昆山提招数学模拟卷（三）

一、单选题

1．学校医务室给学生准备中药，一碗中药原来的高度是碗的$\frac{4}{5}$，静置一会高度变成碗的$\frac{2}{3}$（只计水的蒸发），则中药的浓度变为原来的（　　）倍．

A．1.7　　B．1.4　　C．1.3　　D．1.2

2．某班共 50 名同学，一位同学 1 号得流感，第 2 天传染给两位同学，第 3 天再传染给两位同学，第 4 天痊愈不在感染，求第（　　）天全班同学全被感染过．

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

3．众所周知，八纲辩证是我国中医诊断学基础，八纲分别为阴阳、表里、寒热、虚实，每纲对应病症不同，则共有多少种病症．（　　）

A．4　　B．16　　C．64　　D．256

4．某医院共有 4 个护士，需观察 45 个班，每位护士分配 9－13 个班，有（　　）种分法．

A．80　　B．106　　C．216　　D．286

5．关于函数 $y=\frac{1}{x^2-2x-3}$，下列说法正确的有（　　）

A．函数图象有最高点

B．图象关于直线 $x=1$ 对称

C．当 $x>1$，y 随 x 而增大减小

D．图象与直线 $y=x$ 仅有一个交点

二、多选题

（多选）6．已知α是锐角，则下列选项可能正确的是（　　）

A．sinα＝cosα　　B．sinα＝tanα

C．cosα＝tanα　　D．$sin\alpha+cos\alpha=\sqrt{2}$

（多选）7．三个人在传球．第一个球是甲发球．每次传球传给另外两人的概率相等，以下选项正确的是（　　）

A．第五次传球，乙、丙收到球的概率相等

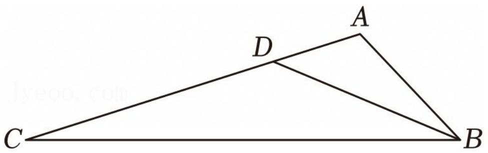
B．第五次传球，甲收到球的概率小于乙

C．传球次数越多，甲拿到球的概率越大

D．甲收到球的概率越来越接近乙

三、填空题

8．如图所示，在△ABC 中，$\angle BAC$＝120°，BD 平分$\angle ABC$，交 AC 与点 D，$AB=2\sqrt{3}$，$BD=3\sqrt{2}$，则 BC＝ ______ ．



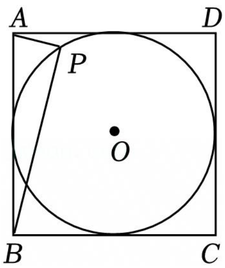
9．有若干个长为 1 或 2 的小棒，将这些小棒首尾相连，拼成一个四面体，有 ______ 种情况．

10．某校爱滑冰的人占 60%，爱滑雪的人占 50%，爱滑冰或滑雪的人占 70%，已知随机抽取一人爱滑雪，则此人爱滑冰的概率是________．

11．已知 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+(m+1)x+1=0$ 的两个根，且 $0<x_1<1<x_2<3$，求整数 m＝________．

12．已知$\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$，若 $x|5-2ax|\leqslant 1$ 恒成立，则 a 得取值范围是____________________．

13．如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，圆 O 是正方形的内切圆，P 为圆上一点，连接 PA、PB，则$\sqrt{2}PA+PB$的最小值为 ______________．



四、解答题

14．计算：

（1）$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{50^2-1}=$____________________；

（2）是否存在一个实数 M，使以下式子恒成立：

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<M.$$

15．在平面直角坐标系 xOy 内，

（1）E、F 两点坐标分别为（﹣1，0）、（1，0），以 O 为圆心，$\sqrt{2}$长为半径画圆，有一直线过点 E，交⊙O 与 A，B 两点，且 $BE=5AE$，求 AF 的长；

（2）在双曲线$y=\dfrac{k}{x}$上有点 P，连接 PE，PF，且 PE^2+PF^2 的最小值为 6，求 k 的值．

16．已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$．

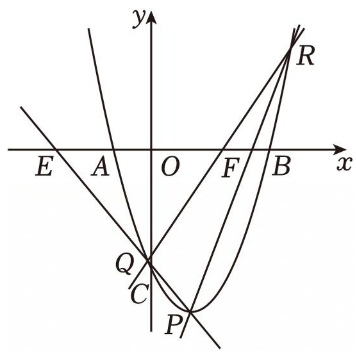
（1）分别求 xy，x^3+y^3，x^4+y^4 的值；

（2）n 为正整数，x^n+y^n 是否构成有理数，若是说明理由，若不是请举出反例．

17．在平面直角坐标系中，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 顶点为 P，与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．

（1）求 $\sin\angle ACB$；

（2）点 E、点 F 分别在 x 轴上，且 $OE=OF$（E，F 不重合），连接 PE，PF，直线 PE，PF 交抛物线于 Q、R 两点，直线 QR 是否经过一个定点，有请证明．



参考答案与试题解析

一、单选题

1．学校医务室给学生准备中药，一碗中药原来的高度是碗的$\frac{4}{5}$，静置一会高度变成碗的$\frac{2}{3}$（只计水的蒸发），则中药的浓度变为原来的（　　）倍．

A．1.7　　B．1.4　　C．1.3　　D．1.2

【分析】设原溶质质量为 m，原溶液的体积为$V_1=\frac{4}{5}S$（S 为碗的横截面积），蒸发后的体积为$V_2=\frac{2}{3}S$，根据浓度＝溶质质量÷溶液体积可得出原浓度$C_1=\frac{m}{V_1}$，新浓度为$C_2=\frac{m}{V_2}$，然后根据分式的除法法则计算$\frac{C_2}{C_1}$即可．

