# 昆山市 2025-2026 学年第二学期高一数学期中考试模拟试题

（考试范围必修第一册和必修第二册第一章）

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．**

1、下列命题中正确的是(　)

A. 零向量没有方向　　B. 共线向量一定是相等向量

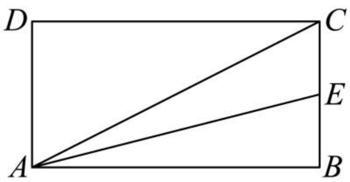
C. 若向量$\vec{a},\vec{b}$同向，且$|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则$\vec{a}>\vec{b}$　　D. 单位向量的模都相等

2、函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的最小正周期是(　　)

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3、如图，在矩形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $BC$ 中点，那么向量 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ 等于（　　）

A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{AC}$　　C. $\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BE}$



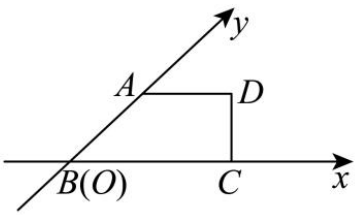

4、若 $\tan\alpha=2$，$\tan(2\alpha+\beta)=8$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$（　　）

A. $\dfrac{10}{17}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{6}{17}$

5、一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形 $ABCD$，如图所示，

$\angle ABC=45^\circ, AB=AD=1, DC\perp BC$，则原平面图形的面积为（　　）

A. $2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$




6、已知函数 $y=x^2+(1-a)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

A. $[9,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3]$　　C. $[5,+\infty)$　　D. $(-\infty,-7]$

7、已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $-1$　　D. 1

8、已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调，且在区间$[0,2\pi]$内恰好取得一次最大值2，记$f(x)$的最小正周期为$T$，则当$\omega$取最大值时，$f\left(\frac{T}{3}\right)$的值为（　　）

A. 1　　B. $-1$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.**

9、已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列四个结论中，正确的有（　　）

A. 函数$f\left(x\right)$的最小正周期为$\pi$

B. 函数$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称

C. 函数$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

D. 函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$上单调递增

10、已知向量$\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\left(0\le\theta\le\pi\right)$，则下列命题正确的是（　　）

A. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 若$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{4}\vec{a}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$

C. 若$\vec{b}$与$\vec{a}$共线，则$\vec{b}$为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D. 存在$\theta$，使得$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

11、在△$ABC$中，角$A$、$B$、$C$所对的边分别为$a$、$b$、$c$，且$c\cos B+b\cos C=a^2$，则下列说法正确是（　　）

A．若$A=\frac{\pi}{3}$，则△$ABC$面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

B．若$A=\frac{\pi}{4}$，且△$ABC$只有一解，则$b$的取值范围为$\left(0,1\right]$

C．若$A=\frac{\pi}{3}$，且△$ABC$为锐角三角形，则△$ABC$周长的取值范围为$\left(1+\sqrt{3},3\right]$

D．若△$ABC$为锐角三角形，$AC=2$，则$AC$边上的高的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12、已知向量$\vec{a}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\vec{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta+1)(\theta\in\mathbf{R})$，当$\vec{a}\cdot\vec{b}$取得最大值时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$______.

13、在锐角△ABC中，角A，B，C所对的边分别为$a$，$b$，$c$，$b$=3，$\sin A+a\sin B=2\sqrt{3}$，则△ABC周长的取值范围为______.

14、我国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“三斜求积术”，即以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积. 把以上文字写成公式，即$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$（其中$S$为三角形的面积，$a$，$b$，$c$为三角形的三边）. 在非直角$\triangle ABC$中，$a$，$b$，$c$为内角$A$，$B$，$C$所对应的三边，若$a=2$，且$a=c\left(\cos B+\sqrt{2}\cos C\right)$，则$\triangle ABC$的面积最大时，$c=$___________.

**四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）**

15、已知向量$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(1,x)$.

（1）若$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，求$|\vec{a}+2\vec{b}|$；

（2）若$\vec{c}=(1,2)$，$\vec{c}//(\vec{a}-2\vec{b})$，求$\vec{a}-2\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角的余弦值.

