即可判断结论①；由①分析得出的条件，结合相似三角形、矩形的性质（对角线）即可判断结论②；根据直角坐标系上点的表示及结论① $OA = 3AF$ ，利用勾股定理建立等式求解可得点 A 坐标，再根据关于原点对称的点的坐标得出点 D 坐标，即可判断结论③；由③可知 $AF = \sqrt{2}$ ，进而得出 OA 的值，根据矩形的性质即可判断结论④；根据矩形的性质及④可知 $BD = 6\sqrt{2}$ ，利用三角形的面积公式求解即可判断结论⑤.

解：∵矩形 $ABCD$ 的顶点 A 在第一象限， $AF \perp x$ 轴，垂足为 F ，

$$\therefore \angle EOB = \angle EFA = 90^\circ, AC = BD, OD = OA = OB = OC.$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEO,$$

$$\therefore \triangle EOB \sim \triangle EFA.$$

$$\therefore OE = 3, EF = 1,$$

$$\therefore \frac{EF}{EO} = \frac{AF}{OB} = \frac{AF}{OA} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } OA = 3AF. \text{ (①符合题意)}$$

$$\therefore OA = OB, \triangle EOB \sim \triangle EFA,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA, \angle EAF = \angle EBO.$$

$$\therefore \angle OAB = \angle EAF.$$

$$\therefore AE \text{ 平分 } \angle OAF. \text{ (②符合题意)}$$

$$\therefore OF = OE + EF = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的横坐标为 } 4.$$

$$\therefore OA = 3AF,$$

$$\therefore 9AF^2 - AF^2 = OF^2, \text{ 即 } 8AF^2 = 16.$$

$$\therefore AF = \sqrt{2}, \text{ 点 } A \text{ 的纵坐标为 } \sqrt{2}.$$

$$\therefore A(4, \sqrt{2}).$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 与点 } C \text{ 关于原点对称,}$$

$$\therefore C(-4, -\sqrt{2}). \text{ (③符合题意)}$$

$$\therefore OA = 3AF = 3\sqrt{2},$$

$\therefore BD = OD + OB = 2OA = 6\sqrt{2}$. (④不符合题意)

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BAD} = 2S_{\triangle BAD}$,

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4 = 24\sqrt{2}$. (⑤符合题意)

\therefore 结论正确的共有 4 个符合题意.

故选: C.

【点拨】 本题考查矩形与坐标的综合应用. 涉及矩形的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角坐标系上点的表示, 关于原点对称的点的坐标, 三角形的面积公式等知识点. 矩形的对角线相等且互相平分; 两角分别相等的两个三角形相似; 相似三角形对应角相等, 对应边成比例; 两个点关于原点对称时, 它们的坐标符号相反, 即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$. 灵活运用相关知识点, 通过已知条件建立等式关系是解本题的关键.

8.C

【分析】 根据等腰三角形两底角相等与 $\angle A = 36^\circ$, 得到 $\angle ABC = \angle C = 72^\circ$, 根据角平分线定义得到

$\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$, 根据线段垂直平分线性质的性质得到 $EB = ED$, 得到 $\angle EBD = \angle EDB$, 推出

$\angle EDB = \angle CBD$, 得到 $DE \parallel BC$, 推出 $\angle AED = \angle ABC$, ①正确; 根据等角对等边得到 $AD = AE$,

$AD = BD$, 根据三角形外角性质得到 $\angle BDC = 72^\circ = \angle C$, 得到 $BC = BD$, 推出 $BC = AE$, ②正确; 根据

$\triangle AED \sim \triangle ABC$, 得到 $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD+DC}$, 推出 $ED = \frac{\sqrt{5}-1}{2} BC$, ③错误; 根据 $AC = 2$ 时,

$CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AD$, 得到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} AD = 2 - AD$, 推出 $AD = \sqrt{5}-1$, ④正确.

解: $\because \triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ$,

由作图知, BD 平分 $\angle ABC$, MN 垂直平分 BD ,

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 36^\circ$, $EB = ED$,

$\therefore \angle EBD = \angle EDB$,

$\therefore \angle EDB = \angle CBD$,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\therefore \angle AED = \angle ABC$, ①正确;

$\angle ADE = \angle C$,

$$\therefore \angle AED = \angle ADE,$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C,$$

$$\therefore BC = BD,$$

$$\therefore BC = AE, \text{ ②正确};$$

$$\text{设 } ED = x, \quad BC = a,$$

$$\text{则 } AD = a, \quad BE = x,$$

$$\therefore CD = BE = x,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD+DC},$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{a}{a+x},$$

$$\therefore x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$\text{即 } ED = \frac{\sqrt{5}-1}{2}BC, \text{ ③错误};$$

$$\text{当 } AC = 2 \text{ 时, } CD = 2 - AD,$$

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AD,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}-1}{2}AD = 2 - AD,$$

$$\therefore AD = \sqrt{5}-1, \text{ ④正确}$$

∴正确的有①②④，共3个.

