昆山提招数学模拟卷（四）

一，单项选择题

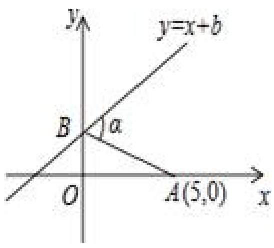
1. 已知 a，b 满足$(a+1)^2-(b-2)\sqrt{2-b}+|c-3|=0$，则$a+b+c$的值等于$(\quad)$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 若不等式$x^2-x-a^2+a+1>0$ 对任意实数 x 成立，则$(\quad)$

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$　　C. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

3. 如图，已知 A 点坐标为$(5,0)$，直线$y=x+b(b>0)$与 y 轴交于点 B，连接 AB，$\angle\alpha=75°$，则 b 的值为$(\quad)$



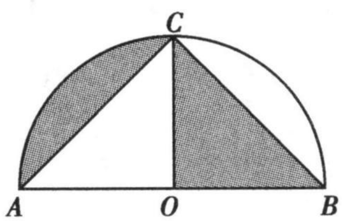
A. 3

B. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

C. 4

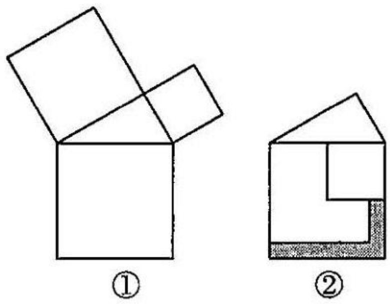
D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

4. 如图，以 AB 为直径，点 O 为圆心的半圆经过点 C，若$AC=BC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积是$(\quad)$



A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$

5. 勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，在我国古算书《周髀算经》中早有记载。如图 1，以直角三角形的各边为边分别向外作正方形，再把较小的两张正方形纸片按图 2 的方式放置在最大正方形内。则图中阴影部分的面积等于$(\quad)$



A. 直角三角形的面积　　B. 最大正方形的面积

C. 较小两个正方形重叠部分的面积　　D. 最大正方形与直角三角形的面积和

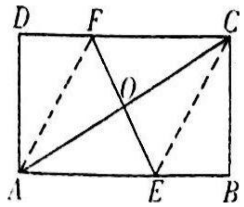
6. 如图，$ABCD$ 是矩形纸片，翻折$\angle B$、$\angle D$，使 AD、BC 边与对角线 AC 重叠，且顶点 B、D 恰好落在同一点 O 上，折痕分别是 CE，AF.则$\frac{AE}{EB}$等于(　)

A. $\sqrt{3}$

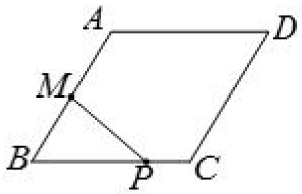
B. 2

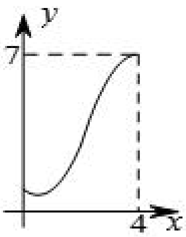
C. 1.5

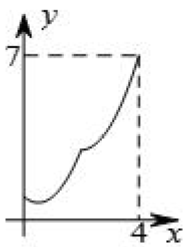
D. $\sqrt{2}$

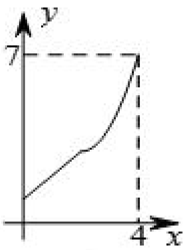


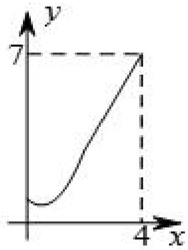
7. 如图，菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle B=60°$，M 为 AB 的中点. 动点 P 在菱形的边上从点 B 出发，沿$B\to C\to D$的方向运动，到达点 D 时停止．连接 MP，设点 P 运动的路程为 x，$MP^2=y$，则表示 y 与 x 的函数关系的图象大致为(　)



A. 

B. 

C. 

D. 

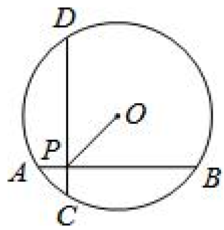
8. 如图，在半径为$\sqrt{5}$的$\odot O$中，AB、CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P，且$AB=CD=4$，则 OP 的长为(　)

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$



二、填空题

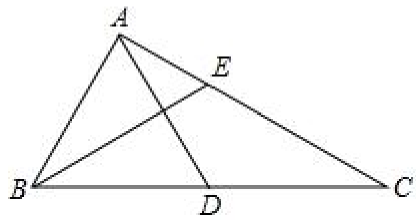
9. 已知 $3a+2b+c=12$，且$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$a^3-b^2-c=$______.

10. 设整数a使得关于x的一元二次方程$5x^2-5ax+26a-143=0$的两个根都是整数，则a的值是______.

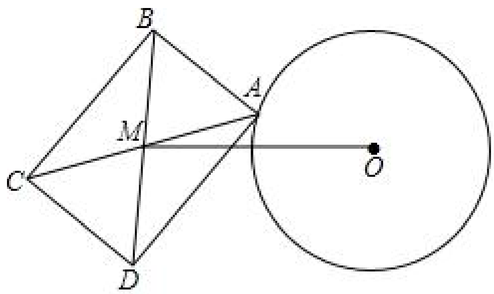
11. 已知 a，b，c，n 是互不相等的正整数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$也是整数，则 n 的最大值是______ .

12. 已知点 A，B 的坐标分别为$(1,0)$，$(2,0)$.若二次函数$y=x^2+(a-3)x+3$的图象与线段 AB 只有一个交点，则 a 的取值范围是____.

13. 如图，AD、BE 分别是$\triangle ABC$的中线和角平分线，$AD\perp BE$，$AD=BE=12$，则 AC 的长等于______.



14. 如图，圆 O 的半径为 3，点 A 在圆 O 上运动，$ABCD$ 为矩形，AC 与 BD 交于点 M，$MO=5$，则AB^2+AD^2的最小值为______.