16、已知函数$f(x)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin x+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-1$ .

（1）求$f(x)$的对称中心；

（2）设常数$\omega>0$，若函数$f(\omega x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$上是增函数，求$\omega$的取值范围；

（3）若函数$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)+af(x)-af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，上的最大值为 2，求 $a$ 的值.

（1）对称中心为$(k\pi,0)$ $k\in Z$；（2）$\left(0,\frac{3}{4}\right]$；（3）$a=-2$或 6.

17、在某海域开展的“海上联合”反潜演习中，我方军舰要到达 $C$ 岛完成任务．已知军舰位于 $B$ 市的南偏东 $25^{\circ}$ 方向上的 $A$ 处，且在 $C$ 岛的北偏东 $58^{\circ}$ 方向上．$B$ 市在 $C$ 岛的北偏东 $28^{\circ}$ 方向上，且距离 $C$ 岛 $372\text{km}$ . 此时，我方军舰沿着 $AC$ 方向以 $30\text{km}/\text{h}$ 的速度航行，问：我方军舰大约需要多长时间到达 $C$ 岛？（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$， $\sin 53^{\circ}\approx \frac{4}{5},\cos 53^{\circ}\approx \frac{3}{5},\tan 53^{\circ}\approx \frac{4}{3}$）


图1

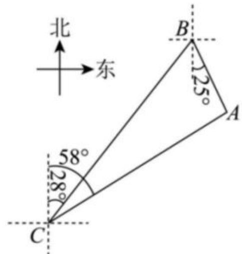
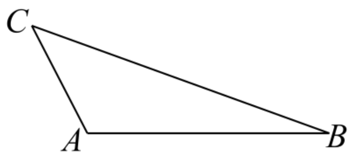


图2

18、在△$ABC$ 中，已知 $AB=2$， $AC=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}\left(0\le\lambda\le 1\right)$，$Q$ 为线段 $CA$ 延长线上的一点，且 $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}\left(t<0\right)$.

（1）当 $t=-1$ 且 $\lambda=\frac{1}{2}$，设 $PQ$ 与 $AB$ 交于点 $M$，求线段 $CM$ 的长；

（2）若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+3=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$，求 $t$ 的最大值



19、已知 $H$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点，$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$．

（1）若 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BAC$；

（2）若 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，求 $\angle BAC$ 的余弦值．

# 昆山市 2025-2026 学年第二学期高一数学期中考试模拟试题

## 答案与解析

（考试范围必修第一册和必修第二册第一章）

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.**

1、下列命题中正确的是(　)

A. 零向量没有方向　　B. 共线向量一定是相等向量

C. 若向量$\vec{a},\vec{b}$同向，且$|\vec{a}|>|\vec{b}|$，则$\vec{a}>\vec{b}$　　D. 单位向量的模都相等

【答案】D　；【解析】解：对于选项 A，由零向量的定义知，零向量方向任意，所以选项 A 错误，

对于选项 B，当共线向量方向相反时，它们肯定不是相等向量，所以选项 B 错误，

对于选项 C，向量不能比较大小，所以选项 C 错误，

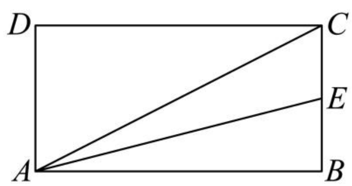
对于选项 D，单位向量的模长均为 1 个单位长，所以选项 D 正确．故选：D．

2、函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是（　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

答案：D；解析：依题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$．

3、如图，在矩形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $BC$ 中点，那么向量 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ 等于（　　）




A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{AC}$　　C. $\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BE}$

答案：B；解析：详解：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，$E$ 为 $BC$ 中点，

所以 $\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}$．故选：B

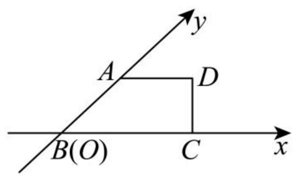
4、若 $\tan\alpha=2$，$\tan(2\alpha+\beta)=8$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$（　　）