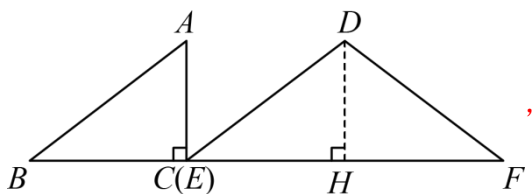
故选：C.

【点拨】本题主要考查了等腰三角形，相似三角形，解决问题的关键是熟练掌握等腰三角形判定和性质，相似三角形的判定和性质，角平分线的定义和线段垂直平分线的性质.

9. A

【分析】分 $0 \leq t < 4$ ， $4 \leq t < 8$ ， $8 \leq t < 12$ 三种情况，分别求出函数解析即可判断.

解：过点 D 作 $DH \perp CB$ 于 H ，



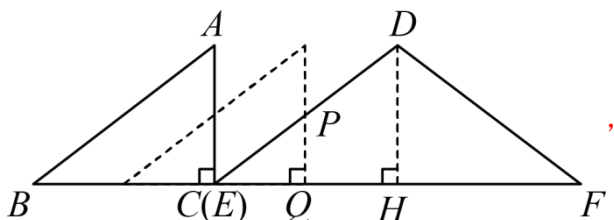
$$\therefore DE = DF = 5, \quad EF = 8,$$

$$\therefore EH = FH = \frac{1}{2}EF = 4,$$

$$\therefore DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = 3$$

当 $0 \leq t < 4$ 时，

如图，重叠部分为 $\triangle EPQ$ ，此时 $EQ = t$ ， $PQ \parallel DH$ ，



$$\therefore \triangle EPQ \sim \triangle EDH,$$

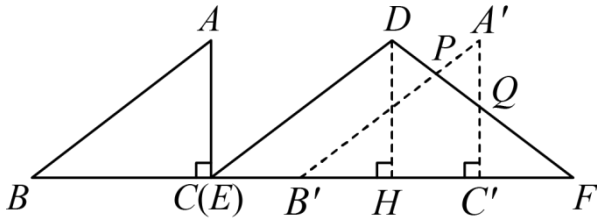
$$\therefore \frac{PQ}{DH} = \frac{EQ}{EH}, \quad \text{即} \quad \frac{PQ}{3} = \frac{t}{4},$$

$$\therefore PQ = \frac{3}{4}t$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}t \times \frac{3}{4}t = \frac{3}{8}t^2;$$

当 $4 \leq t < 8$ 时，

如图，重叠部分为四边形 $PQC'B'$ ，此时 $BB' = CC' = t$ ， $PB' \parallel DE$ ，



$$\therefore B'F = BC + CF - BB' = 12 - t, \quad FC' = 8 - t,$$

$$\therefore PB' \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle PB'F \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PB'F}}{S_{\triangle DCF}} = \left(\frac{B'F}{CF}\right)^2,$$

$$\text{又 } S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PB'F}}{12} = \left(\frac{12-t}{8}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle PB'F} = \frac{3}{16}(12-t)^2,$$

$$\therefore DH \perp BC, \quad \angle A'B'C' = 90^\circ,$$

$$\therefore A'C' \parallel DH,$$

$$\therefore \triangle C'QF \sim \triangle HFD,$$

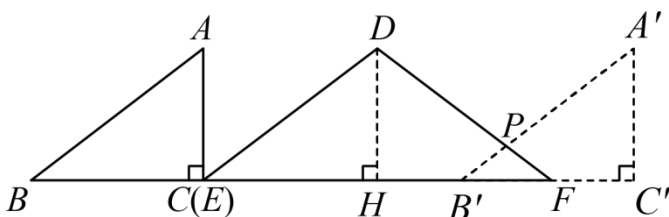
$$\therefore \frac{S_{\triangle C'QF}}{S_{\triangle HFD}} = \left(\frac{C'F}{HF}\right)^2, \quad \text{即 } \frac{S_{\triangle C'QF}}{\frac{1}{2} \times 4 \times 3} = \left(\frac{8-t}{4}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle C'QF} = \frac{3}{8}(8-t)^2,$$

$$\therefore S = S_{\triangle PB'F} - S_{\triangle C'QF} = \frac{3}{16}(12-t)^2 - \frac{3}{8}(8-t)^2 = -\frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{2}t + 3;$$