三、解答题

15. 对这样一个题：已知$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，求代数式x^3-2x+1的值．TOM 给出了如下解法：由$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，有$x^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=x+1$，故$x^3-2x+1=x\cdot x^2-2x+1=x(x+1)-2x+1=x^2-x+1=2$.

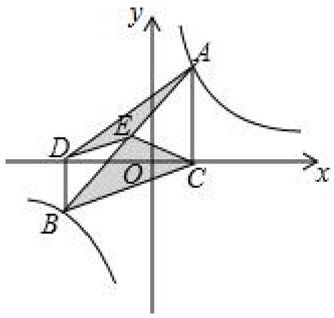
请你求解下面的问题：

已知$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求代数式$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$的值.

16. 如图，点 A、B 在反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象上，$AC\perp x$轴，$BD\perp x$轴，垂足 C、D 分别在 x 轴的正、负半轴上，若$CD=k$，已知$AB=4AC$，E 是 AB 的中点，且$\triangle BCE$的面积是$\triangle ADE$的面积的 3 倍．

(1)求 AB 的长．

(2)求 k 的值．

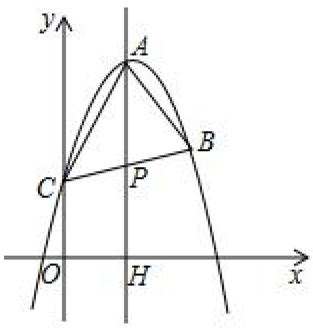


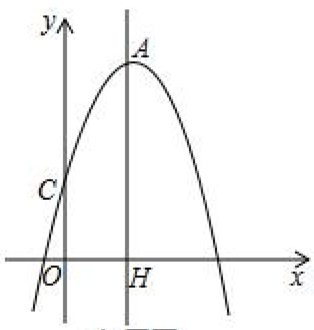
17. 已知二次函数$y=ax^2+4x+c(a\neq 0)$的图象是经过 y 轴上点$C(0,2)$的一条抛物线，顶点为 A，对称轴是经过点$H(2,0)$且平行于 y 轴的一条直线．点 P 是对称轴上位于点 A 下方的一点，连接 CP 并延长交抛物线于点 B，连接 CA、AB．

(1)求这个二次函数的表达式及顶点 A 的坐标；

(2)当$\angle ACB=45°$时，求点 P 的坐标；

(3)将$\triangle CAB$沿 CB 翻折后得到$\triangle CDB$，问点 D 能否恰好落在坐标轴上？若能，求点 P 的坐标，若不能，说明理由．





(备用图)

18. 已知，在△ABC中，$\angle BAC=90°$，$\angle ABC=45°$，点 D 为直线 BC 上一动点(点 D 不与点 B，C 重合). 以 AD 为边做正方形 $ADEF$，连接 CF

(1)如图 1，当点 D 在线段 BC 上时．求证$CF+CD=BC$；

(2)如图 2，当点 D 在线段 BC 的延长线上时，其他条件不变，请直接写出 CF，BC，CD 三条线段之间的关系；

(3)如图 3，当点 D 在线段 BC 的反向延长线上时，且点 A，F 分别在直线 BC 的两侧，其他条件不变；

①请直接写出 CF，BC，CD 三条线段之间的关系；

②若正方形 $ADEF$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，对角线 AE，DF 相交于点 O，连接OC.求 OC 的长度．

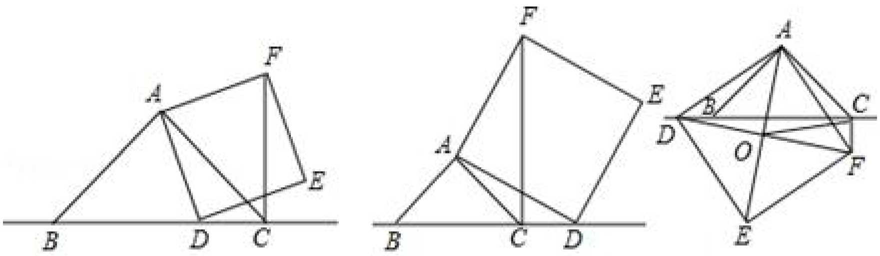


图1 图2 图3

参考答案与试题解析

一，单项选择题

1. 已知 a，b 满足$(a+1)^2-(b-2)\sqrt{2-b}+|c-3|=0$，则$a+b+c$的值等于$(\quad)$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查了非负数的性质：几个非负数的和为 0 时，这几个非负数都为 0.

根据非负数的性质列出方程求出 a、b、c 的值，代入所求代数式计算即可.

【解答】

解：根据题意，得，$(a+1)^2+\sqrt{(2-b)^3}+|c-3|=0$，

$\therefore a+1=0$，$2-b=0$，$c-3=0$，

解得$a=-1$，$b=2$，$c=3$，

所以$a+b+c=-1+2+3=4$.

故选 C.

2. 若不等式$x^2-x-a^2+a+1>0$ 对任意实数 x 成立，则$(\quad)$

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$　　C. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】解：$\because x^2-x-a^2+a+1>0$ 对任意实数 x 成立，即函数$y=x^2-x-a^2+a+1$ 与 x 轴没有交点，

$\therefore \triangle=1-4(-a^2+a+1)<0$.

即 $4a^2-4a-3<0$.

$\therefore (2a+1)(2a-3)<0$.

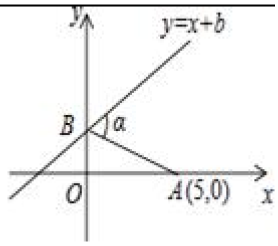
解不等式可得：$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$.

故选：D.

由$x^2-x-a^2+a+1>0$ 对任意实数 x 成立可得函数$y=x^2-x-a^2+a+1$ 与 x 轴没有交点，从而有$\triangle=1-4(-a^2+a+1)<0$，解不等式可求 a 的范围.

本题主要考查了二次不等式的恒成立问题的求解，解题的关键是结合二次函数的函数的图象及函数的性质的应用.