【解答】解：设原溶质质量为 m，原溶液的体积为$V_1=\frac{4}{5}S$（S 为碗的横截面积），蒸发后的体积为$V_2=\frac{2}{3}S$，

则原浓度$C_1=\frac{m}{V_1}$，新浓度为$C_2=\frac{m}{V_2}$，

$\therefore\frac{C_2}{C_1}=\frac{\frac{m}{V_2}}{\frac{m}{V_1}}=\frac{\frac{4}{5}S}{\frac{2}{3}S}=1.2$．

∴故选：D．

2．某班共 50 名同学，一位同学 1 号得流感，第 2 天传染给两位同学，第 3 天再传染给两位同学，第 4 天痊愈不在感染，求第（　　）天全班同学全被感染过．

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【分析】理解传染规律，并计算累计感染人数，直到累计总人数等于或超过 50 即可得到答案．

【解答】解：第 1 天：初始感染人数 1 人，累计人数为 1 人；

第 2 天：1 人传染给 2 人，新增 2 人，累计人数为 1+2＝3（人）；

第 3 天：第 2 天新增的 2 人，加上第一天的 1 人共 3 人，再各传染给 2 人，新增 2×3＝6（人），累计人数为 3+6＝9（人）；

第 4 天：第 3 天新增的 6 人，加上第 2 天新增的 2 人共 8 人，再各传染给 2 人，新增 2×8＝16（人），累计人数为 9+16＝25（人），

第 5 天：第 4 天新增的 16 人，加上第 3 天新增 6 人共 22 人，再各传染 2 人，新增 2×22＝44（人），累计人数为 25+44＝69（人），超过本班总人数 50 人，

即第 5 天全班同学全被感染过，

综上所述，只有选项 B 正确，符合题意，

故选：B．

3．众所周知，八纲辩证是我国中医诊断学基础，八纲分别为阴阳、表里、寒热、虚实，每纲对应病症不同，则共有多少种病症．（　　）

A．4　　B．16　　C．64　　D．256

【分析】利用乘法即可得出病症的种类．

【解答】解：∵八纲分别为阴阳、表里、寒热、虚实，即每组包含两种对立状态，

∴病症的种类共有：2×2×2×2＝16（种），

故选：B．

4．某医院共有 4 个护士，需观察 45 个班，每位护士分配 9﹣13 个班，有（　　）种分法．

A．80　　B．106　　C．216　　D．286

【分析】将问题转化为需观察 9 个班，每位护士分配 0﹣4 个班，设 4 个护士分别分配 a，b，c，d 个班，且 $0\leqslant a\leqslant 4$，$0\leqslant b\leqslant 4$，$0\leqslant c\leqslant 4$，$0\leqslant d\leqslant 4$，且为整数，再分别列出可能的结果即可得出答案．

【解答】解：∵医院共有 4 个护士，需观察 45 个班，每位护士分配 9﹣13 个班，

又∵45﹣4×9＝9，13﹣9＝4，

∴可将问题转化为需观察 9 个班，每位护士分配 0﹣4 个班，

设 4 个护士分别分配 a，b，c，d 个班，且 $0\leqslant a\leqslant 4$，$0\leqslant b\leqslant 4$，$0\leqslant c\leqslant 4$，$0\leqslant d\leqslant 4$，且为整数，

当 $a=4$，$b=4$ 时，$c+d=9-4-4=1$，则有 2 种分法，即 $0+1=1$，$1+0=1$；

当 $a=4$，$b=3$ 时，$c+d=9-4-3=2$，则有 3 种分法，即 $0+2=2$，$2+0=2$，$1+1=2$；

当 $a=4$，$b=2$ 时，$c+d=9-4-2=3$，则有 4 种分法，即 $0+3=3$，$3+0=3$，$2+1=3$，$1+2=3$；

当 $a=4$，$b=1$ 时，$c+d=9-4-1=4$，则有 5 种分法，即 $0+4=4$，$4+0=4$，$3+1=4$，$1+3=4$，$2+2=4$；