当 $8 \leq t < 12$ 时

如图，重叠部分为四边形 $\triangle PFB'$ ，此时 $BB' = CC' = t$ ， $PB' \parallel DE$ ，



$$\therefore B'F = BC + CF - BB' = 12 - t,$$

$$\therefore PB' \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle PB'F \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PB'F}}{S_{\triangle DCF}} = \left(\frac{B'F}{CF}\right)^2, \text{ 即 } \frac{S_{\triangle PB'F}}{12} = \left(\frac{12-t}{8}\right)^2$$

$$\therefore S = S_{\triangle PB'F} = \frac{3}{16}(12-t)^2,$$

$$\text{综上所述, } S = \begin{cases} \frac{3}{8}t^2 & (0 \leq t < 4) \\ -\frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{2}t + 3 & (4 \leq t < 8) \\ \frac{3}{16}(12-t)^2 & (8 \leq t < 12) \end{cases}$$

\therefore 符合题意的函数图象是选项 A.

故选: A.

【点拨】此题结合图像平移时面积的变化规律,考查二次函数相关知识,根据平移点的特点列出函数表达式是关键,有一定难度.

10. $2 \frac{2\sqrt{13}}{3}$

【分析】如图,证明 $\triangle AFB \cong \triangle DEA$, 得到 $AF = DE$, 勾股定理求出 BF 的长, 等积法求出 AH 的长, 证明 $\triangle AGF \sim \triangle CGB$, 相似比求出 AG 的长, 证明 $\triangle AMB \sim \triangle CME$, 求出 AM 的长, 证明 $\triangle AHG \sim \triangle ANM$, 求出 HN, MN 的长, 再利用勾股定理求出 MH 的长.

解: \because 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{5}$, 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore \angle BAD = \angle CDA = 90^\circ, AB = AD = CD = 2\sqrt{5}, DE = \frac{1}{2}CD = \sqrt{5}, AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}AD = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore BF \perp AH,$$

$$\therefore \angle AHF = 90^\circ = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAF = 90^\circ - \angle AFH,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA,$$

$$\therefore AF = DE = \sqrt{5},$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot AF = \frac{1}{2} BF \cdot AH,$$

$$\therefore 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5AH,$$

$$\therefore AH = 2;$$

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

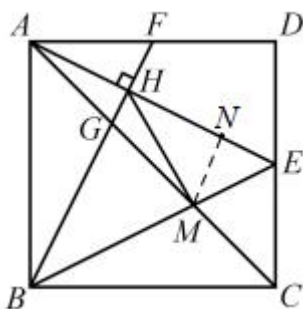
$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle CGB, \triangle AMB \sim \triangle CME,$$

$$\therefore \frac{AG}{CG} = \frac{AF}{BC} = \frac{1}{2}, \frac{AM}{CM} = \frac{AB}{CE} = 2,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{3} AC = \frac{2\sqrt{10}}{3}, AM = \frac{2}{3} AC = \frac{4\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore GH = \sqrt{AG^2 - AH^2} = \frac{2}{3},$$

故点 M 作 $MN \perp AE$ ，则： $GH \parallel MN$ ，



$$\therefore \triangle AHG \sim \triangle ANM,$$

$$\therefore \frac{AH}{AN} = \frac{GH}{MN} = \frac{AG}{AM} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AN = 2AH = 4, MN = 2GH = \frac{4}{3},$$

$$\therefore HN = 2,$$

$$\therefore MH = \sqrt{NM^2 + NH^2} = \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

故答案为： $2, \frac{2\sqrt{13}}{3}$ 。

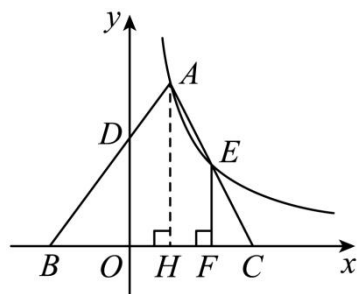
【点拨】本题考查正方形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，本题

的综合形较强，属于中考填空题中的压轴题。熟练掌握正方形的性质，证明三角形全等和相似，是解题的关键。

11. 4

【分析】过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H ，证明 $\triangle AHC \sim \triangle EFC$ ，得 $AH = 2EF, CF = HF$ ，再根据 $BF - CF = 3$ ，可得 $BH = 3$ ，再证明 $\triangle DOB \sim \triangle BHA$ ，得到 OB, OH 的长，设 $CF = HF = a$ ， $EF = b$ ，得到 A, E 的坐标，根据两点在同一反比例函数上，可解得 a 的值，从而可得 $BA = BC = 5$ ，再利用勾股定理得 $AH = 4$ ，从而求得 k 的值。

