昆山市 2025-2026 学年第二学期高二数学期中考试模拟试题

一、单项选择题：

1. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-mx$ 为增函数，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,-1\right]$　　B. $\left[-1,1\right]$　　C. $\left(-1,1\right)$　　D. $\left[1,+\infty\right)$

2. 函数 $f\left(x\right)=a\ln x+bx^2+a^2$ 在 $x=1$ 处有极小值 5，则 $a-b=$（　　）

A. -3　　B. $\dfrac{15}{4}$　　C. -3 或 $\dfrac{15}{4}$　　D. $-\dfrac{15}{4}$ 或 3

3. 已知 $\ln 3<1.1, a=3\left(2-\ln 3\right)e^{-2}, b=3\left(3-\ln 3\right)e^{-3}, c=\ln\sqrt[3]{3}$，则（　　）

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

4. 已知函数 $f\left(x\right)=-x^2+a$，$g\left(x\right)=x^2e^x$，若对任意的 $x_2\in\left[-1,1\right]$，存在唯一的 $x_1\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$，使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(e,4\right]$　　B. $\left(e+\dfrac{1}{4},4\right]$　　C. $\left(e+\dfrac{1}{4},4\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{4},4\right)$

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 设 O 是平面 ABC 外一点，点 P 满足条件 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则直线 AP

A. 与平面 ABC 平行　　B. 是平面 ABC 的斜线

C. 是平面 ABC 的垂线　　D. 在平面 ABC 内

7. 已知 m,n,l 是三条不同的直线，α,β,γ 是三个不重合的平面，则下列说法错误的是（　　）

A. 若 $m\perp\alpha,m\perp\beta,n\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$.

B. 若 m 与 n 异面，$l\perp m,l\perp n$，则存在 α，使得 $l\perp\alpha,m//\alpha,n//\alpha$.

C. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=l$，则 $l\perp\gamma$.

D. 若 $m//\alpha,n//\beta,\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$.

8. 若过点$\left(a,b\right)$可以作曲线$y=\mathrm{e}^x$的两条切线，则（　　）

A. $\mathrm{e}^b<a$

B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$

D. $0<b<\mathrm{e}^a$

二、多项选择题：

9. 已知实数a，b，c满足$\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}$，则下列关系式中可能成立的是（　　）

A. $c>b>a$

B. $a>c>b$

C. $c>a>b$

D. $a>b>c$

10. 关于空间向量，以下说法正确的是（　　）

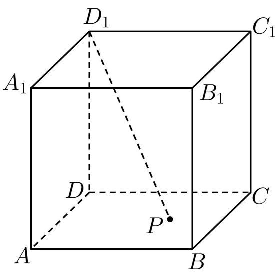
A. 空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

B. 已知$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$与任何向量都不构成空间的一组基

C. 若$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{BN}$不构成空间的一组基，那么空间四点A,B,M,N共面；

D. 设$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$是空间的一组基，则$\{\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\}$也是空间的一组基

11. 如图，已知正方体$ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P为正方形底面$ABCD$内一动点，则下列结论正确的有（　　）



A. 三棱锥B_1-A_1D_1P的体积为定值

B. 存在点P，使得$D_1P\perp AD_1$

C. 若$D_1P\perp B_1D$，则P点在正方形底面$ABCD$内的运动轨迹是线段AC

D. 若点P是AD的中点，点Q是BB_1的中点，过P，Q作平面α垂直于平面ACC_1A_1，则平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D$的截面周长为$3\sqrt{2}$

12. 甲箱中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙箱中有4个红球，3个白球和3个黑球．先从甲箱中随机取出一球放入乙箱，分别以A_1,A_2和A_3表示由甲箱取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以B表示由乙箱取出的球是红球的事件，则（　　）

A. 事件B与事件A_3相互独立

B. $P\left(A_1|B\right)=\frac{5}{9}$

C. $P\left(A_2B\right)=\frac{6}{55}$

D. $P\left(B\right)=\frac{9}{22}$

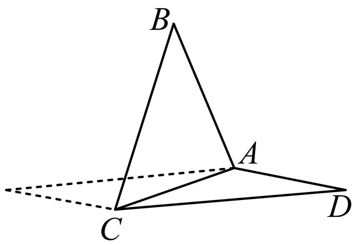
三、填空题：

13. 一个病人服用某种新药后被治愈的概率为0.9.则服用这种新药的4个病人中至少3人被治愈的概率为_______（用数字作答）.

14. 已知函数$f(x)$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数，且$f(1)=0$. 若$x<0$时，$xf'(x)-f(x)>0$，则不等式$f(x)>0$的解集为__________.

15. 在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2, AD=2, AA_1=4$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$，则$BC_1$与$CA_1$所成角的正弦值为______.

16. 如图，已知菱形$ABCD$中，边长为$2, \angle ABC=60^{\circ}$，沿对角线AC折叠之后，使得平面$BAC\perp$平面DAC，则二面角$B-CD-A$的余弦值为__________.



四、解答题：

17. 已知空间三点$A(0,2,3)$，$B(-2,1,6)$，$C(1,-1,5)$.

（1）求以AB，AC为邻边的平行四边形的面积；

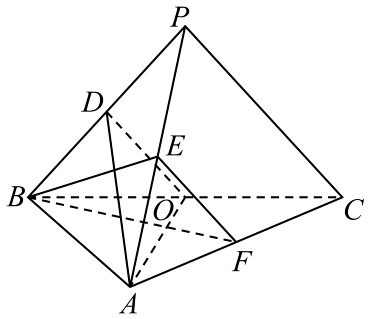
（2）设$D(x,1,-1)$，若A，B，C，D四点共面，求x的值

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}-\left(a+1\right)\ln x-\frac{1}{2}\left(a\in R,a\neq 0\right)$.

（1）当时 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若对任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，都有 $f(x)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

19. 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC的中点分别为D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点F在AC上，$BF\perp AO$.



（1）证明：$EF//$平面ADO；

（2）证明：平面$ADO\perp$平面BEF；

（3）求二面角$D-AO-C$的正弦值.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 在 $x=-\dfrac{2}{3}$ 处取得极值，其图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与直线 $y+2=0$ 平行.