3. 如图，已知 A 点坐标为$(5,0)$，直线$y=x+b(b>0)$与 y 轴交于点 B，连接 AB，$\angle\alpha=75°$，则 b 的值为$(\quad)$



A. 3

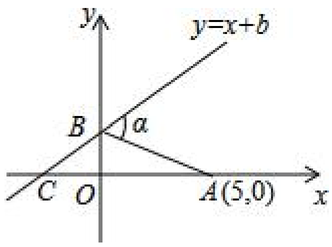
B. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

C. 4

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】解：令直线$y=x+b$与 x 轴交于点 C，如图所示.



令$y=x+b$中$x=0$，则$y=b$，

$\therefore B(0,b)$；

令$y=x+b$中$y=0$，则$x=-b$，

$\therefore C(-b,0)$.

$\therefore \angle BCO=45°$.

$\because \alpha=\angle BCO+\angle BAO=75°$，

$\therefore \angle BAO=30°$，

$\because$点$A(5,0)$，

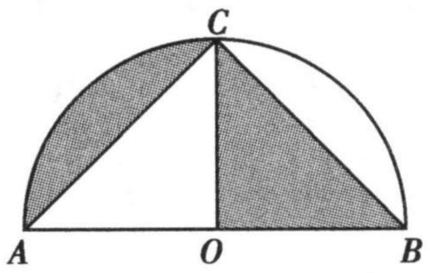
$\therefore OA=5$，$OB=b=OA\cdot\tan\angle BAO=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

故选 D.

令直线$y=x+b$与 x 轴交于点 C，根据直线的解析式可求出点 B、C 的坐标，进而得出$\angle BCO=45°$，再通过角的计算得出$\angle BAO=30°$，根据点 A 的坐标利用特殊角的三角函数值即可得出 b 的值.

本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及特殊角的三角函数值，解题的关键是求出$\angle BAO=30°$.本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据特殊角的三角函数值以及角的计算找出角的度数，再通过解直角三角形求出边的长度是关键.

4. 如图，以 AB 为直径，点 O 为圆心的半圆经过点 C，若$AC=BC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积是( )



A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了等腰直角三角形，扇形面积的计算，圆面积公式：$S=\pi r^2$，扇形：由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形．求阴影面积常用的方法：①直接用公式法；②和差法；③割补法．求阴影面积的主要思路是将不规则图形的面积转化为规则图形的面积．先利用圆周角定理得到$\angle ACB=90°$，则可判断$\triangle ACB$为等腰直角三角形，接着判断$\triangle AOC$和$\triangle BOC$都是等腰直角三角形，于是得到$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}$，然后根据扇形的面积公式计算图中阴影部分的面积．

【解答】

解：$\because AB$为直径，$\therefore \angle ACB=90°$．

又$\because AC=BC=\sqrt{2}$，

$\therefore\triangle ACB$为等腰直角三角形，

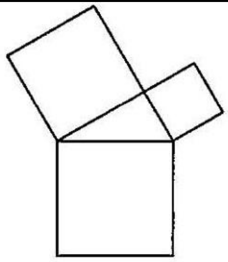
$\therefore OC\perp AB$，$\triangle AOC$和$\triangle BOC$都是等腰直角三角形，

$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}$，$OA=1$，

$\therefore S_{阴影部分}=S_{扇形AOC}=\frac{90\cdot\pi\cdot 1^2}{360}=\frac{\pi}{4}$.

故选 A.

5. 勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，在我国古算书《周髀算经》中早有记载。如图 1，以直角三角形的各边为边分别向外作正方形，再把较小的两张正方形纸片按图 2 的方式放置在最大正方形内。则图中阴影部分的面积等于( )



A. 直角三角形的面积

B. 最大正方形的面积

C. 较小两个正方形重叠部分的面积

D. 最大正方形与直角三角形的面积和

【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么$a^2+b^2=c^2$.

根据勾股定理得到$c^2=a^2+b^2$，根据正方形的面积公式、长方形的面积公式计算即可。

【解答】

解：设直角三角形的斜边长为 c，较长直角边为 b，较短直角边为 a，

由勾股定理得，$c^2=a^2+b^2$，

阴影部分的面积$=c^2-b^2-a(c-b)=a^2-ac+ab=a(a+b-c)$，

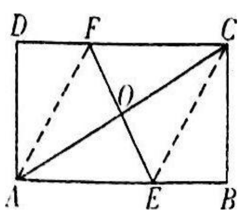
较小两个正方形重叠部分的宽$=a-(c-b)$，长$=a$，

则较小两个正方形重叠部分底面积$=a(a+b-c)$，

∴则图中阴影部分的面积等于较小两个正方形重叠部分的面积。

故选：C.

6. 如图，$ABCD$ 是矩形纸片，翻折$\angle B$、$\angle D$，使 AD、BC 边与对角线 AC 重叠，且顶点 B、D 恰好落在同一点 O 上，折痕分别是 CE，AF.则$\frac{AE}{EB}$等于( )



A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. 1.5

D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查了翻折的变换，全等三角形的判定与性质，含 30 度角的直角三角形，矩形的性质等知识点；由四边形 $ABCD$ 是矩形，得出$BC = AD$，$\angle B = \angle D = 90°$，由翻折的性质得出$BC = OC$，$OA = AD$，$\angle AOE = \angle COE = 90°$，$\angle BCE = \angle OCE$，从而得到$\triangle AOE \cong \triangle COE$，$AC = 2BC$，得到$AE = CE$，$\angle CAB = 30°$，求出$\angle BCE = \angle OCE = 30°$，再根据含 30 度角的直角三角形的性质得出答案．

【解答】

解：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BC = AD$，$\angle B = \angle D = 90°$，

由翻折得出：$BC = OC$，$OA = AD$，$\angle AOE = \angle COE = 90°$，$\angle BCE = \angle OCE$，

$\therefore OA = OC$，$\angle AOE = \angle COE = 90°$，$OE = OE$，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COE$，