解：如图，过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H ，



$\because EF \perp x$ 轴，

$\therefore AH \parallel EF$ ，

$\therefore \angle HAC = \angle FEC$ ，

$\therefore \triangle AHC \sim \triangle EFC$ ，

$\because E$ 是 AC 的中点，

$$\therefore \frac{AC}{EC} = \frac{HC}{FC} = 2，$$

$\therefore HF = FC$ ，

$\because BF - FC = 3$ ，

$\therefore BF - FC = BF - HF = 3$ ，

即 $BH = 3$ ，

同理可得 $\triangle AHB \sim \triangle DOB$ ，

$\therefore BD = 2AD$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BH}{BO} = \frac{3}{2}，$$

$\therefore BO = 2, OH = BH - BO = 1$ ，

设 $FC = a, EF = b$ ，则 $HF = a$ ， $AH = 2b$ ，

$$\therefore A(1, 2b), E(1+a, b),$$

∵ A, E 都在反比例函数上,

$$\therefore 1 \times 2b = (1+a) \times b,$$

解得 $a = 1$,

$$\therefore BA = BC = BH + HF + FC = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 4$,

$$\therefore A(1, 4),$$

$$\therefore k = 1 \times 4 = 4,$$

故答案为: 4.

【点拨】本题考查了反比例函数的图像, 相似三角形的判定及性质, 勾股定理, 理解反比例函数图像上的点横坐标与纵坐标的乘积相同, 是解题的关键.

12. $\frac{5}{2}$

【分析】根据平行四边形 $ABCD$ 推出平行四边形 $AEBC$, 根据 $\triangle OAF$ 和 $\triangle EFB$ 相似, 进而求出各个三角形的面积比, 设 $S_{\triangle OAF} = x$, 表示出其他三角形面积, 进而作答.

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, OA = OC,$$

$$\text{又} \because BE \parallel AC,$$

∴ 四边形 $AEBC$ 是平行四边形,

$$AC = BE,$$

$$\therefore BE = 2OA,$$

$$\because BE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle EBF, \angle AOF = \angle BEF,$$

$$\therefore \triangle OAF \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle EBF}} = \left(\frac{OA}{BE}\right)^2 = \frac{1}{4}, \frac{OF}{EF} = \frac{OA}{BE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle EBF} = 4S_{\triangle OAF}, EF = 2OF,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle AOF}$$

同理 $S_{\triangle EBF} = 2S_{\triangle OBF}$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAB}$,

设 $S_{\triangle OAF} = x$, 则 $S_{\triangle EBF} = 4x$, $S_{\triangle AEF} = 2x$, $S_{\triangle OBF} = 2x$, $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOF} + S_{\triangle BOF} = x + 2x = 3x$

$\therefore S_{\text{四边形}BCOF} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle BOF} = 3x + 2x = 5x$

$\therefore \frac{S_{\text{四边形}BCOF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

故答案为: $\frac{5}{2}$

【点拨】本题考查平行四边形及三角形的相似, 相似比和面积比, 解题的关键是根据三角形的相似比表示出三角形的面积.

13. $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

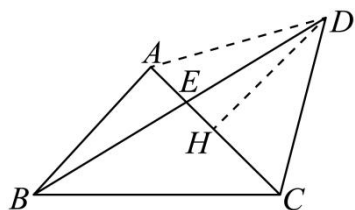
【分析】连接 AD , 证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形, 则 $AC = AD = CD$, $\angle ADC = \angle CAD = 60^\circ$, 设

$AC = AD = CD = a$, 则 $AB = AC = a$, 取 AC 的中点 H , 连接 DH , 求出 $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 设 $AE = x$, 则

$EH = \frac{1}{2}a - x$, 证明 $\triangle AEB \sim \triangle HED$, 得到 $\frac{AE}{HE} = \frac{AB}{DH}$, 解得 $x = (2 - \sqrt{3})a$, 即 $AE = (2 - \sqrt{3})a$, 再利用勾股

定理求出 $DE^2 = 3(2 - \sqrt{3})a^2$, 进一步即可得到答案.

解: 连接 AD ,



\therefore 将 AC 绕着点 C 按顺时针旋转 60° 得到 CD ,

$\therefore AC = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

$\therefore AC = AD = CD$, $\angle ADC = \angle CAD = 60^\circ$,

设 $AC = AD = CD = a$, 则 $AB = AC = a$,

取 AC 的中点 H , 连接 DH ,

$$\therefore AH = CH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a, \quad \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\therefore DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } EH = AH - AE = \frac{1}{2}a - x,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DHE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle HED,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle HED,$$

$$\therefore \frac{AE}{HE} = \frac{AB}{DH},$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a},$$

$$\text{解得 } x = (2 - \sqrt{3})a,$$

$$\text{即 } AE = (2 - \sqrt{3})a,$$

$$\therefore EH = AH - AE = \frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - (2 - \sqrt{3})a = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}a,$$

$$\therefore DE^2 = 3(2 - \sqrt{3})a^2,$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \sqrt{\frac{AE^2}{ED^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2 a^2}{3(2 - \sqrt{3})a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{24 - 12\sqrt{3}}{4}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{18 - 12\sqrt{3} + 6}{4}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}{4}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2}{4}}}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6},$$

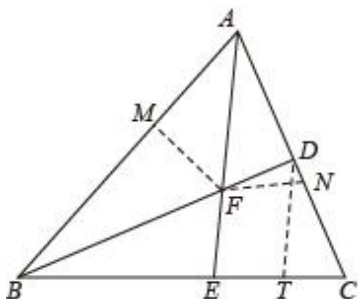
故答案为: $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$.