（1）求 a,b 的值；

（2）若对任意 $x\in\left[-1,2\right]$，都有 $f\left(x\right)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

21. 某年级有 6 名数学老师，其中男老师 4 人，女老师 2 人，任选 3 人参加校级技能大赛.

（1）设所选 3 人中女老师人数为 X，求 X 的方差；

（2）如果依次抽取 2 人参加县级技能大赛，求在第 1 次抽到男老师的条件下，第 2 次抽到也是男老师的概率.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}x-\ln x, g(x)=x\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上的最小值；

（2）证明：当 $x>0$ 时，$xf(x)<g(x)$.

昆山市 2025-2026 学年第二学期高二数学期中考试模拟试题

答案与解析

一、单项选择题：

1. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-mx$ 为增函数，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,-1\right]$　　B. $\left[-1,1\right]$　　C. $\left(-1,1\right)$　　D. $\left[1,+\infty\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意 $f'\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，从而可得出答案.

【详解】$f'\left(x\right)=\cos x-m$，由函数 $f\left(x\right)=\sin x-mx$ 为增函数

所以 $f'\left(x\right)=\cos x-m\geq 0$ 恒成立，即 $m\leq\cos x$

由 $-1\leq\cos x\leq 1$，所以 $m\leq -1$

故选：A

2. 函数 $f\left(x\right)=a\ln x+bx^2+a^2$ 在 $x=1$ 处有极小值 5，则 $a-b=$（　　）

A. -3　　B. $\dfrac{15}{4}$　　C. -3 或 $\dfrac{15}{4}$　　D. $-\dfrac{15}{4}$ 或 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据极值点的导数为 0 和极值点处的函数值条件求出 a,b 的值，再进行验证即可求解.

【详解】$f'\left(x\right)=\dfrac{a}{x}+2bx$，由题意得 $\begin{cases}f'\left(1\right)=a+2b=0\\ f(1)=b+a^2=5\end{cases}$，

即 $2a^2-a-10=\left(a+2\right)\left(2a-5\right)=0$，解得 $\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\ b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$，

当 $a=-2,b=1$ 时，$f'\left(x\right)=\dfrac{-2}{x}+2x=\dfrac{2x-2}{x}$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，符合题意；

当 $a=\frac{5}{2},b=-\frac{5}{4}$ 时，$f'(x)=\frac{5}{2x}-\frac{5}{2}=\frac{5-5x}{2x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，，

所以 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值，不符合题意；

所以 $a=-2,b=1$，$a-b=-3$.

故选：A.

3. 已知 $\ln 3<1.1,a=3(2-\ln 3)e^{-2},b=3(3-\ln 3)e^{-3},c=\ln\sqrt[3]{3}$，则（　　）

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据作差法比较 a 与 b 的大小关系，然后构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，利用导数判断函数单调性，借助函数的单调性即可比较 b 与 c 即 a 与 c 的大小关系.

【详解】已知 $a=3(2-\ln 3)e^{-2}$，$b=3(3-\ln 3)e^{-3}$，

则 $a-b=3(2-\ln 3)e^{-2}-3(3-\ln 3)e^{-3}=\frac{3e(2-\ln 3)-3(3-\ln 3)}{e^3}=\frac{3[(2e-e\ln 3)-3+\ln 3]}{e^3}$

$=\frac{3[2e-3+(1-e)\ln 3]}{e^3}$.

由于 $\ln 3<1.1$，所以 $2e-3+(1-e)\ln 3>0$，得 $a>b$.

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $a=3(2-\ln 3)e^{-2}=\frac{\ln\frac{e^2}{3}}{\frac{e^2}{3}}=f\left(\frac{e^2}{3}\right)$，$b=3(3-\ln 3)e^{-3}=\frac{\ln\frac{e^3}{3}}{\frac{e^3}{3}}=f\left(\frac{e^3}{3}\right)$，

$c=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln 3}{3}=f(3)$.

而 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 且 $x>0$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(0,e)$ 上单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(e,+\infty)$ 上单调递减，

由于$\frac{e^3}{3}>3>e$，$\therefore f\left(\frac{e^3}{3}\right)<f(3)$，即$b<c$.

若$t=\frac{\ln x}{x}$有两个解，则$1<x_1<e<x_2$，$t\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，

所以$\ln x_1=tx_1$，$\ln x_2=tx_2$，所以$\ln x_1-\ln x_2=tx_1-tx_2$，$\ln x_1+\ln x_2=tx_1+tx_2$，

即$t=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，$\ln(x_1x_2)=t(x_1+x_2)$，

令$g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$（$x>1$），则$g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}>0$，

故$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)>g(1)=0$，

即在$(1,+\infty)$上，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

若$x=\frac{x_2}{x_1}$，则有$\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，即$\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_2+x_1}$.

故$t>\frac{2t}{\ln(x_1x_2)}$，所以$x_1x_2>e^2$.

当$x_1=\frac{e^2}{3}$时，有$x_2>3$，故$f\left(\frac{e^2}{3}\right)=f(x_2)<f(3)$，即$a<c$；

综上所述$b<a<c$.

故选：D

【点睛】方法点睛：在比较大小中常用的方法有三种：

（1）作差法比较大小，即若$a-b>0$，则$a>b$，否则$a<b$；

（2）作商法比较大小，即若$\frac{a}{b}>1$（$b>0$），则$a>b$，否则$a<b$；

（3）构造函数，根据函数单调性比较大小.

4. 已知函数$f(x)=-x^2+a$，$g(x)=x^2e^x$，若对任意的$x_2\in[-1,1]$，存在唯一的$x_1\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(\mathrm{e},4\right]$　　B. $\left(\mathrm{e}+\frac{1}{4},4\right]$　　C. $\left(\mathrm{e}+\frac{1}{4},4\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},4\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】利用导数求$g\left(x\right)$在$\left[-1,1\right]$上的值域记作集合A，利用二次函数的单调性求$f\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上的值域记作集合$B$，根据题意可得$A\subseteq B$，可得关于$a$的不等式组，解不等式即可.