$\therefore AE = CE$，

$\because OA = OC = BC = AD$，

$\therefore AC = 2BC$，

$\therefore \angle CAB = 30°$，

$\therefore \angle ACB = 60°$，

$\therefore \angle BCE = \angle OCE = 30°$，

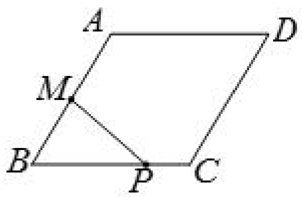
$\therefore$在$Rt\triangle BCE$中，$\frac{CE}{EB} = 2$，

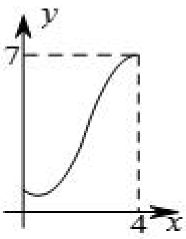
$\because AE = CE$，

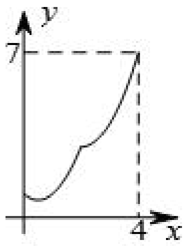
$\therefore \frac{AE}{EB} = 2$，

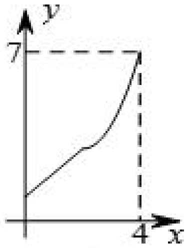
故选 B．

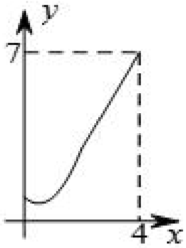
7. 如图，菱形 $ABCD$ 中，$AB = 2$，$\angle B = 60°$，M 为 AB 的中点．动点 P 在菱形的边上从点 B 出发，沿$B \to C \to D$的方向运动，到达点 D 时停止．连接 MP，设点 P 运动的路程为 x，$MP^2 = y$，则表示 y 与 x 的函数关系的图象大致为( )



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】

【分析】

本题主要考查动点问题的函数图象，涉及到菱形的性质以及勾股定理．

正确的理解题意，画出图形是解题的关键．分三种情况：(1)当 $0\le x\le\frac{1}{2}$时，(2)当$\frac{1}{2}<x\le 2$ 时，(3)当 $2<x\le 4$ 时，根据勾股定理列出函数解析式，判断其图象即可求出结果．

【解答】

解：(1)当 $0\le x\le\frac{1}{2}$时，

如图 1，

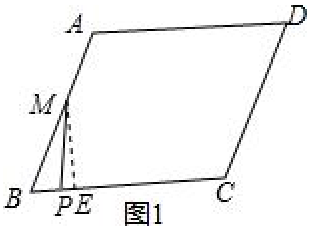


图1

过 M 作$ME\perp BC$于 E，

$\because M$为 AB 的中点，$AB=2$，

$\therefore BM=1$，

$\because \angle B=60°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}$，$ME=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$PE=\frac{1}{2}-x$，

在$Rt\triangle PME$中，由勾股定理得：$MP^2=ME^2+PE^2$，

$\therefore y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=x^2-x+1$；

(2)当$\frac{1}{2}<x\leq 2$时，

如图 2，

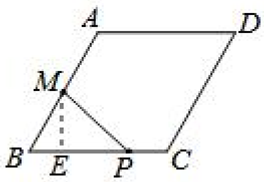


图2

过 M 作$ME\perp BC$与 E，

由(1)知$BM=1$，$\angle B=60°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}$，$ME=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$PE=x-\frac{1}{2}$，

$\therefore MP^2=ME^2+PE^2$，

$\therefore y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=x^2-x+1$；

(3)当 $2<x\leq 4$ 时，

如图 3，

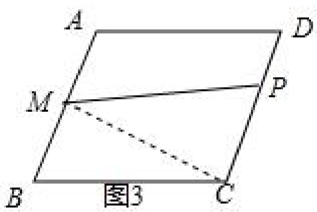


图3

连结 MC，

$\because BM=1$，$BC=AB=2$，$\angle B=60°$，

$\therefore \angle BMC=90°$，$MC=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，

$\because AB//DC$，

$\therefore \angle MCD=\angle BMC=90°$，

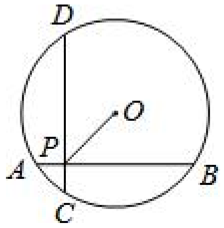
$\therefore MP^2=MC^2+PC^2$，

$\therefore y=(\sqrt{3})^2+(x-2)^2=x^2-4x+7$；

综合(1)(2)(3)，只有 B 选项符合题意．

故选 B．

8. 如图，在半径为$\sqrt{5}$的$\odot O$中，AB、CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P，且$AB=CD=4$，则 OP 的长为(　)



A. 1

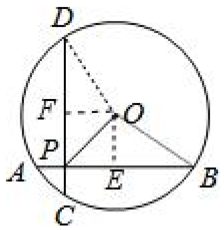
B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】解：作$OE\perp AB$于 E，$OF\perp CD$于 F，连结 OD、OB，如图，



则$AE=BE=\frac{1}{2}AB=2$，$DF=CF=\frac{1}{2}CD=2$，

在$Rt\triangle OBE$中，$\because OB=\sqrt{5}$，$BE=2$，

$\therefore OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=1$，

同理可得$OF=1$，

$\because AB\perp CD$，

$\therefore$四边形 $OEPF$ 为矩形，

而$OE=OF=1$，

$\therefore$四边形 $OEPF$ 为正方形，

$\therefore OP=\sqrt{2}OE=\sqrt{2}$．

故选：B．

作$OE\perp AB$于 E，$OF\perp CD$于 F，连结 OD、OB，如图，根据垂径定理得到$AE=BE=\frac{1}{2}AB=2$，$DF=CF=\frac{1}{2}CD=2$，根据勾股定理在$Rt\triangle OBE$中计算出$OE=1$，同理可得$OF=1$，接着证明四边形 $OEPF$ 为正方形，于是得到$OP=\sqrt{2}OE=\sqrt{2}$．

本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了勾股定理．

二、填空题

9. 已知 $3a+2b+c=12$，且$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$a^3-b^2-c=$______.

【答案】2

【解析】解：$\because a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$，

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$，

$\therefore a-b=0$，$b-c=0$，$a-c=0$，

$\therefore a=b=c$，

$\because 3a+2b+c=12$，

$\therefore 6a=12$，$a=2$，

$\therefore a^3-b^2-c=a^3-a^2-a=8-4-2=2$.

故答案为：2.