当 $a=4$，$b=0$ 时，$c+d=9-4-0=5$，则有 4 种分法，即 $1+4=5$，$4+1=5$，$3+2=5$，$2+3=5$；

同理，当 $a=3$，$b=4$ 时，$c+d=2$，则有 3 种分法；

当 $a=3$，$b=3$ 时，$c+d=9-3-3=3$，则有 4 种分法；

当 $a=3$，$b=2$ 时，$c+d=9-3-2=4$，则有 5 种分法；

当 $a=3$，$b=1$ 时，$c+d=9-3-1=5$，则有 4 种分法；

当 $a=3$，$b=0$ 时，$c+d=9-3-0=6$，则有 3 种分法，即 $2+4=6$，$4+2=6$，$3+3=6$；

当 $a=2$，$b=4$ 时，$c+d=9-2-4=3$，则有 4 种分法；

当 $a=2$，$b=3$ 时，$c+d=9-2-3=4$，则有 5 种分法；

当 $a=2$，$b=2$ 时，$c+d=9-2-2=5$，则有 4 种分法；

当 $a=2$，$b=1$ 时，$c+d=9-2-1=6$，则有 3 种分法；

当 $a=2$，$b=0$ 时，$c+d=9-2-0=7$，则有 2 种分法，即 $3+4=7$，$4+3=7$；

当 $a=1$，$b=4$ 时，$c+d=9-1-4=4$，则有 5 种分法；

当 $a=1$，$b=3$ 时，$c+d=9-1-3=5$，则有 4 种分法；

当 $a=1$，$b=2$ 时，$c+d=9-1-2=6$，则有 3 种分法；

当 $a=1$，$b=1$ 时，$c+d=9-1-1=7$，则有 2 种分法；

当 $a=1$，$b=0$ 时，$c+d=9-1=8$，则有 1 种分法，即 $4+4=8$；

当 $a=0$，$b=4$ 时，$c+d=9-4=5$，则有 4 种分法；

当 $a=0$，$b=3$ 时，$c+d=9-3=6$，则有 3 种分法；

当 $a=0$，$b=2$ 时，$c+d=9-2=7$，则有 2 种分法；

当 $a=0$，$b=1$ 时，$c+d=9-1=8$，则有 1 种分法；

综上，共有 $2+3+4+5+4+3+4+5+4+3+4+5+4+3+2+5+4+3+2+1+4+3+2+1=80$（种），

故选：A．

5．关于函数 $y=\frac{1}{x^2-2x-3}$，下列说法正确的有（　　）

A．函数图象有最高点

B．图象关于直线 $x=1$ 对称

C．当 $x>1$，y 随 x 而增大减小

D．图象与直线 $y=x$ 仅有一个交点

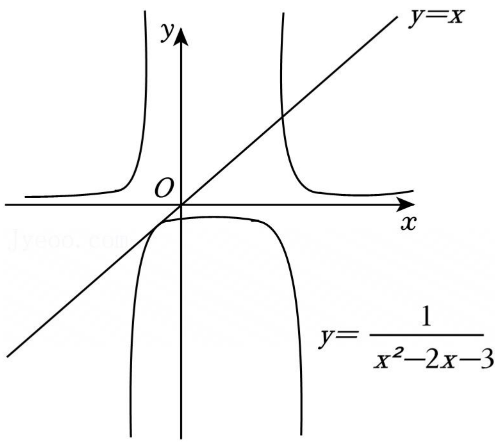
【分析】先求出坐标量 x 的取取值范围，然后画出函数的图象的草图，然后数学结合逐项判断即可．

【解答】解：设 $x^2-2x-3=0$，

解得：$x=-1$ 或 $x=3$，

∴函数$(12-\frac{3}{2}x)\times(8-x)=\frac{3}{2}x\cdot x$的自变量取值范围为：$x\neq-1$ 且 $x\neq3$，

画出$(12-\frac{3}{2}x)\times(8-x)=\frac{3}{2}x\cdot x$与 $y=x$ 的草图如下：



，

A、函数图象没有最高点，说法错误；

B、图象关于直线 $x=1$ 对称，说法正确；

C、当 $x>1$ 时，函数图象在 x 轴下方，当 $x>3$ 时，函数图象部分在 x 轴上方，则 y 没有随 x 的增大而减小，说法错误；

D、图象与直线 $y=x$ 有两个交点，说法错误，

故选：B.

二、多选题

（多选）6．已知α是锐角，则下列选项可能正确的是（　　）

A．sinα＝cosα　　　　B．sinα＝tanα

C．cosα＝tanα　　　　D．$sin\alpha+cos\alpha=\sqrt{2}$

【分析】选项 A 利用特殊角α＝45° 的三角函数值判断．选项 B 根据正切函数定义变形等式，结合锐角三角函数取值范围判断．选项 C 将等式变形后结合同角三角函数关系转化为方程求解，依据锐角正弦值范围判断．选项 D 借助特殊角α＝45° 的三角函数值判断．

【解答】解：根据锐角三角函数的性质及特殊角三角函数值逐项分析判断如下：

A．当α＝45° 时，根据特殊角的三角函数值，$sin45°=cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时等式成立，所以该选项可能正确，符合题意．

B．因为$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$，那么 sinα＝tanα可化为$sin\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$．由于α是锐角，sinα≠0（因为 0°＜α＜90° 时，sinα＞0），等式两边同时除以 sinα，得到 cosα＝1．但对于锐角α，cosα的取值范围是（0，1），所以 cosα≠1，该等式不成立，所以该选项不可能正确，不符合题意．

C．因为$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$，所以 cosα＝tanα可化为$cos\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$，即 $\cos^2\alpha$＝sinα．又因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，把 $\cos^2\alpha$＝sinα 代入可得 $\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$．根据求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，可得 $sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

0＜sinα＜1，$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$＜0 舍去，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0.618$，所以存在这样的锐角α使等式成立，所以该选项可能正确，符合题意；

D．当α＝45° 时，$sin\alpha+cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，所以该选项可能正确，符合题意；

故选：ACD.