【详解】由$g\left(x\right)=x^2\mathrm{e}^x$可得$g'\left(x\right)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x=x\left(x+2\right)\mathrm{e}^x$，

当$-1<x<0$时，$g'\left(x\right)<0$；当$0<x<1$时，$g'\left(x\right)>0$；

所以$g\left(x\right)=x^2\mathrm{e}^x$在$\left(-1,0\right)$单调递减，在$\left(0,1\right)$单调递增，

所以$g\left(x\right)_{\min}=g\left(0\right)=0$，$g\left(-1\right)=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$g\left(1\right)=\mathrm{e}$，

所以$g\left(x\right)=x^2\mathrm{e}^x$在$\left[-1,1\right]$上的值域为$\left[0,\mathrm{e}\right]$，记$A=\left[0,\mathrm{e}\right]$

$f\left(x\right)=-x^2+a$的对称轴为$x=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{1}{4}$，$f\left(2\right)=a-4$，

且$f\left(x\right)=-x^2+a$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上单调递减，所以$f\left(x\right)\in\left[a-4,a-\frac{1}{4}\right)$，

记$B=\left[a-4,a-\frac{1}{4}\right)$，

若对任意的$x_2\in\left[-1,1\right]$，存在唯一的$x_1\in\left[-\frac{1}{2},2\right]$，使得$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，

则$A\subseteq B$，所以$\begin{cases}a-4\le 0\\ a-\frac{1}{4}>\mathrm{e}\end{cases}$，解得：$\mathrm{e}+\frac{1}{4}<a\le 4$，

所以实数a的取值范围是$\left(\mathrm{e}+\frac{1}{4},4\right]$，

故选：B

5. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【详解】分析：先建立空间直角坐标系，设立各点坐标，利用向量数量积求向量夹角，再根据向量夹角与线线角相等或互补关系求结果.

详解：以 D 为坐标原点，DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，则

$D(0,0,0), A(1,0,0), B_1(1,1,\sqrt{3}), D_1(0,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$，

因为 $\cos\left\langle \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{DB_1}\right\rangle = \frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\left|\overrightarrow{DB_1}\right|} = \frac{-1+3}{2\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，所以异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，选 C.

点睛：利用法向量求解空间线面角的关键在于“四破”：第一，破“建系关”，构建恰当的空间直角坐标系；第二，破“求坐标关”，准确求解相关点的坐标；第三，破“求法向量关”，求出平面的法向量；第四，破“应用公式关”.

6. 设 O 是平面 ABC 外一点，点 P 满足条件 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则直线 AP

A. 与平面 ABC 平行　　B. 是平面 ABC 的斜线

C. 是平面 ABC 的垂线　　D. 在平面 ABC 内

【答案】D

【解析】

【分析】利用空间向量运算法则得到 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$，得到答案.

【详解】$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

故直线 AP 在平面 ABC 内.

故选：D.

【点睛】本题考查了根据空间向量判断直线在平面内，意在考查学生的计算能力和空间想象能力.

7. 已知 m,n,l 是三条不同的直线，α,β,γ 是三个不重合的平面，则下列说法错误的是（　　）

A. 若 $m\perp\alpha, m\perp\beta, n\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$.

B. 若 m 与 n 异面，$l\perp m, l\perp n$，则存在 α，使得 $l\perp\alpha, m//\alpha, n//\alpha$.

C. 若$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = l$，则$l \perp \gamma$.

D. 若$m//\alpha, n//\beta, \alpha \perp \beta$，则$m \perp n$.

【答案】D

【解析】

【分析】利用线线、线面、面面关系的判定与性质一一判断即可.

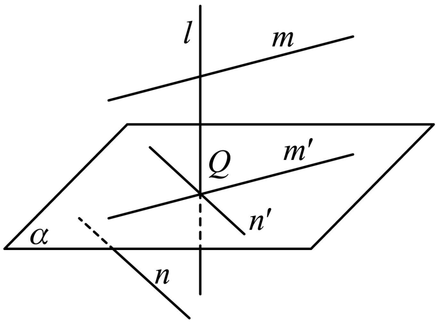
【详解】对选项 A，若$m \perp \alpha, m \perp \beta$，则$\alpha//\beta$，又$n \perp \alpha$，$\therefore n \perp \beta$. 选项 A 正确；

对选项 B，在l上取点Q，分别作m,n的平行线m',n'，这两条相交直线确定平面α，

因为$m//m', m \not\subset \alpha, m' \subset \alpha$，则$m//\alpha$，同理可证$n//\alpha$，

因为$l \perp m, l \perp n, m//m', n//n'$，所以$l \perp m', l \perp n'$，又因为$m' \cap n' = Q$，$m', n' \subset \alpha$，

所以$l \perp \alpha$，故 B 正确；



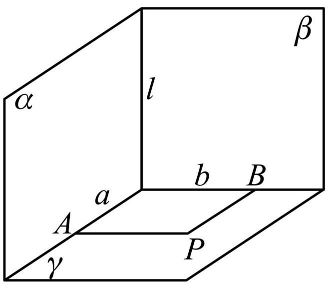
对选项 C，设$\alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = b$，在平面$\gamma$内任取一个不在直线$a,b$上的点$P$，

过点P作直线$PA \perp a, PB \perp b$，垂足分别为点A,B.

又因为$PA \subset \gamma$，$PB \subset \gamma$，$\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$，

$\therefore PA \perp \alpha, PB \perp \beta$，又$l \subset \alpha, l \subset \beta$，故$l \perp PA, l \perp PB$，

又因为$PA \cap PB = P, PA, PB \subset$平面$\gamma$，从而$l \perp \gamma$. 故选项 C 正确；



对选项 D，直线m,n的位置关系可以是任意的，比如设$\alpha \cap \beta = l$，$n \subset \alpha$且$n//l$，$m \subset \beta$，$m//l$，则

根据平行的传递性知 $m // n$，故 D 错误.

故选：D.

8. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：根据导数几何意义求得切线方程，再构造函数，利用导数研究函数图象，结合图形确定结果；

解法二：画出曲线 $y=e^x$ 的图象，根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

【详解】在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t,e^t)$，对函数 $y=e^x$ 求导得 $y'=\mathrm{e}^x$，

所以，曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t$，

由题意可知，点 (a,b) 在直线 $y=e^tx+(1-t)e^t$ 上，可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$，

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$.