A. $\dfrac{10}{17}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{6}{17}$

答案：D；解析：$\tan(\alpha+\beta)=\tan(2\alpha+\beta-\alpha)=\dfrac{\tan(2\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(2\alpha+\beta)\tan\alpha}=\dfrac{8-2}{1+8\times2}=\dfrac{6}{17}$

5、一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形 $ABCD$，如图所示，

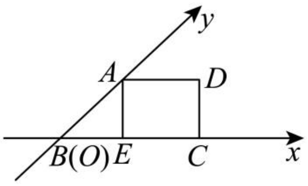
$\angle ABC=45^\circ, AB=AD=1, DC\perp BC$，则原平面图形的面积为（　　）



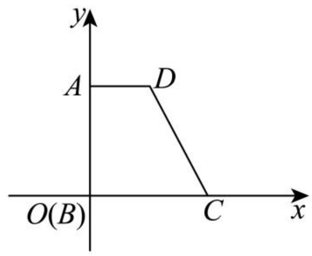
A. $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$  B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$  C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  D. $2\sqrt{2}$

答案 A 【详解】如图，在直观图中过点 A，作 $AE\perp BC$ 交 $BC$ 于点 $E$，

因为 $\angle ABC=45^\circ, AB=AD=1, DC\perp BC$，所以 $CE=AD=1$， $BE=AB\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $BC=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$




将直观图还原为平面图如下：




则 $BC=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$， $AD=1$， $AB=2$，所以 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6、已知函数 $y=x^2+(1-a)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

A. $[9,+\infty)$  B. $(-\infty,-3]$  C. $[5,+\infty)$  D. $(-\infty,-7]$

答案：A；解析：详解：由于二次函数 $y=x^2+(1-a)x+2$ 的二次项系数为正数，对称轴为直线 $x=-\frac{1-a}{2}$，其对称轴左侧的图像是下降的，$\therefore -\frac{1-a}{2}\geq 4$，故 $a\geq 9$，因此，实数 $a$ 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

7、已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{3}{4}$  B. $\frac{3}{4}$  C. $-1$  D. 1

答案：B；解析：∵ $\sqrt{2}\cos 2\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$，∵ $\sqrt{2}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$，

$\therefore(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{1}{2})=0$，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$，即 $\cos\alpha+\sin\alpha>0$

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$，因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\alpha\in(0,\pi)$， $\sin 2\alpha>0$.

由 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 平方可得 $1-\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$，即 $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$，符合题意. 综上， $\sin 2\alpha=\frac{3}{4}$.

8、已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，且在区间 $[0,2\pi]$

内恰好取得一次最大值2，记$f(x)$的最小正周期为$T$，则当$\omega$取最大值时，$f\left(\frac{T}{3}\right)$的值为（　　）

A. 1　　B. $-1$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

答案：C；解析：$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\omega x(\omega>0)$，

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\omega x\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，可得$\frac{2k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{2\omega}\le x\le\frac{2k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega},k\in Z$

$\therefore\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$是函数含原点的递增区间．又$\because$函数在$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上递增，$\therefore\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]\supseteq\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore$得不等式组：$-\frac{\pi}{2\omega}\le-\frac{3\pi}{4}$，且$\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2\omega}$，又$\because\omega>0$，$\therefore 0<\omega\le\frac{2}{3}$，

又函数在区间$[0,2\pi]$上恰好取得一次最大值，根据正弦函数的性质可知$\frac{T}{4}\le 2\pi<\frac{5T}{4}$，

所以$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}\le 2\pi$且$\frac{5}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}>2\pi$，可得$\omega\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$．所以$\omega\in\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$，

当$\omega=\frac{2}{3}$时，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=3\pi$，所以$f\left(\frac{T}{3}\right)=f(\pi)=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$，故选：C.