先将已知$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，移项后配方得：$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$，由平方的非负性得$a=b=c=2$，代入可得结论.

本题考查了配方法的应用，平方的非负性，求代数式的值，灵活运用配方法解决问题是关键.

10. 设整数a使得关于x的一元二次方程$5x^2-5ax+26a-143=0$的两个根都是整数，则a的值是______.

【答案】18

【解析】解：$\because 5x^2-5ax+26a-143=0\Rightarrow 25x^2-25ax+(130a-26^2)-39=0$，

即$(5x-26)(5x-5a+26)=39$，

$\because x$，a 都是整数，故$(5x-26)$、$(5x-5a+26)$都分别为整数，

而只存在 $39=1\times 39$ 或 39×1 或 3×13 或 13×3 或四种情况，

①当 $5x-26=1$、$5x-5a+26=39$ 联立解得$a=2.8$ 不符合，

②当 $5x-26=39$、$5x-5a+26=1$ 联立解得$a=18$，

③当 $5x-26=3$、$5x-5a+26=13$ 联立解得$a=8.4$ 不符合，

④当 $5x-26=13$、$5x-5a+26=3$ 联立解得$a=12.4$ 不符合，

$\therefore$当$a=18$ 时，方程为 $5x^2-90x+325=0$ 两根为 13、-5.

故答案为：18.

首先将方程组 $5x^2-5ax+26a-143=0$ 左右乘 5 得 $25x^2-25ax+(130a-26^2)-39=0$，再分解因式. 根据 39 为两个整数的乘积，令两个因式分别等于 39 分解的整因数. 讨论求值验证即可得到结果.

本题考查因式分解的应用、一元二次方程的整数根与有理根．解决本题的关键是巧妙利用 39 仅能分解为整数只存在 $39 = 1 * 39$ 或 $39 * 1$ 或 $3 * 13 * 13 * 3$ 或四种情况，因而讨论量，并不大．

11. 已知 a，b，c，n 是互不相等的正整数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$也是整数，则 n 的最大值是______ ．

【答案】42

【解析】解：a，b，c，n 是互不相等的正整数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$也是整数，

$\therefore$要使得 n 尽量大，则 a，b，c 的值应尽量小

$\therefore$若$a = 2$，$b = 3$，$c = 4$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$

故此种情况不符合题意；

若$a = 2$，$b = 3$，$c = 5$，则，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$

故此种情况不符合题意；

若$a = 2$，$b = 3$，$c = 6$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

故此种情况不符合题意；

若$a = 2$，$b = 3$，$c = 7$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$

此时$n = 42$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$也是整数，符合题意

故 n 的最大值为：42．

根据 a，b，c，n 是互不相等的正整数，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$也是整数，故要使得 n 尽量大，则 a，b，c 的值应尽量小，对 a，b，c 从小到大赋值计算，可得答案．

本题考查了分式的加法运算，明确分母越小，分式的值越大，从而最后剩下的凑整分数的分母越大，采用赋值与分类讨论是解答本题的关键．

12. 已知点 A，B 的坐标分别为$(1,0)$，$(2,0)$.若二次函数$y = x^2 + (a-3)x + 3$ 的图象与线段 AB 只有一个交点，则 a 的取值范围是____．

【答案】$-1 \leq a < -\frac{1}{2}$或$a = 3 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

此题是二次函数综合题，主要考查了二次函数对称轴的确定方法，一元二次方程的根的判别式，用分类讨

论的数学思想，是解本题的关键．根据题意，当二次函数顶点在 x 轴下方或当二次函数的顶点在 x 轴上时，分情况讨论问题．借助于根的判别式即可解答．

【解答】

解：依题意，应分为两种情况讨论，

①当二次函数顶点在 x 轴下方，

若$y_{x=1}<0$且$y_{x=2}\geq 0$，即$\begin{cases}1+(a-3)+3<0\\4+2(a-3)+3\geq 0\end{cases}$，解得此不等式组无解；

若$y_{x=2}<0$且$y_{x=1}\geq 0$，即$\begin{cases}1+(a-3)+3\geq 0\\4+2(a-3)+3<0\end{cases}$，解得$-1\leq a<-\frac{1}{2}$；

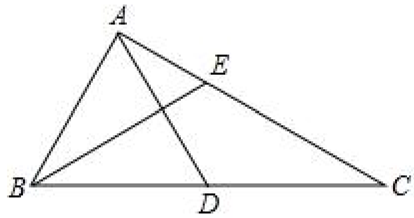
②当二次函数的顶点在 x 轴上时，

$\triangle=0$，即$(a-3)^2-12=0$，解得$a=3\pm 2\sqrt{3}$，

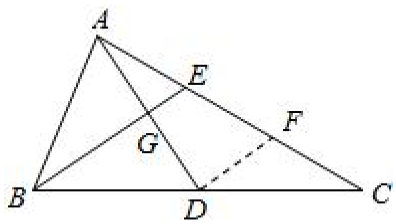
而对称轴为$x=-\frac{a-3}{2}$，可知 $1\leq-\frac{a-3}{2}\leq 2$，故$a=3-2\sqrt{3}$．

故答案为：$-1\leq a<-\frac{1}{2}$或$a=3-2\sqrt{3}$．

13．如图，AD、BE 分别是$\triangle ABC$的中线和角平分线，$AD\perp BE$，$AD=BE=12$，则 AC 的长等于______．



【答案】$9\sqrt{5}$



【解析】解：过 D 点作$DF//BE$，

$\because AD$是$\triangle ABC$的中线，$AD\perp BE$，

$\therefore F$为 EC 中点，$AD\perp DF$，

$\because AD=BE=12$，则$DF=6$，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$，

$\because BE$是$\triangle ABC$的角平分线，$AD\perp BE$，

$\therefore\angle ABG=\angle DBG$，$\angle AGB=\angle DGB=90^\circ$，

$\because BG=BG$，

$\therefore\triangle ABG\cong\triangle DBG(ASA)$，

$\therefore AG=DG$，

$\therefore G$为 AD 中点，

$\therefore E$为 AF 中点，

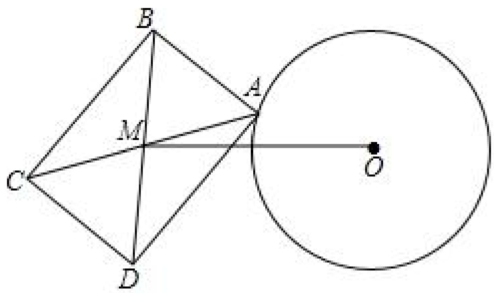
$\therefore AC = \frac{3}{2}AF = \frac{3}{2} \times 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

故答案为：$9\sqrt{5}$.