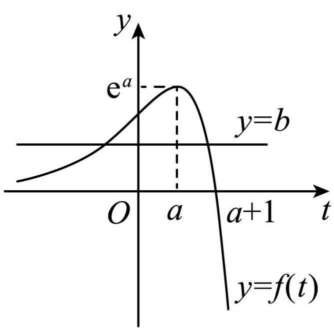
当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，

所以，$f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b<f(t)_{\max}=e^a$，

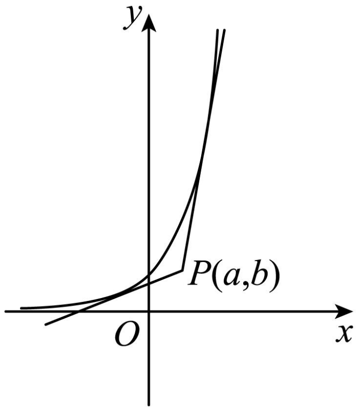
当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当$0<b<e^a$时，直线$y=b$与曲线$y=f\left(t\right)$的图象有两个交点.

故选：D.

解法二：画出函数曲线$y=e^x$的图象如图所示，根据直观即可判定点$\left(a,b\right)$在曲线下方和x轴上方时才可以作出两条切线.由此可知$0<b<e^a$.



故选：D.

【点睛】解法一是严格的证明求解方法，其中的极限处理在中学知识范围内需要用到指数函数的增长特性进行估计，解法二是根据基于对指数函数的图象的清晰的理解与认识的基础上，直观解决问题的有效方法.

二、多项选择题：

9. 已知实数a，b，c满足$\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}$，则下列关系式中可能成立的是（　　）

A. $c>b>a$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $a>b>c$

【答案】BCD

【解析】

【分析】设$\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}=t$，得到$a=\mathrm{e}^t$，$b=\log_2 t$，$c=\dfrac{1}{t^2}$，分别作出$y=\mathrm{e}^x$，$y=\log_2 x$，$y=\dfrac{1}{x^2}$的图象，结合图象，即可求解.

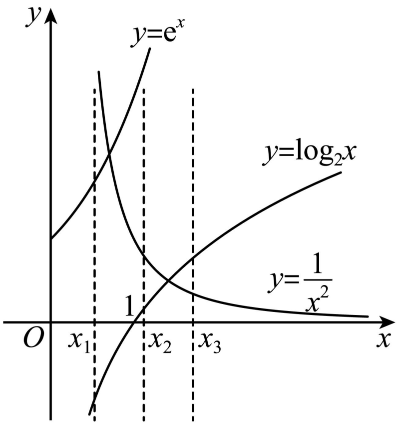
【详解】根据题意，设$\ln a=2^b=c^{-\frac{1}{2}}=t$，其中$t>0$，则$a=\mathrm{e}^t$，$b=\log_2 t$，$c=\dfrac{1}{t^2}$，

在同一坐标系中分别画出函数$y=\mathrm{e}^x$，$y=\log_2 x$，$y=\dfrac{1}{x^2}$的图象，

当$t=x_1$时，$c>a>b$；当$t=x_2$时，$a>c>b$；当$t=x_3$时，$a>b>c$，

由此可以看出，不可能出现 $c>b>a$ 这种情况.

故选：BCD.



10. 关于空间向量，以下说法正确的是（　　）

A. 空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面

B. 已知 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 与任何向量都不构成空间的一组基

C. 若 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{BN}$ 不构成空间的一组基，那么空间四点 A,B,M,N 共面；

D. 设 $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ 是空间的一组基，则 $\{\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}\}$ 也是空间的一组基

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据空间向量的共面定理以及空间基底的定义，逐项判定，即可求解.

【详解】对于 A 中，根据共线向量的概念，可知空间中的三个向量，若有两个向量共线，则这三个向量一定共面，所以 A 正确；

对于 B 中，当 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 时，若 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不共面，则 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 可构成空间的一个基底，所以 B 错误；

对于 C 中，若 $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BM}$、$\overrightarrow{BN}$ 不构成空间的一个基底，则 $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BM}$、$\overrightarrow{BN}$ 3 个向量在同一平面内，所以 A,B,M,N 共面，所以 C 正确；

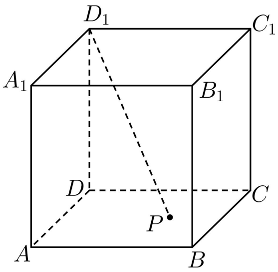
对于 D 中，由 $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ 是空间中的一组基底，则向量 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 不共面，

可得向量 $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}$ 也不共面，所以 $\{\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}\}$ 也是空间中的一组基底，所以 D 正确.

故选：ACD.

11. 如图，已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为正方形底面 $ABCD$ 内一动点，则下列结论正确

的有（　　）



A. 三棱锥 $B_1-A_1D_1P$ 的体积为定值

B. 存在点 P，使得 $D_1P\perp AD_1$

C. 若 $D_1P\perp B_1D$，则 P 点在正方形底面 $ABCD$ 内的运动轨迹是线段 AC

D. 若点 P 是 AD 的中点，点 Q 是 BB_1 的中点，过 P，Q 作平面α垂直于平面 ACC_1A_1，则平面α截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D$ 的截面周长为 $3\sqrt{2}$

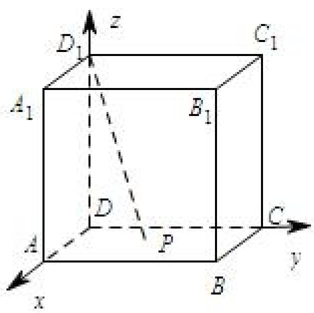
【答案】ACD

【解析】

【分析】结合选项逐个求解，体积问题利用锥体体积公式可得，垂直问题利用向量求解，截面周长根据截面形状可求.

【详解】对于 A，P 为正方形底面 $ABCD$ 时，三棱锥 $P-A_1B_1D_1$ 的高不变，底面积也不变，所以体积为定值，所以 A 正确；

对于 B，以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $P(x,y,0)$，则 $D_1(0,0,1),A(1,0,0)$，$\overrightarrow{D_1P}=(x,y,-1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$；

若 $D_1P\perp AD_1$，则 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即 $x=-1$，与题意矛盾，所以 B 不正确；

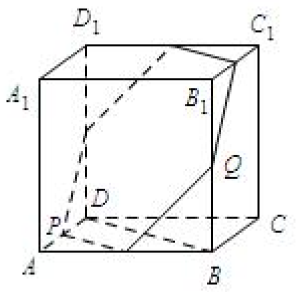
对于 C，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，由 $D_1P\perp B_1D$ 得 $x+y=1$，所以 P 的轨迹就是线段 AC，所以 C 正确；

对于 D，因为 $BD\perp AC,BD\perp AA_1$，所以 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1；

因为平面$\alpha \perp$平面ACC_1A_1，所以$BD//$平面α；

以BD为参照线作出平面α与正方体各个侧面的交线，如图，易知每个侧面的交线均相等，长度为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以截面周长为$3\sqrt{2}$，所以D正确.