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．**

9、已知函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列四个结论中，正确的有（　　）

A. 函数$f(x)$的最小正周期为$\pi$

B. 函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称

C. 函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

D. 函数$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$上单调递增

【答案】AD；解析：函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A选项正确；

由$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，解得函数$f(x)$的图象的对称轴方程为$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

当$k=0$时，得函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{8}$对称，BC选项错误；

$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$是正弦函数的单调递增区间，所以函数$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$上单调递增，D 选项正确.故选：AD

10、已知向量$\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\left(0\le\theta\le\pi\right)$，则下列命题正确的是（　　）

A. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 若$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{4}\vec{a}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$

C. 若$\vec{b}$与$\vec{a}$共线，则$\vec{b}$为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D. 存在$\theta$，使得$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

答案：AB；解析：详解：对于 A，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则有$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0$，即$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，A 正确；

对于 B，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{4}\vec{a}=\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle}{2}\cdot\vec{a}$，所以$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=-\frac{1}{2}$，

$\because\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in\left[0,\pi\right]$，$\therefore\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{2\pi}{3}$，B 正确；

对于 C，若$\vec{b}$与$\vec{a}$共线，设$\vec{b}=\left(\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$，所以有$\sqrt{\lambda^2+3\lambda^2}=1$，解得$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，

因为$\vec{b}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\left(0\le\theta\le\pi\right)$，$\sin\theta\ge0$，$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$，所以$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，C 不正确；

对于 D，若$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$成立，则$\vec{a}$与$\vec{b}$反向，所以$\lambda\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\left(\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)\left(\lambda<0\right)$，$\sqrt{\lambda^2+3\lambda^2}=1$，

解得$\lambda=\pm\frac{1}{2}$，即有$\lambda=-\frac{1}{2}$，则$\sin\theta=\sqrt{3}\lambda<0$，与$\sin\theta\ge0$矛盾，故 D 不正确．故选：AB.

11、在△$ABC$中，角$A$、$B$、$C$所对的边分别为$a$、$b$、$c$，且$c\cos B+b\cos C=a^2$，则下列说法正确是（　　）

A．若$A=\frac{\pi}{3}$，则△$ABC$面积的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

B．若$A=\frac{\pi}{4}$，且△$ABC$只有一解，则$b$的取值范围为$\left(0,1\right]$

C．若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，且△$ABC$ 为锐角三角形，则△$ABC$ 周长的取值范围为 $\left(1+\sqrt{3},3\right]$

D．若△$ABC$ 为锐角三角形，$AC=2$，则 $AC$ 边上的高的取值范围为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3}\right)$

答案：AC；解析：对于 A，由正弦定理可得 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin\left(B+C\right)=\sin A=a\sin A$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，所以 $a=1$，若 $A=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $\cos A=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-1}{2bc}$，

由 $b>0$，$c>0$，可得 $b^2+c^2=bc+1\geq 2bc$，即 $bc\leq 1$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，

则△$ABC$ 面积 $\dfrac{1}{2}bc\mathrm{sin}A\leq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，所以△$ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故 A 正确；

对于 B，若 $A=\dfrac{\pi}{4}$，且 $a=1$，由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$，所以 $\sin B=b\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，

当 $\sin B=1$ 时，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=1$，$b=\sqrt{2}$ 时有一解，故 B 错误；对于 C，故 C 正确；

对于 D，由于△$ABC$ 为锐角三角形，$AC=b=2$，$a=1$，

所 $\begin{cases}a^2+b^2>c^2\\a^2+c^2>b^2\\c^2+b^2>a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5>c^2\\c^2>3\\c^2+4>1\end{cases}\Rightarrow 3<c^2<5$，故 AC 边上的高为 $a\mathrm{sin}C=a\sqrt{1-\cos^2C}=a\sqrt{1-\left(\dfrac{5-c^2}{4}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{-\left(c^2-5\right)^2+16}{16}}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，故 D 错误.

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12、已知向量 $\vec{a}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\vec{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta+1)(\theta\in\mathbf{R})$，当 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 取得最大值时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$______.

【答案】$\sqrt{21}$；解析：因为 $\vec{a}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\vec{b}=(2\cos\theta,2\sin\theta+1)(\theta\in\mathbf{R})$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta+1=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+1=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

当且仅当 $\theta+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathrm{Z})$，即 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathrm{Z})$ 时 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 取最大值 $4+1=5$，

此时 $\vec{b}=\left(2\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right),2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)+1\right)=(\sqrt{3},2)$，所以 $\vec{a}+\vec{b}=(2\sqrt{3},3)$，

所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21}$；故答案为：$\sqrt{21}$.