过 D 点作$DF//BE$，则$DF = \frac{1}{2}BE$，F 为 EC 中点，在$Rt\triangle ADF$中求出 AF 的长度，根据已知条件易知 G 为 AD 中点，因此 E 为 AF 中点，则$AC = \frac{3}{2}AF$.

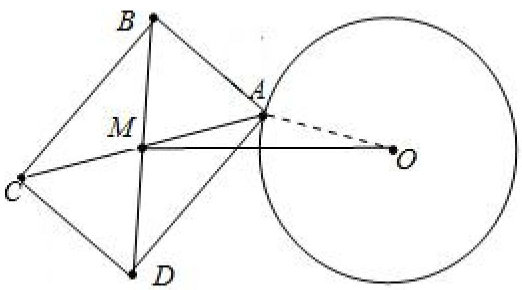
本题考查了三角形中位线定理，全等三角形的判定和性质，三角形中线和角平分线的性质以及勾股定理的应用，作出辅助线构建直角三角形是解题的关键.

14. 如图，圆 O 的半径为 3，点 A 在圆 O 上运动，$ABCD$ 为矩形，AC 与 BD 交于点 M，$MO = 5$，则$AB^2 + AD^2$的最小值为______.



【答案】36

【解析】解：如图，连接 OA.



$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD$，$AM = MC = BM = MD$，$\angle BAD = 90°$，

$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$，

$\therefore BD$的值最小时，$AB^2 + AD^2$的值最小，

$\because AM \geq OM - OA$，$OM = 5$，$OA = 3$，

$\therefore AM \geq 3$，

$\therefore AM$的最小值为 3，

$\therefore BD$的最小值为 6，

$\therefore AB^2+AD^2$的最小值为 36，

故答案为 36．

如图，连接OA.首先判断出 BD 最小时，AB^2+AD^2的值最小，求出 AM 的最小值即可解决问题．

本题考查点与圆的位置关系，勾股定理，矩形的性质等知识，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，属于中考常考题型．

三、解答题（本大题共 4 小题，15 题，16 题 7 分，17，18 题 8 分，共 30 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 对这样一个题：已知$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，求代数式x^3-2x+1 的值．TOM 给出了如下解法：由$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，有$x^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=x+1$，故$x^3-2x+1=x\cdot x^2-2x+1=x(x+1)-2x+1=x^2-x+1=2$．

请你求解下面的问题：

已知$x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求代数式$\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$的值．

【答案】解：$\because x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{16-8\sqrt{3}+3}$

$$=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}$$

$=4-\sqrt{3}$；

$\therefore (x-4)^2=3$，

$\therefore x^2-8x+13=0$，

$$\therefore \frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$$

$$=\frac{(x^4-8x^3+13x^2)+(2x^3-16x^2+26x)+(x^2-8x+13)+10}{x^2-8x+13+2}$$

$$=\frac{x^2(x^2-8x+13)+2x(x^2-8x+13)+(x^2-8x+13)+10}{2}$$

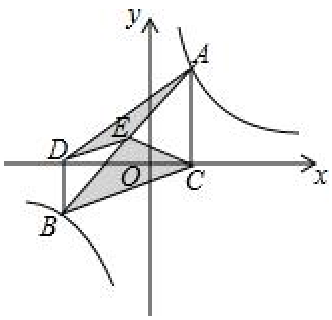
$$=\frac{10}{2}$$

$=5$．

【解析】直接将已知变形得出$x^2-8x+13=0$，再将原式变形得出答案．

此题主要考查了二次根式的化简求值，正确将原式变形是解题关键．

16. 如图，点 A、B 在反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象上，$AC\perp x$轴，$BD\perp x$轴，垂足 C、D 分别在 x 轴的正、负半轴上，若$CD=k$，已知$AB=4AC$，

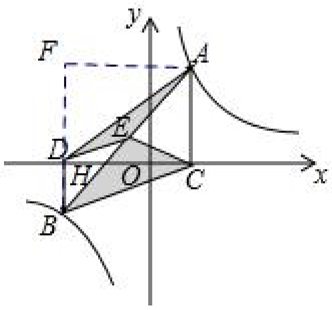


E 是 AB 的中点，且△ BCE的面积是△ ADE的面积的 3 倍．

(1)求 AB 的长．

(2)求 k 的值．

【答案】解：(1)如图所示，延长 BD，过点 A 作 BD 的垂线，交 BD 的延长线于点 F，



∵ E是 AB 的中点，

∴ $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADE}$，

$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCE}$，

又∵△ BCE的面积是△ ADE的面积的 3 倍，

∴ $3S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$，

∴ $3\times\frac{1}{2}BD\cdot AF=\frac{1}{2}AC\cdot AF$，

∴ $3BD=AC$，

∵ $AC\cdot OC=BD\cdot DO=k$，

∴ $DO=3OC$，

∵ $CD=k$，

∴ $OC=\frac{k}{4}$，

∴ $AC\cdot OC=AC\cdot\frac{k}{4}=k$，

∴ $AC=4$，

∵ $AB=4AC$，

∴ $AB=16$；

(2)易知$BD=\frac{4}{3}$，$AC=FD$，$AF=DC$，

∴ $BF=BD+DF=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$，

$\therefore AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\frac{32\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore k=DC=AF=\frac{32\sqrt{2}}{3}$.