故选：ACD.

【点睛】正方体中的动点问题，可以借助空间向量来处理，把位置关系，角度关系转化为向量运算.

12. 甲箱中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙箱中有4个红球，3个白球和3个黑球．先从甲箱中随机取出一球放入乙箱，分别以A_1, A_2和A_3表示由甲箱取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以B表示由乙箱取出的球是红球的事件，则（　　）

A. 事件B与事件A_3相互独立

B. $P\left(A_1|B\right)=\frac{5}{9}$

C. $P\left(A_2B\right)=\frac{6}{55}$

D. $P\left(B\right)=\frac{9}{22}$

【答案】BD

【解析】

【分析】由全概率公式可计算得到D正确；根据贝叶斯公式可知B正确；根据$P\left(A_2B\right)=P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)$可知C错误；由$P\left(A_3B\right)\neq P\left(A_3\right)P\left(B\right)$可知A错误.

【详解】由题意知：$P\left(A_1\right)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$P\left(A_2\right)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P\left(A_3\right)=\frac{3}{10}$，$P\left(B|A_1\right)=\frac{5}{11}$，$P\left(B|A_2\right)=\frac{4}{11}$，$P\left(B|A_3\right)=\frac{4}{11}$，

$\therefore P\left(B\right)=P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B|A_3\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$，D正确；

$P\left(A_1|B\right)=\frac{P\left(A_1B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{9}{22}}=\frac{5}{9}$，B正确；

$P\left(A_2B\right)=P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)=\frac{1}{5}\times\frac{4}{11}=\frac{4}{55}$，C错误；

$\because P\left(A_3B\right)=P\left(A_3\right)P\left(B\middle|A_3\right)=\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{6}{55}$，$P\left(A_3\right)P\left(B\right)=\frac{3}{10}\times\frac{9}{22}=\frac{27}{220}$，

$\therefore P\left(A_3B\right)\neq P\left(A_3\right)P\left(B\right)$，$\therefore$ 事件 B 与事件 A_3 不相互独立，A 错误.

故选：BD.

三、填空题：

13. 一个病人服用某种新药后被治愈的概率为 0.9.则服用这种新药的 4 个病人中至少 3 人被治愈的概率为_______（用数字作答）.

【答案】0.9477

【解析】

【分析】由题意知，本题符合独立重复试验条件，分情况讨论：若共有 3 人被治愈，若共有 4 人被治愈，分别代入独立重复试验公式得到结果．最后求和．

【详解】解：由题意知本题分情况讨论：若共有 3 人被治愈，则 $P_1=C_4^3(0.9)^3\times(1-0.9)=0.2916$；

若共有 4 人被治愈，则 $P_2=(0.9)^4=0.6561$，

$\therefore$ 至少有 3 人被治愈概率 $P=P_1+P_2=0.9477$.

故答案为：0.9477.

【点睛】判断是否为独立重复试验的关键是每次试验事件 A 的概率不变，并且每次试验的结果同其他各次试验的结果无关，重复是指试验为一系列的试验，并非一次试验，而是多次，但要注意重复事件发生的概率相互之间没有影响．

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(1)=0$. 若 $x<0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为__________.

【答案】$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

【解析】

【详解】分析：构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，由 $g(x)$ 的单调性结合 $f(x)$ 的奇偶性可得解.

详解：设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，当 $x<0$ 时，由已知得 $g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，由 $f(x)$ 为奇函数得 $f(-1)=-f(1)=0$，即 $g(-1)=0$，$\therefore$ 当 $x<-1$ 时 $g(x)=\frac{f(x)}{x}<0$，$f(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时，$g(x)=\frac{f(x)}{x}>0$，$f(x)<0$，又 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，$x>1$ 时，

$f(x)<0$．∴不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$．

故答案为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$．

点睛：本题考查考查用导数研究函数的单调性，解题关键是构造新函数，注意根据已知导数不等式构造新函数，常见的新函数有 $g(x)=xf(x)$，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$g(x)=e^x f(x)$，$g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$．

15. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2, AD=2, AA_1=4$，$\angle BAD=\angle BAA_1=\angle DAA_1=60°$，则 BC_1 与 CA_1 所成角的正弦值为______．

【答案】$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

【解析】

【分析】先利用基底表示向量 $\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}$，再利用向量的夹角公式和同角三角函数的平方关系即可求解.

【详解】由题意有 $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，

所以 $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}^2+$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}^2=-\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^{\circ}-\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^{\circ}+\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2$

$=-2\times2\times\dfrac{1}{2}-4-2\times4\times\dfrac{1}{2}+16=6$，

$\left|\overrightarrow{BC_1}\right|^2=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)^2=\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_1}^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cos 60^{\circ}+\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2$

$=4+2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}+16=28$，

所以 $\left|\overrightarrow{BC_1}\right|=2\sqrt{7}$，又

$\left|\overrightarrow{CA_1}\right|^2=\left(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^{\circ}-2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cos 60^{\circ}-2\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\cos 60^{\circ}$

$=4+4+16+2\times2\times2\times\dfrac{1}{2}-2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}-2\times2\times4\times\dfrac{1}{2}=12$，

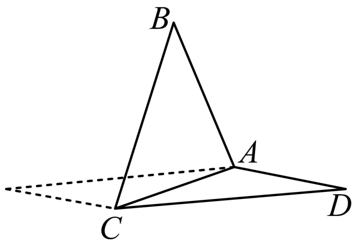
所以 $\left|\overrightarrow{CA_1}\right|=2\sqrt{3}$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\overrightarrow{CA_1}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

所以 $\sin\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle=\sqrt{1-\cos^2\left\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{CA_1}\right\rangle}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{21}}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

故答案为：$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

16. 如图，已知菱形 $ABCD$ 中，边长为 $2, \angle ABC = 60^{\circ}$，沿对角线 AC 折叠之后，使得平面 $BAC \perp$ 平面 DAC，则二面角 $B-CD-A$ 的余弦值为__________.