13、在锐角△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 $a$，$b$，$c$，$b$=3，$\sin A+a\sin B=2\sqrt{3}$，则△ABC 周长的取值范围为______.

答案为：$(\frac{9+3\sqrt{3}}{2},9+3\sqrt{3})$，解析：由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，则 $a\sin B=b\sin A$，故 $\sin A+b\sin A=4\sin A=2\sqrt{3}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $A=\frac{\pi}{3}$，且 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，则 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

而 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，则 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sin B}$，$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{3\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B}=\frac{3\sqrt{3}\cos B}{2\sin B}+\frac{3}{2}$，

所以 $a+b+c=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}$，

又 $\frac{\pi}{12}<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{4}$，且 $\tan\frac{\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=2-\sqrt{3}$，

所以 $\tan\frac{B}{2}\in(2-\sqrt{3},1)$，则 $a+b+c=\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\in(\frac{9+3\sqrt{3}}{2},9+3\sqrt{3})$.

14、我国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“三斜求积术”，即以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积. 把以上文字写成公式，即 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$（其中 $S$ 为三角形的面积，$a$，$b$，$c$ 为三角形的三边）. 在非直角 $\triangle ABC$ 中，$a$，$b$，$c$ 为内角 $A$，$B$，$C$ 所对应的三边，若 $a=2$，且 $a=c\left(\cos B+\sqrt{2}\cos C\right)$，则 $\triangle ABC$ 的面积最大时，$c=$__________.

答案：$2\sqrt{3}$；解析：$\because a=c\left(\cos B+\sqrt{2}\cos C\right)$，由正弦定理

$\therefore \sin A=\sin C\left(\cos B+\sqrt{2}\cos C\right)$，又 $A=\pi-(B+C)$

$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，；$\therefore \cos C\sin B=\sqrt{2}\sin C\cos C$，

$\because \triangle ABC$ 非直角三角形，$\therefore \cos C\neq 0$，$\therefore \sin B=\sqrt{2}\sin C$，即 $b=\sqrt{2}c$，

$$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4c^2-\left(\frac{c^2+4-2c^2}{2}\right)^2\right]}=\frac{1}{4}\sqrt{-c^4+24c^2-16}=\frac{1}{4}\sqrt{-\left(c^2-12\right)^2+128},$$

当且仅当 $c^2=12$，即 $c=2\sqrt{3}$ 时，S 有最大值. 故答案为：$2\sqrt{3}$

**四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）**

15、已知向量 $\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(1,x)$.

（1）若 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，求 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$；

（2）若 $\vec{c}=(1,2)$，$\vec{c}/\!/\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$，求 $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角的余弦值.

解：（1）由题意 $\vec{a}-\vec{b}=(2,4-x)$，因为 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=6+4(4-x)=0$，得 $x=\frac{11}{2}$，

则 $\vec{a}+2\vec{b}=(5,15)$，所以 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{25+225}=5\sqrt{10}$；

（2）由已知 $\vec{a}-2\vec{b}=(1,4-2x)$，又 $\vec{c}=(1,2)$，$\vec{c}/\!/\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$，所以 $2-(4-2x)=0$，得 $x=1$，

则 $\vec{a}-2\vec{b}=(1,2)$，故 $\cos\left\langle\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}\right\rangle=\frac{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{3+8}{5\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$

16、已知函数 $f(x)=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin x+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-1$ .

（1）求 $f(x)$ 的对称中心；

（2）设常数 $\omega>0$，若函数 $f(\omega x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，求 $\omega$ 的取值范围；

（3）若函数 $g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)+af(x)-af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，上的最大值为 2，求 $a$ 的值.

（1）对称中心为 $(k\pi,0)$ $k\in Z$；（2）$\left(0,\frac{3}{4}\right]$；（3）$a=-2$ 或 6.