（多选）7．三个人在传球．第一个球是甲发球．每次传球传给另外两人的概率相等，以下选项正确的是（　　）

A．第五次传球，乙、丙收到球的概率相等

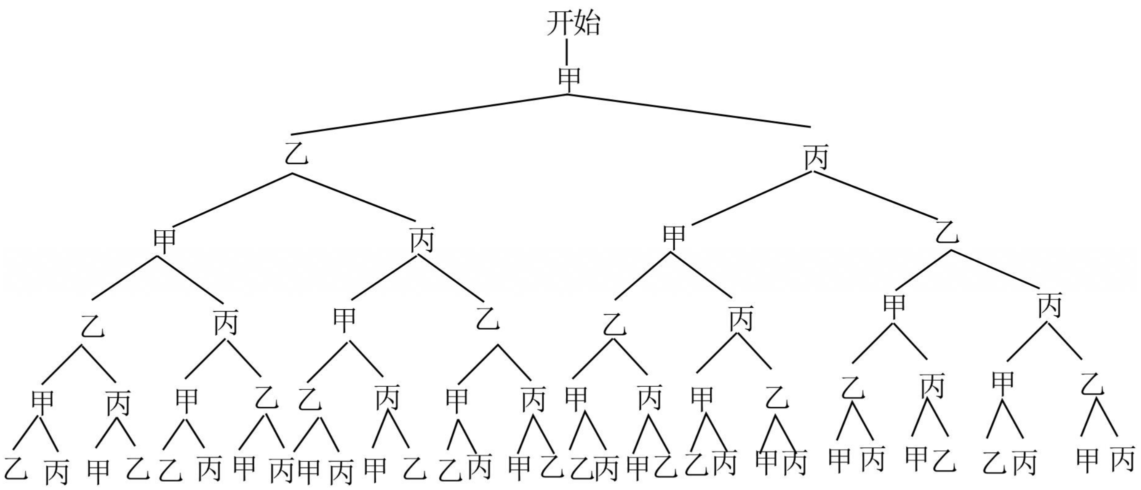
B．第五次传球，甲收到球的概率小于乙

C．传球次数越多，甲拿到球的概率越大

D．甲收到球的概率越来越接近乙

【分析】先画树状图法，得出 5 次传球后得共有 32 种等可能结果，经过 5 次传球后球回到甲手中的结果有 10 种，经过 5 次传球后球回到乙手中的结果有 11 种，经过 5 次传球后球回到丙手中的结果有 11 种，再结合每个选项的情况进行分析，即可作答．

【解答】解：依题意，画树状图如图所示，



共有 32 种等可能结果，经过 5 次传球后球回到甲手中的结果有 10 种，经过 5 次传球后球回到乙手中的结果有 11 种，经过 5 次传球后球回到丙手中的结果有 11 种，

∴经过 5 次传球后球回到甲手中的概率为：$\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$，

经过 5 次传球后球回到乙手中的概率为：$\frac{11}{32}$，

经过 5 次传球后球回到丙手中的概率为：$\frac{11}{32}$，

故第五次传球，乙、丙收到球的概率相等，即 A 选项符合题意；

∵$\frac{11}{32}>\frac{10}{32}$，

故第五次传球，甲收到球的概率小于乙，即 B 选项符合题意；

由树状图得第一次传球，甲拿到球的概率为 0，

第二次传球，甲拿到球的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

第三次传球，甲拿到球的概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

第四次传球，甲拿到球的概率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

第五次传球，甲拿到球的概率为$\frac{5}{16}$，

$\because \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$，$\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$，

故传球次数越多，甲拿到球的概率越大是错误的，即 C 选项不符合题意；

由树状图得第一次传球，乙拿到球的概率为$\frac{1}{2}$，

第二次传球，乙拿到球的概率为$\frac{1}{4}$，

第三次传球，乙拿到球的概率为$\frac{3}{8}$，

第四次传球，乙拿到球的概率为$\frac{5}{16}$，

第五次传球，乙拿到球的概率为$\frac{11}{32}$，

则$\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$，$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$，$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$，$\frac{5}{16} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{16}$，$\frac{11}{32} - \frac{5}{16} = \frac{1}{32}$，

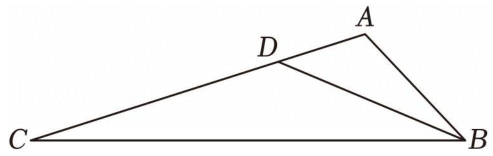
$\because \frac{1}{2} > |-\frac{1}{4}| > \frac{1}{8} > |-\frac{1}{16}| > \frac{1}{32}$，

故甲收到球的概率越来越接近乙是正确的，即 D 选项符合题意；

故选：ABD．

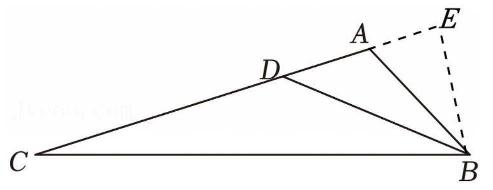
三、填空题

8．如图所示，在△ABC 中，∠BAC＝120°，BD 平分∠ABC，交 AC 与点 D，$AB = 2\sqrt{3}$，$BD = 3\sqrt{2}$，则 BC＝__6__．



【分析】过点 B 作 $BE \perp CA$ 交 CA 延长线于点 E，由∠BAC＝120°得出∠BAE＝180°－∠BAC＝60°，解 Rt△BAE 可得 BE＝3，利用勾股定理求得$DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = 3$，得出∠$BDE$＝∠$EBD$＝45°，再利用角平分线的定义和三角形外角的性质推出∠C＝30°，得到 BC＝2BE，代入数据即可求解．

【解答】解：如图，过点 B 作 $BE \perp CA$ 交 CA 延长线于点 E，则∠E＝90°，



由条件可知∠BAE＝180°－∠BAC＝60°，

$\because sin\angle BAE = \frac{BE}{AB} = sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore BE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$，

$\therefore DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-3^2}=3$，

∴$BE=DE$，

∴△BDE 是等腰直角三角形，∠BDE=∠EBD=45°，

∴∠ABD=∠BAE﹣∠BDE=60°﹣45°=15°，

∵BD 平分∠ABC，

∴∠ABC=2∠ABD=30°，

∴∠C=∠BAE﹣∠ABC=30°，

又∵∠E=90°，

∴BC=2BE=2×3=6.

故答案为：6.

9．有若干个长为 1 或 2 的小棒，将这些小棒首尾相连，拼成一个四面体，有 <u>5</u> 种情况.

【分析】根据四面体的特点，三角形三边数量关系，分类讨论即可.