【答案】$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】根据题意建立空间直角坐标系，根据二面角余弦值的空间向量求解方法进行计算即可.

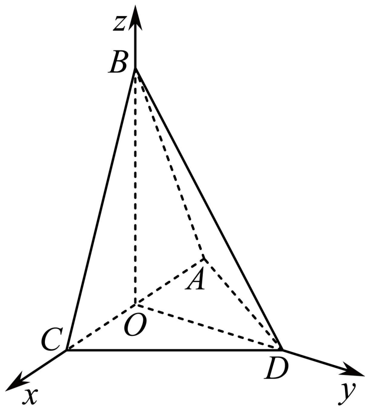
【详解】设菱形 $ABCD$ 的边长为 2，取 AC 的中点 O，连接 BO， DO，所以 $BO \perp AC$，

因为平面 $BAC \perp$ 平面 DAC，平面 $BAC \cap$ 平面 $DAC = AC$， $BO \subset$ 平面 BAC，

所以 $BO \perp$ 平面 DAC，

又因为 $OD \subset$ 平面 DAC，所以 $BO \perp OD$.

如图，建立空间直角坐标系，



则 $C(1,0,0)$， $B\left(0,0,\sqrt{3}\right)$， $D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{BC} = \left(1,0,-\sqrt{3}\right)$， $\overrightarrow{CD} = \left(-1,\sqrt{3},0\right)$.

设平面 BCD 的一个法向量为 $n = (x,y,z)$，则 $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = x - \sqrt{3}z = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = -x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$，

令 $z = 1$，则 $\vec{n} = \left(\sqrt{3},1,1\right)$，

易知，平面 CDA 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

所以 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{1}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

设二面角 $B-CD-A$ 为 θ，由图可知二面角 $B-CD-A$ 为锐角，即 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{1}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以二面角 $B-CD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：

17. 已知空间三点 $A(0,2,3)$，$B(-2,1,6)$，$C(1,-1,5)$.

（1）求以 AB，AC 为邻边的平行四边形的面积；

（2）设 $D(x,1,-1)$，若 A，B，C，D 四点共面，求 x 的值

【答案】（1）$7\sqrt{3}$

（2）$x=5$

【解析】

【分析】（1）由空间向量的数量积得夹角后求解

（2）由空间向量共面定理求解

【小问 1 详解】

由已知，得：

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$，

$$\therefore \cos A=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+9+4}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$$\therefore S=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A=\sqrt{14}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

∴以 AB，AC 为邻边的平行四边形的面积为 $7\sqrt{3}$

【小问 2 详解】

由 $D(x,1,-1)$，得：$\overrightarrow{AD}=(x,-1,-4)$

∵A，B，C，D 四点共面

∴存在实数 λ，μ，使得 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$

∴ $(x,-1,-4)=\lambda(-2,-1,3)+\mu(1,-3,2)$，即得：$\begin{cases}-2\lambda+\mu=x\\-\lambda-3\mu=-1\\3\lambda+2\mu=-4\end{cases}$

解得：$\lambda=-2$，$\mu=1$，∴ $x=5$

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-\left(a+1\right)\ln x-\dfrac{1}{2}\left(a\in R,a\neq 0\right)$.

（1）当时 $a=2$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若对任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，都有 $f(x)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $2x+y-2=0$；（2） $\left(-\infty,0\right]$.

【解析】

【分析】（1）当 $a=2$ 时，求得 $f'\left(x\right)=x-\dfrac{3}{x}$，得到 $f'\left(1\right)=-2$，$f\left(1\right)=0$，结合直线的点斜式方程，即可求解；

（2）由题意得到 $x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)_{\min}\geq 0$，求得 $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2-\left(a+1\right)}{x}$，分 $a\leq 0$ 和 $a>0$ 类讨论，分别求得函数的单调性和最小值，即可求解.

【详解】（1）当 $a=2$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-3\ln x-\dfrac{1}{2}$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

可得 $f'\left(x\right)=x-\dfrac{3}{x}$，所以 $f'\left(1\right)=-2$，又由 $f\left(1\right)=0$，

所以曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-0=-2\left(x-1\right)$，即 $2x+y-2=0$.

（2）对任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，要使 $f(x)\geq 0$ 成立，只需任意的 $x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)_{\min}\geq 0$.

又由 $f'\left(x\right)=x-\dfrac{a+1}{x}=\dfrac{x^2-\left(a+1\right)}{x}\left(x\geq 1\right)$，

当 $a+1\leq 1$ 时，即 $a\leq 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上是增函数，所以只要 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)\geq 0$，从而

$f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}-\left(a+1\right)\ln 1-\dfrac{1}{2}=0$，所以 $a\leq 0$ 满足题意；

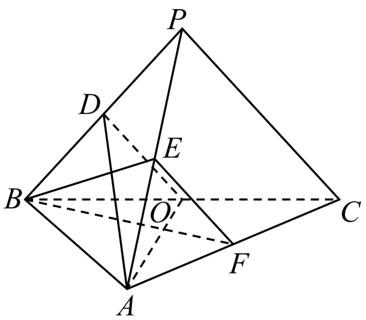
当 $a+1>1$ 时，即 $a>0$ 时，$\sqrt{a+1}>1$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[1,\sqrt{a+1}\right]$ 上是减函数，$\left[\sqrt{a+1},+\infty\right)$ 上是增函数，

从而 $\forall x_0\in\left(1,\sqrt{a+1}\right)$ 时，$f(x_0)<f(1)=0$ 与 $f(x)\geq 0$ 矛盾，故 $a>0$ 不满足题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

19. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.



（1）证明：$EF//$ 平面 ADO；

（2）证明：平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；

（3）求二面角 $D-AO-C$ 的正弦值.

【答案】（1）证明见解析；

（2）证明见解析；　　（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）根据给定条件，证明四边形 $ODEF$ 为平行四边形，再利用线面平行的判定推理作答.