【解析】(1)延长 BD，过点 A 作 BD 的垂线，交 BD 的延长线于点 F，再根据三角形的面积公式以及题目条件解答即可；

(2)根据题意求出 BF 的长，再根据勾股定理解答即可.

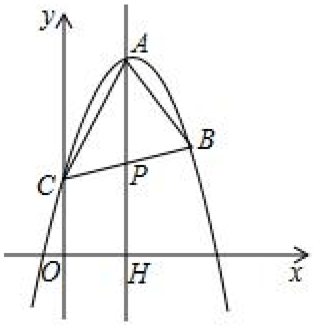
本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征、三角形的面积公式以及勾股定理，构造直角三角形利用勾股定理巧妙得出 k 值是解题的关键.

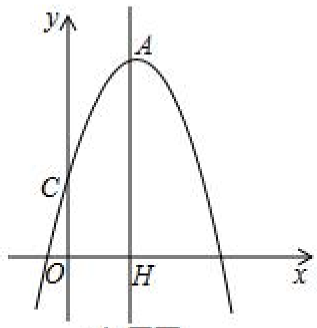
17. 已知二次函数$y=ax^2+4x+c(a\neq 0)$的图象是经过 y 轴上点$C(0,2)$的一条抛物线，顶点为 A，对称轴是经过点$H(2,0)$且平行于 y 轴的一条直线．点 P 是对称轴上位于点 A 下方的一点，连接 CP 并延长交抛物线于点 B，连接 CA、AB.

(1)求这个二次函数的表达式及顶点 A 的坐标；

(2)当$\angle ACB=45°$时，求点 P 的坐标；

(3)将$\triangle CAB$沿 CB 翻折后得到$\triangle CDB$，问点 D 能否恰好落在坐标轴上？若能，求点 P 的坐标，若不能，说明理由.





(备用图)

【答案】解：(1)由抛物线的对称性可知，抛物线的图象经过点$(0,2)$和点$(4,2)$，

则$\begin{cases}2=16a+16+c\\2=c\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\c=2\end{cases}$，

$\therefore y=-x^2+4x+2$，

$\therefore$当$x=2$时，$y=6$，

$\therefore$点 A 的坐标是$(2,6)$；

(2)如图 1，过点 C 作$CE\perp AH$，过点 P 作$PF\perp AC$于 F，

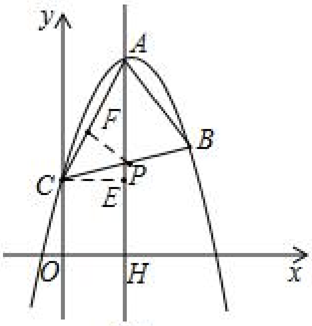


图 1

则$CE = 2$，$AE = 4$，$AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$，

$\because \angle AFP = \angle AEC = 90°$，$\angle FAP = \angle EAC$，$\therefore \triangle AFP \backsim \triangle AEC$，

$\therefore \frac{PF}{AF} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$，

$\because \angle FCP = 45°$，$\therefore CF = PF$.

设$CF = PF = m$，则$AF = 2m$，

$\therefore m + 2m = 2\sqrt{5}$，$m = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore AP = \frac{10}{3}$，$\therefore PH = \frac{8}{3}$，

$\therefore P(2, \frac{8}{3})$；

(3)①当点 D 落在 x 轴的正半轴上时，如图 2，

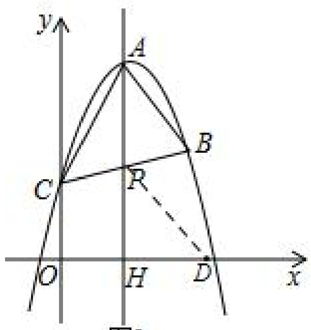


图2

$CD = AC = 2\sqrt{5}$，又$\because OC = 2$，$\therefore OD = 4$，

由对称性可知$AP = PD$，设$PH = m$，则$AP = PD = 6 - m$，

在$Rt\triangle DPH$中，有$PH^2 + HD^2 = PD^2$，

即$m^2 + 2^2 = (6 - m)^2$，解得$m = \frac{8}{3}$，

$\therefore P_1(2, \frac{8}{3})$；

②当点 D 落在 y 轴的负半轴上时，如图 3，

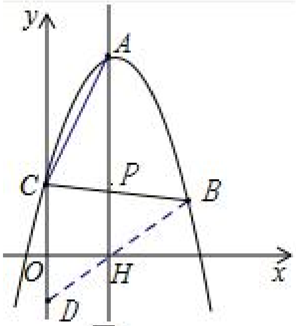


图3

$CD=AC=2\sqrt{5}$，

由对称性可知$\angle DCP=\angle ACP$，又$\because AH//OC$，$\therefore\angle DCP=\angle APC$，

$\therefore\angle APC=\angle ACP$，$\therefore AC=AP=2\sqrt{5}$，$\therefore PH=6-2\sqrt{5}$，

$\therefore P_2(2,6-2\sqrt{5})$；

③当点D落在x轴的负半轴上时，如图4，

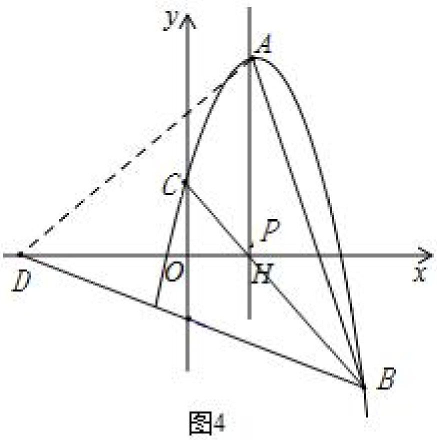


图4

$CD=AC=2\sqrt{5}$，

又$\because OC=2$，$\therefore OD=4$，$\therefore DH=AP=6$，

连接AD，$\therefore$直线CH是线段AD的中垂线，又点P在直线AH上，

$\therefore$点P与点H重合，

$\therefore P_3(2,0)$.

综上所述，点P的坐标为：$P_1(2,\frac{8}{3})$、$P_2(2,6-2\sqrt{5})$、$P_3(2,0)$.