【解答】解：根据题意可知，四面体由 4 个面，6 条棱组成，每个面都是三角形，

∴当四面体的棱长都是 1 时，每个面的边长均为 1，能拼成正四面体，符合题意；

当四面体的棱长都是 2 时，每个面的边长均为 2，能拼成正四面体，符合题意；

当四面体的棱长由 1 和 2 组合时，

若一条边长为 1，其余为 2，能拼成符合题意；

若两条边长为 1，其余为 2，能拼成符合题意；

若三条边长为 1，其余为 2，能拼成符合题意；

若四条边长为 1，两条边长为 2，不能拼成不符合题意；

若四条边长为 1，一条边长为 2，不能拼成不符合题意；

综上所述，共有 5 种.

故答案为：5.

10．某校爱滑冰的人占 60%，爱滑雪的人占 50%，爱滑冰或滑雪的人占 70%，已知随机抽取一人爱滑雪，则此人爱滑冰的概率是 <u>0.8</u> .

【分析】先根据题意求出既爱滑冰又爱滑雪的人的占比，再根据概率公式求解即可.

【解答】解：由题意得，既爱滑冰又爱滑雪的人占 60%+50%﹣70%=40%，

∴随机抽取一人爱滑雪，则此人爱滑冰的概率是$\frac{40\%}{50\%}=0.8$，

故答案为：0.8．

11．已知 x_1，x_2 是一元二次方程 x^2+（$m+1$）$x+1=0$ 的两个根，且 $0<x_1<1<x_2<3$，求整数 $m=$ ＿﹣4＿ ．

【分析】先根据 $x_1+x_2=-$（$m+1$），$x_1x_2=1$，求出﹣$5<m<-2$，得到整数 $m=-3$ 或 $m=-4$，再验证满足 $\Delta=$（$m+1$）$^2-4>0$ 的值即可．

【解答】解：∵一元二次方程 x^2+（$m+1$）$x+1=0$ 有两个根，

∴ $\Delta=$（$m+1$）$^2-4>0$，$x_1+x_2=-$（$m+1$），$x_1x_2=1$，

∵$0<x_1<1<x_2<3$，

∴$1<x_1+x_2<4$，

∴$1<-$（$m+1$）<4，

解得﹣$5<m<-2$，

∵m 是整数，

∴$m=-3$ 或 $m=-4$，

当 $m=-3$ 时，$\Delta=$（$m+1$）$^2-4=0$，方程有两个相等的实数根，不合题意；

当 $m=-4$ 时，$\Delta=$（$m+1$）$^2-4=5>0$，方程有两不相等的实数根，符合题意；

故答案为：﹣4．

12．已知$\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$，若 $x|5-2ax|\le 1$ 恒成立，则 a 得取值范围是＿$\frac{25}{8}\le a\le 7$＿ ．

【分析】根据$\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$，得到$|5-2ax|\le\frac{1}{x}$，进而得到$-\frac{1}{x}\le 5-2ax\le\frac{1}{x}$，得到$\frac{5-\frac{1}{x}}{2x}\le a\le\frac{5+\frac{1}{x}}{2x}$，令$t=\frac{1}{x}$，得到 $2\le t\le 3$，$\frac{5t-t^2}{2}\le a\le\frac{5t+t^2}{2}$，分别求出$\frac{5t-t^2}{2}$的最大值和$\frac{5t+t^2}{2}$的最小值，即可得出结果．

【解答】解：由条件可知$|5-2ax|\le\frac{1}{x}$，

∴$-\frac{1}{x}\le 5-2ax\le\frac{1}{x}$，

∴$\frac{5-\frac{1}{x}}{2x}\le a\le\frac{5+\frac{1}{x}}{2x}$，

令$t=\frac{1}{x}$，则：$2\le t\le 3$，$\frac{5t-t^2}{2}\le a\le\frac{5t+t^2}{2}$，

令$y=\frac{5t-t^2}{2}=-\frac{1}{2}(t-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{8}$，

则当$t=\frac{5}{2}$时，y 有最大值为$\frac{25}{8}$；

令$y=\frac{5t+t^2}{2}=\frac{1}{2}(t+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{8}$，

∴当$t>-\frac{5}{2}$时，y 随着 t 的增加而增加，

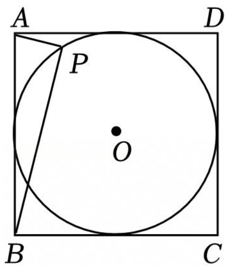
当 t=2 时，y 有最小值为：$\frac{1}{2}\times(2+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{8}=7$，

∵$\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$时，$x|5-2ax|\leqslant 1$ 恒成立，

∴$\frac{25}{8}\leq a\leq 7$；

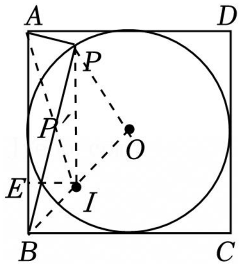
故答案为：$\frac{25}{8}\leq a\leq 7$．

13．如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，圆 O 是正方形的内切圆，P 为圆上一点，连接 PA、PB，则$\sqrt{2}PA+PB$的最小值为 <u>$2\sqrt{5}$</u> ．



【分析】先求出圆半径及相关线段长度，确定 OP、OB、OI 的值，证明△BOP∽△POI，得出$PI=\frac{\sqrt{2}}{2}PB$，将$\sqrt{2}PA+PB$转化为$\sqrt{2}(PA+PI)$，依据两点之间线段最短，当 A、P、I 共线时，PA+PI 最小，通过作垂线求出 AI 长度即 PA+PI 最小值，计算得出$\sqrt{2}PA+PB$的最小值．

【解答】解：设⊙O 半径为 r，



由条件可知$OP=r=\frac{1}{2}BC=2$，$OB=\sqrt{2}r=2\sqrt{2}$，

取 OB 的中点 I，连接 PI，

∴$OI=IB=\sqrt{2}$，

∵$\frac{OP}{OI}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\frac{OB}{OP}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