（2）法一：由（1）的信息，结合勾股定理的逆定理及线面垂直、面面垂直的判定推理作答.法二：过点 B 作 z 轴 $\perp$ 平面 BAC，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $P(x,y,z)$，所以由 $\begin{cases}PA=\sqrt{14}\\PB=\sqrt{6}\\PC=\sqrt{6}\end{cases}$ 求出 P 点坐标，再求出平面 ADO 与平面 BEF 的法向量 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$，由 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ 即可证明；

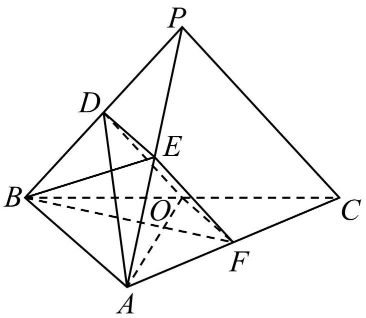
（3）法一：由（2）的信息作出并证明二面角的平面角，再结合三角形重心及余弦定理求解作答.法二：求出平面 ADO 与平面 ACO 的法向量，由二面角的向量公式求解即可.

【小问 1 详解】

连接 DE,OF，设 $AF=tAC$，则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$BF\perp AO$，

则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=[(1-t)\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}]\cdot(-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=(t-1)\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{2}t\overrightarrow{BC}^2=4(t-1)+4t=0$，

解得 $t=\frac{1}{2}$，则 F 为 AC 的中点，由 D,E,O,F 分别为 PB,PA,BC,AC 的中点，



于是 $DE//AB,DE=\frac{1}{2}AB,OF//AB,OF=\frac{1}{2}AB$，即 $DE//OF,DE=OF$，则四边形 $ODEF$ 为平行四边形，

$EF//DO,EF=DO$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ADO,DO\subset$ 平面 ADO，

所以 $EF//$ 平面 ADO.

【小问 2 详解】

法一：由（1）可知 $EF//OD$，则 $AO=\sqrt{6},DO=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $AD=\sqrt{5}DO=\frac{\sqrt{30}}{2}$，

因此 $OD^2+AO^2=AD^2=\frac{15}{2}$，则 $OD\perp AO$，有 $EF\perp AO$，

又 $AO\perp BF,BF\cap EF=F$， $BF,EF\subset$ 平面 BEF，

则有 $AO\perp$ 平面 BEF，又 $AO\subset$ 平面 ADO，所以平面 $ADO\perp$ 平面 BEF .

法二：因为 $AB\perp BC$，过点 B 作 z 轴 $\perp$ 平面 BAC，建立如图所示的空间直角坐标系，

$A(2,0,0,),B(0,0,0),C(0,2\sqrt{2},0)$，

在 $\triangle BDA$ 中，$\cos\angle PBA=\dfrac{DB^2+AB^2-DA^2}{2DB\cdot AB}=\dfrac{\frac{3}{2}+4-\frac{15}{2}}{2\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$，

在 $\triangle PBA$ 中，$PA^2=PB^2+AB^2-2PB\cdot AB\cos\angle PBA=6+4-2\sqrt{6}\times2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=14$，

设 $P(x,y,z)$，所以由 $\begin{cases} PA=\sqrt{14} \\ PB=\sqrt{6} \\ PC=\sqrt{6} \end{cases}$ 可得：$\begin{cases} (x-2)^2+y^2+z^2=14 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+\left(y-2\sqrt{2}\right)^2+z^2=6 \end{cases}$，

可得：$x=-1, y=\sqrt{2}, z=\sqrt{3}$，所以 $P\left(-1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

则 $D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$F\left(1,\sqrt{2},0\right)$，

$\overrightarrow{AO}=\left(-2,\sqrt{2},0\right), \overrightarrow{AD}=\left(-\frac{5}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设平面 ADO 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AO}=0 \\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} -2x_1+\sqrt{2}y_1=0 \\ -\frac{5}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0 \end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{2}, z_1=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{n_1}=\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BF}=\left(1,\sqrt{2},0\right)$

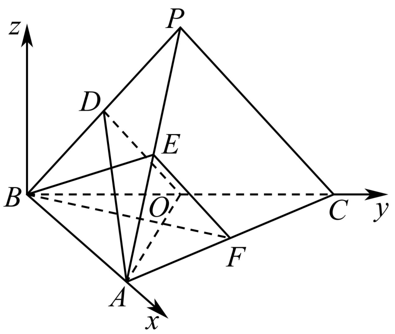
设平面 BEF 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0 \\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0 \\ x_2+\sqrt{2}y_2=0 \end{cases}$，

令 $x_2=2$，则 $y_2=-\sqrt{2}, z_2=0$，所以 $\overrightarrow{n_2}=\left(2,-\sqrt{2},0\right)$，

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times1+\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)+0=0$，

所以平面 $ADO\perp$ 平面 BEF；



【小问 3 详解】

法一：过点 O 作 $OH//BF$ 交 AC 于点 H，设 $AD\cap BE=G$，

由 $AO\perp BF$，得 $HO\perp AO$，且 $FH=\dfrac{1}{3}AH$，

又由（2）知，$OD\perp AO$，则 $\angle DOH$ 为二面角 $D-AO-C$ 的平面角，

因为 D,E 分别为 PB,PA 的中点，因此 G 为 $\triangle PAB$ 的重心，

即有 $DG=\dfrac{1}{3}AD,GE=\dfrac{1}{3}BE$，又 $FH=\dfrac{1}{3}AH$，即有 $DH=\dfrac{3}{2}GF$，

$\cos\angle ABD=\dfrac{4+\dfrac{3}{2}-\dfrac{15}{2}}{2\times2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{4+6-PA^2}{2\times2\times\sqrt{6}}$，解得 $PA=\sqrt{14}$，同理得 $BE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

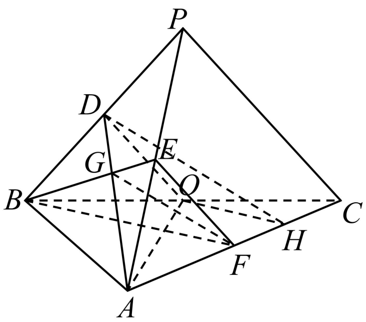
于是 $BE^2+EF^2=BF^2=3$，即有 $BE\perp EF$，则 $GF^2=\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\dfrac{5}{3}$，

从而 $GF=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，$DH=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

在 $\triangle DOH$ 中，$OH=\dfrac{1}{2}BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2},OD=\dfrac{\sqrt{6}}{2},DH=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

于是 $\cos\angle DOH=\dfrac{\dfrac{6}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{15}{4}}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\angle DOH=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



法二：平面 ADO 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\left(1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，

平面 ACO 的法向量为 $\overrightarrow{n_3}=\left(0,0,1\right)$，

所以 $\cos\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}\in\left[0,\pi\right]$，所以 $\sin\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}=\sqrt{1-\cos^2\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得极值，其图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与直线 $y+2=0$ 平行.