【点拨】此题考查了相似三角形的判定和性质、勾股定理、旋转的性质、等边三角形的判定和性质等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

14. $5\sqrt{3}$

【分析】如图，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M ， $FN \perp AC$ 于点 N ，过点 D 作 $DT \parallel AE$ 交 BC 于点 T 。证明 $AB = 3AD$ ，设 $AD = DC = a$ ，证明 $ET = CT$ ，设 $ET = CT = b$ ，则 $BE = 3b$ ，求出 $a + b$ ，可得结论.

解：如图，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M ， $FN \perp AC$ 于点 N ，过点 D 作 $DT \parallel AE$ 交 BC 于点 T 。



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$ ， $FM \perp AB$ ， $FN \perp AC$ ，

$\therefore FM = FN$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{BF}{DF} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot FM}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot FN} = 3,$$

$\therefore AB = 3AD$ ，

设 $AD = DC = a$ ，则 $AB = 3a$ ，

$\because AD = DC$ ， $DT \parallel AE$ ，

$\therefore ET = CT$ ，

$$\therefore \frac{BE}{ET} = \frac{BF}{DF} = 3,$$

设 $ET = CT = b$ ，则 $BE = 3b$ ，

$$\therefore AB + BE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore 3a + 3b = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore a + b = \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = AB + AC + BC = 5a + 5b = 5\sqrt{3},$$

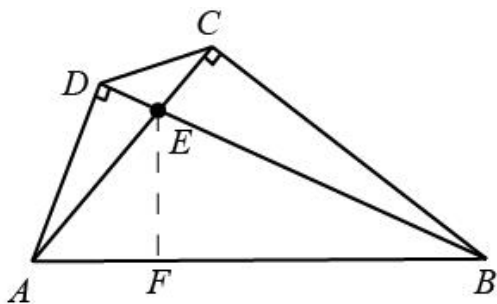
故答案为： $5\sqrt{3}$ 。

【点拨】本题考查平行线分线段成比例定理，角平分线的性质定理等知识，解题的关键是学会利用参数解决问题。

$$15. \quad 36 - 18\sqrt{2} / -18\sqrt{2} + 36 \quad 112.5$$

【分析】通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle BCE$ ，利用相似三角形的性质求出 $AE = \frac{m^2}{3}$ ， $CE = 6 - \frac{m^2}{3}$ ，再利用勾股定理求出其长度，即可求三角形 ABE 的面积，过点 E 作 $EF \perp AB$ ，垂足为 F ，证明 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，再求出 $AE = CE$ ，继而证明 $Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle BFE$ (HL)，可知 $\angle EBF = \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 22.5^\circ$ ，利用外角的性质即可求解。

解：



$$\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ, \angle AED = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BE},$$

$$\therefore BC = AC = 6, BE = 2AD,$$

设 $AD = m, BE = 2m$ ，

$$\therefore \frac{m}{6} = \frac{AE}{2m},$$

$$\therefore AE = \frac{m^2}{3},$$

$$\therefore CE = 6 - \frac{m^2}{3},$$

在 $Rt\triangle BCE$ 中, 由勾股定理得 $BC^2 + CE^2 = BE^2$,

$$\therefore 6^2 + \left(6 - \frac{m^2}{3}\right)^2 = (2m)^2,$$

解得 $m^2 = 36 - 18\sqrt{2}$ 或 $m^2 = 36 + 18\sqrt{2}$,

\therefore 对角线 AC , BD 相交于点 E ,

$$\therefore m^2 = 36 - 18\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = 12 - 6\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = 6\sqrt{2} - 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2} \times (12 - 6\sqrt{2}) \times 6 = 36 - 18\sqrt{2} \text{ cm}^2,$$

过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, AC = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ = \angle AEF,$$

$$\therefore FE = AF = \frac{\sqrt{2}}{2} AE = 6\sqrt{2} - 6 = CE,$$

$$\therefore BE = BE,$$

$$\therefore Rt\triangle BCE \cong Rt\triangle BFE (HL),$$

$$\therefore \angle EBF = \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ACB + \angle EBC = 112.5^\circ,$$

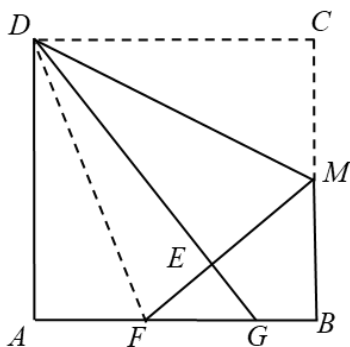
故答案为: $36 - 18\sqrt{2}$, 112.5 .