∴$\frac{OP}{OI}=\frac{OB}{OP}$，∠$O$ 是公共角，

∴△BOP∽△POI，

∴$\frac{PI}{PB}=\frac{OI}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$PI=\frac{\sqrt{2}}{2}PB$，

$\therefore AP+\frac{\sqrt{2}}{2}PB=AP+PI$，

$\therefore$当 A、P、I 在一条直线上时，$AP+\frac{\sqrt{2}}{2}PB$最小，

作 $IE\perp AB$ 于 E，

由条件可知$IE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}BI=1$，

$\therefore AE=AB-BE=3$，

$\therefore AI=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore AP+\frac{\sqrt{2}}{2}PB$最小值$=AI=\sqrt{10}$，

$\because \sqrt{2}PA+PB=\sqrt{2}(PA+\frac{\sqrt{2}}{2}PB)$，

$\therefore AP+\frac{\sqrt{2}}{2}PB$的最小值是$\sqrt{2}AI=\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$.

故答案为：$2\sqrt{5}$.

四、解答题

14．计算：

（1）$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{50^2-1}=$__$\frac{25}{51}$__；

（2）是否存在一个实数 M，使以下式子恒成立：

$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<M$.

【分析】（1）先整理原式$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{49\times51}$，再得$\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{51})$，即可作答.

（2）先把各二次根式化简为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可.

【解答】解：（1）$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\cdots+\frac{1}{50^2-1}=\frac{1}{(2-1)(2+1)}+\frac{1}{(4-1)(4+1)}+\frac{1}{(6-1)(6+1)}+\cdots+\frac{1}{(50-1)(50+1)}=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{49\times51}=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{49}-\frac{1}{51})$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{51})$

$=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{51})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{50}{51}$

$=\frac{25}{51}$;

（2）不存在，过程如下：

依题意，$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1}+\sqrt{2})(\sqrt{1}-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$，

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

……，

以此类推得$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1$，

$\because \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<M$，

$\therefore \sqrt{n+1}-1<M$，

$\because n\geqslant 0$，

$\therefore \sqrt{n+1}-1$ 是可以无限大的，故不存在一个实数 M，使原式子恒成立．

15．在平面直角坐标系 xOy 内，

（1）E、F 两点坐标分别为（－1，0）、（1，0），以 O 为圆心，$\sqrt{2}$长为半径画圆，有一直线过点 E，交⊙O 与 A，B 两点，且 $BE=5AE$，求 AF 的长；

（2）在双曲线$y=\frac{k}{x}$上有点 P，连接 PE，PF，且 PE^2+PF^2 的最小值为 6，求 k 的值．

【分析】(1) 设⊙O 与 x 轴的交点分别为 M、N，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于点 G，由题意，易证△AEM∽△NEB，推出 $AE\cdot BE=ME\cdot NE$，根据 $BE=5AE$，求得$AE=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BE=\sqrt{5}$，由垂径定理，易得$EH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，利用勾股定理求出$OH=\frac{\sqrt{5}}{5}$，根据平行线分线段成比例及中位线定理，求得$FG=2OH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，再由$AG=\sqrt{5}$及勾股定理即可求出 AF 的长；

(2)设点P的坐标为$(x,\ \frac{k}{x})$，利用$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，化简$PE^2+PF^2=2x^2+\frac{2k^2}{x^2}+2\geq 2\sqrt{2x^2\times\frac{2k^2}{x^2}}+2=4|k|+2$，由已知条件，即可求出 k 值．

【解答】解：(1) E、F 两点坐标分别为（－1，0）、（1，0），以 O 为圆心，$\sqrt{2}$长为半径画圆，$BE=5AE$，如图 1，设⊙O 与 x 轴的交点分别为 M、N，连接 AM、BN、AF，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于点 G，

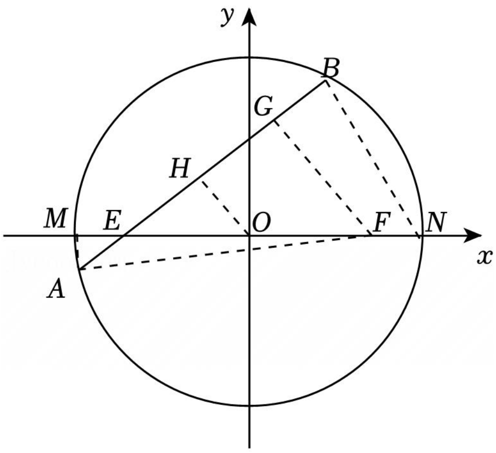


图1

$\therefore ME=\sqrt{2}-1$，$NE=\sqrt{2}+1$，设 $AE=k$（$k>0$），则 $BE=5k$，

$\because \angle M=\angle B$，$\angle AEM=\angle NEB$，

$\therefore \triangle AEM \backsim \triangle NEB$，

$\therefore \frac{AE}{NE}=\frac{ME}{BE}$，

$\therefore AE \cdot BE=ME \cdot NE$，

$\therefore k\times 5k=(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)$，即 $5k^2=1$，

$\therefore k_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$k_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$（不合题意，舍去），

即$AE=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BE=\sqrt{5}$，

$\therefore AB=AE+BE=\frac{\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

$\because OH\perp AB$，

$\therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore EH=AH-AE=\frac{1}{2}AB-AE=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

在 Rt$\triangle EHO$ 中，由勾股定理得：$OH=\sqrt{OE^2-EH^2}=\sqrt{1^2-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\because OH\perp AB$，$FG\perp AB$，