（1）求 a,b 的值；

（2）若对任意 $x\in[-1,2]$，都有 $f(x)<c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

【答案】（1） $a=-\frac{1}{2},b=-2$

（2） $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）根据题意得 $\begin{cases} f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$，求出 a,b，并检验；

（2）原不等式等价于 $x^3-\frac{1}{2}x^2-2x<c^2-c$，对 $x\in[-1,2]$ 恒立，令 $g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，利用导数可求该函数的最大值后可得的取值范围.

【小问 1 详解】

因为 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由题意可得 $\begin{cases} f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{4a}{3}+b=0 \\ 3+2a+b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-2 \end{cases}$，

所以 $f'(x)=3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$，

故当 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $-\frac{2}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，符合题意，

所以 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$.

【小问 2 详解】

由 $f(x)<c^2$，即 $x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c<c^2$，则 $x^3-\frac{1}{2}x^2-2x<c^2-c$，对任意 $x\in[-1,2]$，

令 $g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，则 $g'(x)=3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$，

当 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $-\frac{2}{3}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，

又 $g\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{22}{27}$，$g(2)=2$，故 $g(x)_{\max}=g(2)=2$，

所以 $c^2-c>2$，解得 $c<-1$ 或 $c>2$.

所以 c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

21. 某年级有 6 名数学老师，其中男老师 4 人，女老师 2 人，任选 3 人参加校级技能大赛.

（1）设所选 3 人中女老师人数为 X，求 X 的方差；

（2）如果依次抽取 2 人参加县级技能大赛，求在第 1 次抽到男老师的条件下，第 2 次抽到也是男老师的概率.

【答案】（1）$\frac{2}{5}$

（2）$\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】（1）X 的所有可能取值为 0，1，2，求出概率得到分布列，利用期望公式结合方差公式即可得答案.

（2）结合分步计数原理以及排列知识，利用条件概率转化求解即可.

【小问 1 详解】

X 的所有可能取值为 0，1，2，依题意得：$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$，

$D(X)=\frac{1}{5}\times(0-1)^2+\frac{3}{5}\times(1-1)^2+\frac{1}{5}\times(2-1)^2=\frac{2}{5}$

【小问 2 详解】

设第 1 次抽到男老师为事件 A，第 2 次抽到男老师为事件 B

则第 1 次和第 2 次都抽到男老师为事件 AB，

根据分步计数原理 $n(A)=\mathrm{A}_4^1\mathrm{A}_5^1=20$，$n(AB)=\mathrm{A}_4^2=12$.

所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}x-\ln x,g(x)=x\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上的最小值；

（2）证明：当 $x>0$ 时，$xf(x)<g(x)$.

【答案】（1）当 $0<t\le\frac{1-e}{e}$ 时，$f(x)_{\min}=e(t+1)-\ln(t+1)$；当 $t\ge\frac{1}{e}$ 时，$f(x)_{\min}=et-\ln t$；当 $\frac{1-e}{e}<t<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)_{\min}=2$.

（2）见详解

【解析】

【分析】(1)根据题意，求导，讨论函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上的单调性，即可求解.

(2)根据题意，先证 $e^x\ge ex$，放缩得 $ex^2-x\ln x\le ex^2+\frac{1}{e}$，化简后构造新函数，即可证明.

【小问 1 详解】

由 $f(x)=\mathrm{e}x-\ln x$，得 $f'(x)=e-\frac{1}{x}=\frac{ex-1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

令 $f'(x)>0$，得 $ex-1>0$，即 $x>\frac{1}{e}$，因此函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.

①当 $0<t+1\le\frac{1}{e}$，即 $0<t\le\frac{1-e}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上单调递减，因此

$f(x)_{\min}=f(t+1)=e(t+1)-\ln(t+1)$；

②当 $t\ge\frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 上单调递增，因此 $f(x)_{\min}=f(t)=et-\ln t$；

③当$t<\frac{1}{e}<t+1$，即$\frac{1-e}{e}<t<\frac{1}{e}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(t,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},t+1\right)$上单调递增，因此

$f\left(x\right)_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=1-\ln\frac{1}{e}=2$.

综上所述，当$0<t\le\frac{1-e}{e}$时，$f\left(x\right)_{\min}=e\left(t+1\right)-\ln\left(t+1\right)$；当$t\ge\frac{1}{e}$时，$f\left(x\right)_{\min}=et-\ln t$；当$\frac{1-e}{e}<t<\frac{1}{e}$时，$f\left(x\right)_{\min}=2$.

【小问 2 详解】

证明：设$h\left(x\right)=e^x-ex$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，则$h'\left(x\right)=e^x-e$，易得函数$h\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，因此$h\left(x\right)_{\min}=h\left(1\right)=0$，故$e^x\ge ex$恒成立.

要证$xf\left(x\right)<g\left(x\right)$，只需证$ex^2-x\ln x<xe^x+\frac{1}{e}$，

因为$e^x\ge ex$，所以$xe^x+\frac{1}{e}\ge ex^2+\frac{1}{e}$，

故只需证$ex^2-x\ln x\le ex^2+\frac{1}{e}$（因$x=1$时，左边小于右边，所以可以带等号），即$x\ln x\ge-\frac{1}{e}$.

令$\varphi\left(x\right)=x\ln x$，则$\varphi'\left(x\right)=\ln x+1$，易得函数$\varphi\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，因此$\varphi\left(x\right)\ge\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，故$x\ln x\ge-\frac{1}{e}$.

因此当$x>0$时，$xf\left(x\right)<g\left(x\right)$.

【点睛】分类讨论思想是高中数学一项重要的考查内容.分类讨论思想要求在不能用统一的方法解决问题的时候，将问题划分成不同的模块，通过分块来实现问题的求解，体现了对数学问题的分析处理能力和解决能力.