【点拨】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质及三角形外角的性质, 熟练掌握知识点是解题的关键.

16. $\frac{5}{3} / 1\frac{2}{3}$

【分析】 根据折叠的性质可得 $DE = DC = 4$, $EM = CM = 2$, 连接 DF , 设 $FE = x$, 由勾股定理得 BF , DF , 从而求出 x 的值, 得出 FB , 再证明 $\triangle FEG \sim \triangle FBM$, 利用相似三角形对应边成比例可求出 FG .

解: 连接 DF , 如图,



\therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = BC = CD = DA = 4, \angle A = \angle B = \angle C = \angle CDA = 90^\circ$.

\therefore 点 M 为 BC 的中点,

$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

由折叠得, $ME = CM = 2, DE = DC = 4, \angle DEM = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ, \angle FEG = 90^\circ$,

设 $FE = x$, 则有 $DF^2 = DE^2 + EF^2$

$\therefore DF^2 = 4^2 + x^2$

又在 $Rt\triangle FMB$ 中, $FM = 2 + x, BM = 2$,

$\therefore FM^2 = FB^2 + BM^2$

$\therefore FB = \sqrt{FM^2 - BM^2} = \sqrt{(2+x)^2 - 2^2}$

$\therefore AF = AB - FB = 4 - \sqrt{(2+x)^2 - 2^2}$

在 $Rt\triangle DAF$ 中, $DA^2 + AF^2 = DF^2$,

$\therefore 4^2 + \left(4 - \sqrt{(2+x)^2 - 2^2}\right)^2 = 4^2 + x^2$,

解得, $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -8$ (舍去)

$\therefore FE = \frac{4}{3}$,

$\therefore FM = FE + ME = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$

$\therefore FB = \sqrt{\left(2 + \frac{4}{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{8}{3}$

$$\therefore \angle DEM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FEG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FEG = \angle B,$$

$$\text{又} \angle GFE = \angle MFB.$$

$$\therefore \triangle FEG \sim \triangle FBM$$

$$\therefore \frac{FG}{FM} = \frac{FE}{FB}, \text{即} \frac{FG}{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore FG = \frac{5}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{3}$$

【点拨】本题主要考查了正方形的性质，折叠的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质，正确作出辅助线是解答本题的关键。

$$17. (1) B(4,0), C(0,8); (2) \text{存在, } P(0,16) \text{ 或 } P\left(0, \frac{16}{3}\right).$$

【分析】(1) 令 $y=0$, 求 $-x^2+2x+8=0$ 的根即可; 令 $x=0$, 求得 y 值即可确定点 C 的坐标;

(2) 确定抛物线的对称轴为 $x=1$, 确定 C' 的坐标为 $(2, 8)$, 计算 $CC'=2$, 利用直角相等, 两边对应成比例及其夹角相等的两个三角形相似, 分类求解即可.

解: (1) 令 $y=0$, 则 $-x^2+2x+8=0$,

$$\therefore x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$\therefore B(4,0).$$

令 $x=0$, 则 $y=8$.

$$\therefore C(0,8).$$

(2) 存在. 由已知得, 该抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

\therefore 点 C' 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称,

$$\therefore C(2,8), CC'=2.$$

$$\therefore CC' \parallel OB.$$

∵点 P 在 y 轴上,

$$\therefore \angle PCC' = \angle POB = 90^\circ$$

∴当 $\frac{PC}{PO} = \frac{CC'}{OB}$ 时, $\triangle PCC' \sim \triangle POB$.

设 $P(0, y)$,

$$i) \text{ 当 } y > 8 \text{ 时, 则 } \frac{y-8}{y} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore y = 16.$$

$$\therefore P(0, 16)$$

$$ii) \text{ 当 } 0 < y < 8 \text{ 时, 则 } \frac{8-y}{y} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore y = \frac{16}{3}$$

$$\therefore P\left(0, \frac{16}{3}\right).$$

iii) 当 $y < 0$ 时, 则 $CP > OP$, 与 $\frac{PC}{PO} = \frac{1}{2}$ 矛盾.

∴点 P 不存在

$$\therefore P(0, 16) \text{ 或 } P\left(0, \frac{16}{3}\right).$$

【点拨】 本题考查了二次函数与一元二次方程的关系, 对称轴的意义, 三角形相似的判定和性质, 熟练掌握二次函数的性质, 灵活运用三角形的相似和进行一元二次方程根的求解是解题的关键.