$\therefore OH/\!/FG$，

$\therefore \frac{OE}{OF}=\frac{EH}{HG}$，

$\because OE=OF$，

$\therefore EH=HG$，

$\therefore OH=\frac{1}{2}FG$，

∴$FG=2OH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∵$AG=AE+EH+HG=\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$，

在 Rt△AGF 中，由勾股定理得：$AF=\sqrt{AG^2+FG^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\sqrt{145}}{5}$;

（2）设点 P 的坐标为$(x，\frac{k}{x})$，

∵$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$，

∴$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$，即$a+b\geq 2\sqrt{ab}$（当 $a=b$ 时，不等式取等号），

如图 2，

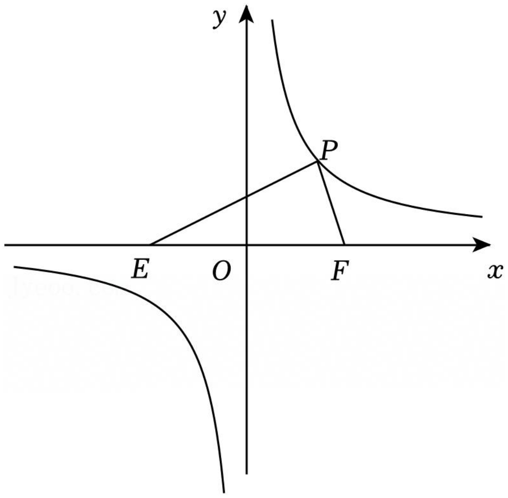


图2

∵E、F 两点坐标分别为（﹣1，0）、（1，0），

∴PE^2+PF^2

$=(x+1)^2+\frac{k^2}{x^2}+(x-1)^2+\frac{k^2}{x^2}$

$=2x^2+\frac{2k^2}{x^2}+2$

$\geq 2\sqrt{2x^2\times\frac{2k^2}{x^2}}+2$

$=4\sqrt{k^2}+2$

$=4|k|+2$（当$x=\frac{k}{x}$时，不等式取等号），

∵PE^2+PF^2 的最小值为 6，

∴$4|k|+2=6$，

∴$k=\pm 1$.

16．已知 $x+y=1$，$x^2+y^2=2$．

（1）分别求 xy，x^3+y^3，x^4+y^4 的值；

（2）n 为正整数，x^n+y^n 是否构成有理数，若是说明理由，若不是请举出反例．

【分析】（1）将（$x+y$）^{2} 展开，结合 x^2+y^2 的值可求 xy，利用立方和公式可求 x^3+y^3，通过平方和公式可求出 x^4+y^4；

（2）设$a_n=x^n+y^n$，由 $x+y=1$，$xy=-\frac{1}{2}$，得到 x 和 y 满足方程$t^2-t-\frac{1}{2}=0$，由递推关系可得$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-2}(n\geq 2)$，根据 $a_0=2$，$a_1=1$ 均为有理数，且递推系数为$\frac{1}{2}$为有理数，可得出结论．

【解答】解：（1）根据题意可知，（$x+y$）$^2=x^2+y^2+2xy=1^2=2+2xy$，

$2xy=-1$，

解得：$xy=-\frac{1}{2}$，

∵（x^2+y^2）（$x+y$）$=x^3+y^3+xy$（$x+y$），

∴$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)=2\times 1-(-\frac{1}{2})\times 1=\frac{5}{2}$，

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2^2-2\times(-\frac{1}{2})^2=\frac{7}{2}$；

（2）设$a_n=x^n+y^n$，

则 $a_1=x+y=1$，$a_2=x^2+y^2=2$，

∵（$x^{n-1}+y^{n-1}$）（$x+y$）$=x^n+y^n+xy$（$x^{n-2}+y^{n-2}$），$xy=-\frac{1}{2}$，$x+y=1$，

∴$a_n=x^n+y^n$

$=$（$x^{n-1}+y^{n-1}$）（$x+y$）$-xy$（$x^{n-2}+y^{n-2}$）

$=(x^{n-1}+y^{n-1})+\frac{1}{2}(x^{n-2}+y^{n-2})$

$=a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-2}(n\geq 3)$，

由于 $a_1=1$，$a_2=2$ 均为有理数，且递推系数为$\frac{1}{2}$为有理数，

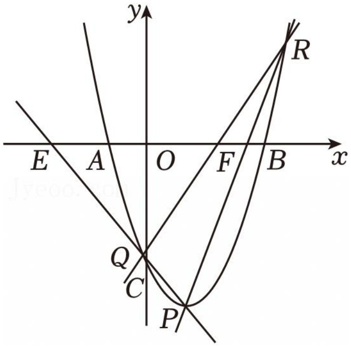
从而推出 a_3，a_4，a_5，a_6……是有理数，

∴所有 a_n 均为有理数．

17．在平面直角坐标系中，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 顶点为 P，与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．

（1）求 $\sin\angle ACB$；

（2）点 E、点 F 分别在 x 轴上，且 $OE=OF$（E，F 不重合），连接 PE，PF，直线 PE，PF 交抛物线于 Q、R 两点，直线 QR 是否经过一个定点，有请证明．



【分析】(1) 对于二次函数 $y=x^2-2x-3$，分别令 $y=0$，$x=0$，求出 A（﹣1，0），B（3，0），C（0，﹣3），从而得到 $AB=4$，$CO=3$，$BC=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{10}$．过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，根据△ABC 的面积求出 AG，从而在 Rt△ACG 中，根据正弦的定义即可求解；