【解析】(1)运用待定系数法解得即可；

(2)过点C作$CE\perp AH$，过点P作$PF\perp AC$于F，可证明$\triangle AFP\backsim\triangle AEC$，再根据相似三角形的性质解答即可；

(3)分情况讨论：①当点D落在x轴的正半轴上时；②当点D落在y轴的负半轴上时；③当点D落在x轴的负半轴上时.

本题是二次函数的综合问题，解题的关键是掌握待定系数法求函数解析式，二次函数的性质及相似三角形的判定与性质等知识.

18. 已知，在△ABC中，$\angle BAC=90°$，$\angle ABC=45°$，点 D 为直线 BC 上一动点(点 D 不与点 B，C 重合). 以 AD 为边做正方形 $ADEF$，连接 CF

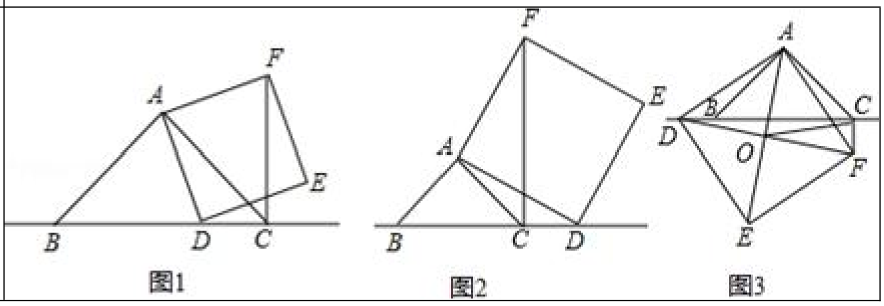
(1)如图 1，当点 D 在线段 BC 上时．求证$CF+CD=BC$；

(2)如图 2，当点 D 在线段 BC 的延长线上时，其他条件不变，请直接写出 CF，BC，CD 三条线段之间的关系；

(3)如图 3，当点 D 在线段 BC 的反向延长线上时，且点 A，F 分别在直线 BC 的两侧，其他条件不变；

①请直接写出 CF，BC，CD 三条线段之间的关系；

②若正方形 $ADEF$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，对角线 AE，DF 相交于点 O，连接OC.求 OC 的长度.



【答案】证明：(1) $\because \angle BAC=90°$，$\angle ABC=45°$，

$\therefore \angle ACB=\angle ABC=45°$，

$\therefore AB=AC$，

$\because$四边形 $ADEF$ 是正方形，

$\therefore AD=AF$，$\angle DAF=90°$，

$\because \angle BAD=90°-\angle DAC$，$\angle CAF=90°-\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAF$，

则在△BAD和△CAF中，$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAF \\ AD=AF \end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF(SAS)$，

$\therefore BD = CF$，

$\because BD + CD = BC$，

$\therefore CF + CD = BC$；

解：(2)$CF - CD = BC$；

(3)①$CD - CF = BC$；

②$\because \angle BAC = 90^\circ$，$\angle ABC = 45^\circ$，

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$，

$\therefore AB = AC$，

$\because$四边形 $ADEF$ 是正方形，

$\therefore AD = AF$，$\angle DAF = 90^\circ$，

$\because \angle BAD = 90^\circ - \angle BAF$，$\angle CAF = 90^\circ - \angle BAF$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAF$，

$\because$在$\triangle BAD$和$\triangle CAF$中，$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF, \\ AD = AF \end{cases}$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF(SAS)$，

$\therefore \angle ACF = \angle ABD$，

$\because \angle ABC = 45^\circ$，

$\therefore \angle ABD = 135^\circ$，

$\therefore \angle ACF = \angle ABD = 135^\circ$，

$\therefore \angle FCD = 90°$，

$\therefore \triangle FCD$是直角三角形.

$\because$正方形 $ADEF$ 的边长为 $2\sqrt{2}$且对角线 AE、DF 相交于点 O.

$\therefore DF = \sqrt{2}AD = 4$，$O$ 为 DF 中点.

$\therefore OC = \frac{1}{2}DF = 2$.

【解析】本题考查了正方形与全等三角形的判定与性质的综合应用，证明三角形全等是关键.

(1) $\triangle ABC$是等腰直角三角形，利用 SAS 即可证明$\triangle BAD \cong \triangle CAF$，从而证得$CF = BD$，据此即可证得；

(2)同(1)相同，利用 SAS 即可证得$\triangle BAD \cong \triangle CAF$，从而证得$BD = CF$，即可得到$CF - CD = BC$；

(3)首先证明$\triangle BAD \cong \triangle CAF$，$\triangle FCD$是直角三角形，然后根据正方形的性质即可求得 DF 的长，则 OC 即可求得.

【解答】

(1)证明：见答案；

解：(2)：$\because$在$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$\angle ABC = 45°$，

$\therefore \angle ACB = 45°$，

$\therefore \angle ACB = \angle ABC$，

$\therefore AB = AC$.

$\because$四边形 $ADEF$ 为正方形，

$\therefore AD = DE = EF = AF$，$\angle FAD = 90°$，

$\therefore \angle BAC = \angle FAD$，

$\therefore \angle BAC + \angle DAC = \angle FAD + \angle DAC$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAF$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACF$中，$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF, \\ AD = AF \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF(SAS)$，

$\therefore BD = CF$.

$\because BD - CD = BC$，

$\therefore CF - CD = BC$；

(3)①：$\because$在$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$\angle ABC = 45°$，

$\therefore \angle ACB = 45°$，

$\therefore \angle ACB = \angle ABC$，

$\therefore AB = AC$.

$\because$四边形$ADEF$为正方形，

$\therefore AD = DE = EF = AF$，$\angle FAD = 90°$，

$\therefore \angle BAC = \angle FAD$，

$\therefore \angle BAC - \angle BAF = \angle FAD - \angle BAF$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAF$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACF$中，$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAF, \\ AD = AF \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF(SAS)$，

$\therefore BD = CF$.

$\because CD - BD = BC$，

$\therefore CD - CF = BC$.

②见答案.