18. (1) $-3, -3, (-4, 0)$; (2) 点 P 的坐标为 $(4, 0)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

【分析】 (1) 点 B 是两函数图象的交点, 利用待定系数法求出 m, k 的值; 根据“ A, B 两点关于原点对称”求出点 A 的坐标, 过点 A 作 x 轴的垂线, 利用等腰直角三角形的性质, 结合图形, 求出点 C 的坐标.

(2) 根据点 P 在 x 轴上, 结合图形, 排除点 P 在 x 轴负半轴上的情形, 当点 P 在 x 轴正半轴上时, 两个三角形中已有一对角相等, 而夹角的两边的对应关系不确定, 故分类讨论: ① $\triangle AOC \sim \triangle BOP$; ② $\triangle AOC \sim \triangle POB$. 分别求出两种情况下 OP 的长, 从而得出点 P 的坐标.

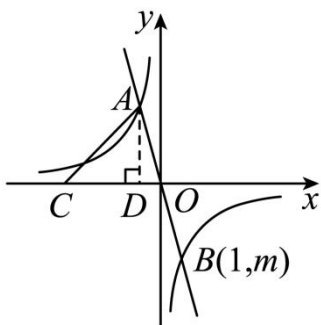
解: (1) (1) 将 $B(1, m)$ 代入 $y = -3x$, 得 $m = -3 \times 1 = -3$,

$$\therefore B(1, -3).$$

将 $B(1, -3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $-3 = \frac{k}{1}$,

$$\therefore k = -3.$$

如图, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 则 $\angle ADC = 90^\circ$.



\therefore 点 A, B 关于原点 O 对称,

$$\therefore A(-1, 3),$$

$$\therefore OD = 1, AD = 3.$$

又 $\therefore \angle ACO = 45^\circ$,

$$\therefore CD = AD = 3,$$

$$\therefore OC = OD + CD = 1 + 3 = 4,$$

$$\therefore C(-4, 0).$$

故答案为: $-3, -3, (-4, 0)$;

(2) 由 (1) 可知, $B(1, -3), A(-1, 3)$.

当点 P 在 x 轴的负半轴上时, $\angle BOP > 90^\circ$,

$$\therefore \angle BOP > \angle AOC.$$

又 $\therefore \angle BOP > \angle ACO, \angle BOP > \angle CAO$,

$\therefore \triangle BOP$ 与 $\triangle AOC$ 不可能相似.

当点 P 在 x 轴的正半轴上时, $\angle AOC = \angle BOP$.

① 若 $\triangle AOC \sim \triangle BOP$, 则 $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OP}$,

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore OP = OC = 4,$$

$$\therefore P(4,0);$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } \triangle AOC \sim \triangle POB, \text{ 则 } \frac{OA}{OP} = \frac{OC}{OB},$$

$$\text{又} \because OA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad OB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, \quad OC = 4,$$

$$\therefore OP = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

综上所述, 点 P 的坐标为 $(4,0)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

【点拨】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、相似三角形的性质. 熟练掌握用待定系数法求函数表达式, 并能利用数形结合思想和分类讨论思想分析是解答本题的关键.

19. (1) 见分析; (2) $\triangle FBG$ 是等腰三角形, 理由见分析; (3) $\sqrt{2} - 1$

【分析】 (1) 利用正方形的性质得出 $AB = AD$, $\angle BAE = \angle DAE = 45^\circ$, 进而即可得到

$$\triangle ABE \cong \triangle ADE (\text{SAS});$$

(2) 先判断出 $\angle AGD = \angle FGB$, 进而判断出 $\angle FGB = \angle FBG$, 即可得到结论;

(3) 先求出 FG 的长, 可证明 $\triangle FBE$ 是等腰直角三角形. 从而得到 EF 的长, 再利用

$$\angle BEF = \angle BAE = 45^\circ, \quad \angle ABE = \angle EBG, \quad \text{可证得 } \triangle ABE \sim \triangle EBG, \quad \text{进而得到 } \frac{AE}{AB} = \frac{EG}{BE}, \quad \text{从而可得到答案.}$$

(1) 解: \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, AC 是对角线,

$$\therefore AB = AD, \quad \angle BAE = \angle DAE = 45^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAE \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE (\text{SAS}).$$

(2) 解: $\triangle FBG$ 是等腰三角形, 理由如下:

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADE,$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle DAG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGD = \angle FGB,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle FGB = 90^\circ,$$

$$\therefore FB \perp BE,$$

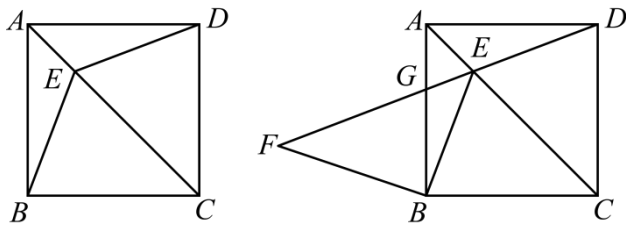
$$\therefore \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle FBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FGB = \angle FBG,$$

$$\therefore BF = FG,$$

$\therefore \triangle FBG$ 是等腰三角形.