（2）由二次函数 $y=x^2-2x-3$ 可得顶点 P 的坐标为（1，﹣4）．将抛物线及各点向左平移 1 个单位长度，向上平移 4 个单位长度．可得平移后对应的二次函数为 $y=x^2$，顶点为原点 O（0，0），直线 EF 的解析式为 $y=4$，O'（﹣1，4），设 E'（$x_{E'}$，4），F'（$x_{F'}$，4），由 $E'O'=F'O'$，得到 $x_{E'}+x_{F'}=-2$，设直线 $R'Q'$ 的解析式为 $y=kx+b$，点 Q'（x_1，y_1），点 R'（x_2，y_2），由方程组 $\begin{cases}y=kx+b\\y=x^2\end{cases}$ 得 $x^2-kx-b=0$，因此 $x_1+x_2=k$，$x_1x_2=-b$．求出直线 OQ' 的解析式为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，直线 OR' 的解析式为 $y=\frac{y_2}{x_2}x$，因此 $x_{E'}=\frac{4x_1}{y_1}$，$x_{F'}=\frac{4x_2}{y_2}$，又 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，即可得到 $x_{E'}+x_{F'}=\frac{4(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{4k}{-b}=-2$，得到 $b=2k$，因此直线 $R'Q'$ 的解析式为 $y=kx+2k=k(x+2)$，即直线 $R'Q'$ 过定点（﹣2，0），再由平移即可得到原直线 QR 过定点（﹣1，﹣4）．

【解答】解：(1) 二次函数 $y=x^2-2x-3$ 顶点为 P，与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，如图 1，连接 BC，

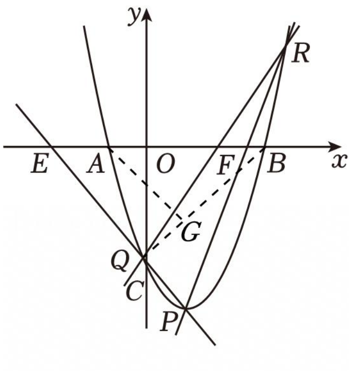


图1

当 $y=0$ 时，得：$x^2-2x-3=0$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-1$，

当 $x=0$ 时，得：$y=-3$，

∴A（﹣1，0），B（3，0），C（0，﹣3），

∴$AB=4$，$CO=3$，$BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CO=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$.

过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AG$，即 $6=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times AG$，

∴$AG=2\sqrt{2}$，

∴在 Rt△ACG 中，$sin\angle ACG=\frac{AG}{AC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$；

（2）直线 QR 过定点（﹣1，﹣4）.

证明：∵二次函数 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴顶点 P 的坐标为（1，﹣4），

如图 2，将抛物线及各点向左平移 1 个单位长度，向上平移 4 个单位长度，

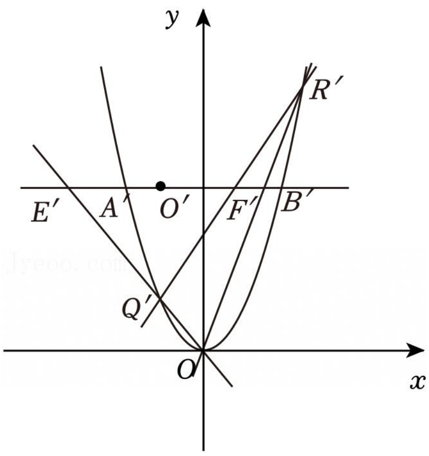


图2

∴平移后的二次函数为 $y=x^2$，顶点为原点 O（0，0），直线 EF 的解析式为 $y=4$，O'（﹣1，4），$E'O'=F'O'$，

设 E'（$x_{E'}$，4），F'（$x_{F'}$，4），

∴$\frac{x_{E'}+x_{F'}}{2}=-1$，即 $x_{E'}+x_{F'}=-2$，

设直线 $R'Q'$ 的解析式为 $y=kx+b$，点 Q'（x_1，y_1），点 R'（x_2，y_2），将两点坐标分别代入得：

$\begin{cases}y=kx+b\\y=x^2\end{cases}$，

整理得：$x^2-kx-b=0$，

∵点 Q'（x_1，y_1），点 R'（x_2，y_2）是直线 $R'Q'$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点，

∴x_1，x_2 是方程 $x^2-kx-b=0$ 的解，

∴$x_1+x_2=k$，$x_1x_2=-b$，

由点 Q'（x_1，y_1）可得直线 OQ' 的解析式为$y=\frac{y_1}{x_1}x$，

∵点 E'（$x_{E'}$，4）在直线 OQ' 上，

∴$4=\frac{y_1}{x_1}x_{E'}$，即$x_{E'}=\frac{4x_1}{y_1}$，

由点 R'（x_2，y_2）可得直线 OR' 的解析式为$y=\frac{y_2}{x_2}x$，

∵点 F'（$x_{F'}$，4）在直线 OR' 上，

∴$4=\frac{y_2}{x_2}x_{F'}$，即$x_{F'}=\frac{4x_2}{y_2}$，

∵点 Q'（x_1，y_1），点 R'（x_2，y_2）在抛物线 $y=x^2$ 上，

∴$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，

∴$x_{E'}+x_{F'}=\frac{4x_1}{y_1}+\frac{4x_2}{y_2}=\frac{4x_1}{x_1^2}+\frac{4x_2}{x_2^2}=4(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=\frac{4(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{4k}{-b}$，

∵$x_{E'}+x_{F'}=-2$，

∴$\frac{4k}{-b}=-2$，

∴$b=2k$，

∴直线 $R'Q'$ 的解析式为 $y=kx+2k=k(x+2)$，

∴当 $x=-2$ 时，$y=0$，

即直线 $R'Q'$ 过定点（－2，0），

∵点（－2，0）向右平移 1 个单位长度，向下平移 4 个单位长度，得到点（－1，－4），

∴原直线 QR 过定点（－1，－4）.