【详解】（1） $f(x)=2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\cdot\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x-1$

$=\sin x(2+2\sin x)+1-2\sin^2 x-1=2\sin x$. 对称中心为 $(k\pi,0)$ $k\in Z$.

（2）$\because f(\omega x)=2\sin\omega x$，由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\omega x\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得 $-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\le x\le\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}$，

$\therefore f(\omega x)$ 的递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]k\in Z$，$\because f(\omega x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，

$\therefore$ 当 $k=0$ 时，有 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2\omega},\frac{\pi}{2\omega}\right]$，

$\therefore\begin{cases}\omega>0\\-\frac{\pi}{2\omega}\le-\frac{\pi}{2}\\\frac{\pi}{2\omega}\ge\frac{2\pi}{3}\end{cases}$，解得 $0<\omega\le\frac{3}{4}$，$\therefore\omega$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$.

（3）$g(x)=\sin 2x+a\sin x-a\cos x-\frac{1}{2}a-1$，令 $\sin x-\cos x=t$，则 $\sin 2x=1-t^2$，

$\therefore y=1-t^2+at-\frac{1}{2}a-1=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a$，$\because t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，$\therefore -\sqrt{2}\le t\le 1$.

①当 $\frac{a}{2}<-\sqrt{2}$ 时，即 $a<-2\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=-\left(-\sqrt{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}=-\sqrt{2}a-\frac{a}{2}-2$.

令 $-\sqrt{2}a-\frac{a}{2}-2=2$，解得 $a=-\frac{8}{2\sqrt{2}+1}$（舍）.

②当 $-\sqrt{2}\le\frac{a}{2}\le 1$ 时，即 $-2\sqrt{2}\le a\le 2$ 时，

$y_{\max}=\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}$，令 $\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}=2$，解得 $a=-2$ 或 $a=4$（舍）.

③当 $\frac{a}{2}>1$ 时，即 $a>2$ 时，在 $t=1$ 处 $y_{\max}=\frac{a}{2}-1$，由 $\frac{a}{2}-1=2$，得 $a=6$. 因此 $a=-2$ 或 6.

17、在某海域开展的“海上联合”反潜演习中，我方军舰要到达 $C$ 岛完成任务．已知军舰位于 $B$ 市的南偏东 $25^{\circ}$ 方向上的 $A$ 处，且在 $C$ 岛的北偏东 $58^{\circ}$ 方向上．$B$ 市在 $C$ 岛的北偏东 $28^{\prime}$ 方向上，且距离 $C$ 岛 $372\mathrm{km}$．此时，我方军舰沿着 $AC$ 方向以 $30\mathrm{km/h}$ 的速度航行，问：我方军舰大约需要多长时间到达 $C$ 岛？（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$， $\sin 53^{\circ}\approx\frac{4}{5},\cos 53^{\circ}\approx\frac{3}{5},\tan 53^{\circ}\approx\frac{4}{3}$）


图1

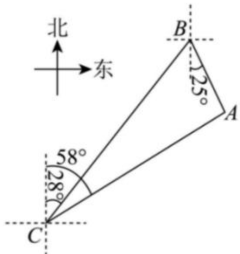


图2

解析：设我方军舰大约需要 $x$ 小时到达 $C$ 岛，则 $AC=30x$，

由题意知，$\angle ABC=28^{\circ}+25^{\circ}=53^{\circ}$，$\angle ACB=58^{\circ}-28^{\circ}=30^{\circ}$，

$BC=372\mathrm{km}$，  ......3 分

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=180^{\circ}-53^{\circ}-30^{\circ}=97^{\circ}$

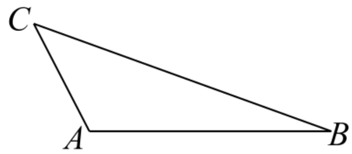
又 $\sin 97^{\circ}=\sin\left(180^{\circ}-83^{\circ}\right)=\sin 83^{\circ}=\sin\left(53^{\circ}+30^{\circ}\right)=\sin 53^{\circ}\cos 30^{\circ}+\cos 53^{\circ}\sin 30^{\circ}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$，  ......7 分

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，即 $\frac{372}{\sin 97^{\circ}}=\frac{30x}{\sin 53^{\circ}}$，解得 $x\approx 10$，

答：所以我方军舰大约需要 10 小时到达 $C$ 岛

18、在△$ABC$中，已知 $AB=2$， $AC=1$， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$， $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}\left(0\le\lambda\le1\right)$，$Q$为线段 $CA$ 延长线上的一点，且 $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AC}\left(t<0\right)$.