(3) 解: $\therefore BE = BF = 2, BF = FG,$

$$\therefore BE = BF = FG = 2,$$

又 $\therefore FB \perp BE,$

$\therefore \triangle FBE$ 是等腰直角三角形.

$$\therefore \angle BEF = \angle BAE = 45^\circ, BF^2 + BE^2 = EF^2,$$

$$\therefore EF^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

$$\therefore EF = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore GE = 2\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BAE = 45^\circ, \quad \angle ABE = \angle EBG,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EBG,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{EG}{BE},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{EF - FG}{BE} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

【点拨】本题考查四边形综合题，主要考查了正方形的性质，全等三角形，等腰三角形以及相似三角形，熟练掌握等腰三角形以及全等三角形的判定与性质是解题的关键。

20. (1) 四边形 $ABCD$ 是正方形，证明见分析；(2) $FH = AH + CF$ ；(3) $MC = \sqrt{2}BH$ ，证明见分析；

【分析】(1) 证明 $\triangle ADG \cong \triangle CDF$ ，可得 $AD = CD$ ，从而可得结论；

(2) 证明四边形 $DGHF$ 是矩形，可得 $\angle G = 90^\circ = \angle DFC$ ，同理可得： $\angle ADG = \angle CDF$ ，证明 $\triangle ADG \cong \triangle CDF$ ， $DG = DF$ ， $AG = CF$ ，证明四边形 $DGHF$ 是正方形，可得 $HG = HF$ ，从而可得结论；

(3) 如图，连接 AC ，证明 $\angle AHE = \angle ABC = 90^\circ$ ， $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\triangle AHE \sim \triangle CBE$ ，可得 $\frac{AE}{CE} = \frac{HE}{BE}$ ，再证明 $\triangle HEB \sim \triangle AEC$ ，可得 $\angle HBE = \angle MCA$ ，证明 $\triangle AHB \sim \triangle AMC$ ，可得 $\frac{HB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，从而可得答案。

解：(1) $\because GD \perp DF$ ， $DF \perp CE$ ， $AG \perp DG$ ，

$$\therefore \angle G = \angle DFC = 90^\circ, \quad \angle ADG + \angle ADF = 90^\circ,$$

\therefore 矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ = \angle ADF + \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle CDF,$$

$$\therefore AG = CF,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore AD = CD,$$

\therefore 矩形 $ABCD$ 是正方形。

(2) $\because DF \perp CE, AH \perp CE, GD \perp DF,$

$\therefore \angle DFH = \angle H = \angle GDF = 90^\circ,$

\therefore 四边形 $DGHF$ 是矩形,

$\therefore \angle G = 90^\circ = \angle DFC,$

同理可得: $\angle ADG = \angle CDF,$

\therefore 正方形 $ABCD,$

$\therefore AD = CD,$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF,$

$\therefore DG = DF, AG = CF,$

\therefore 四边形 $DGHF$ 是正方形,

$\therefore HG = HF,$

$\therefore FH = HG = AH + AG = AH + CF.$

(3) 如图, 连接 $AC,$

$\because AH \perp CE,$ 正方形 $ABCD,$

$\therefore \angle AHE = \angle ABC = 90^\circ, \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}, \angle BAC = 45^\circ,$

$\therefore \angle AEH = \angle CEB,$

$\therefore \triangle AHE \sim \triangle CBE,$

$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{HE}{BE},$

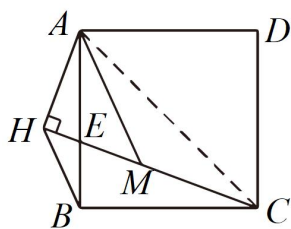


图3

$\therefore \angle BEH = \angle AEC,$

$$\therefore \triangle HEB \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \angle HBE = \angle MCA,$$

$$\therefore AH \perp CE, AH = HM,$$

$$\therefore \angle HAM = 45^\circ = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle HAE = \angle MAC,$$

$$\therefore \triangle AHB \sim \triangle AMC,$$

$$\therefore \frac{HB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore MC = \sqrt{2}BH.$$

【点拨】 本题考查的是矩形的判定与性质，正方形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，作出合适的辅助线，构建相似三角形是解本题的关键。