（1）当 $t=-1$ 且 $\lambda=\frac{1}{2}$，设 $PQ$ 与 $AB$ 交于点 $M$，求线段 $CM$ 的长；

（2）若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+3=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$，求 $t$ 的最大值

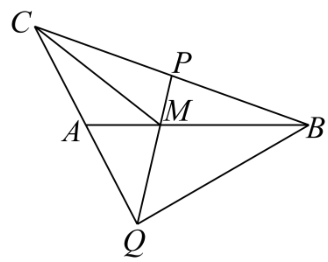
答案解析：(1)解：因为 $t=-1$ 且 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 A 是 $CQ$ 的中点，

$P$ 是 $BC$ 的中点，则 $M$ 是△$CBQ$ 的重心，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$， $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$；所以，

$$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CQ}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$$

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+1}=\frac{\sqrt{19}}{3};$$

(2) 因为 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB}\left(0\le\lambda\le1\right)$， $\overrightarrow{AQ}=t\vec{b}(t<0)$，




所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}$，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=t\vec{b}-\left[\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}\right]=-\lambda\vec{a}+(t+\lambda-1)\vec{b}$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left[\lambda\vec{a}+\left(1-\lambda\right)\vec{b}\right]\cdot\vec{a}=\lambda\vec{a}^2+\left(1-\lambda\right)\vec{b}\cdot\vec{a}=5\lambda-1$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left[-\lambda\vec{a}+\left(\lambda-1\right)\vec{b}\right]\cdot\left[-\ \ \vec{a}+(t+\lambda-1)\vec{b}\right]=7\lambda^2+2\lambda t-4\lambda-t+1$，

由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}+3=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$，得： $7\lambda^2+2\lambda t-4\lambda-t+1=5\lambda-1$，

所以 $t\left(1-2\lambda\right)=7\lambda^2-9\lambda+5$，因为 $t<0$， $7\lambda^2-9\lambda+5>0$，所以 $\frac{1}{2}<\lambda\le1$， $t=\frac{7\lambda^2-9\lambda+5}{1-2\lambda}$，

令 $m=1-2\lambda\in\left[-1,0\right)$，则 $t=\frac{\frac{7}{4}(1-m)^2-\frac{9}{2}(1-m)+5}{m}=\frac{7m}{4}+\frac{9}{4m}+1$ 在 $[-1,0)$ 单调递减，所以当 $m=-1$ 时， $t$ 有最大值－3

19、已知 $H$ 是 $\triangle ABC$ 内的一点，$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

（1）若 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BAC$；

（2）若 $H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，求 $\angle BAC$ 的余弦值.

【答案】（1）$\frac{\pi}{4}$　（2）$\frac{\sqrt{6}}{6}$

（1）设 $D$ 为 $AB$ 的中点，$E$ 为 $AC$ 中点，$\because H$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\therefore AH=BH=CH$，

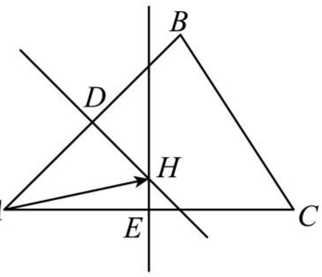
$\therefore$ 点 $H$ 在边 $AB$ 和 $AC$ 的垂直平分线上，$\therefore DH\perp AB, EH\perp AC$，

$\because \overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}bc\cos A-\frac{1}{4}c^2=0$，

即 $4b\cos A=3c$ ①，同理，$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{4}bc\cos A-\frac{1}{6}b^2=0$




可得 $3c\cos A=2b$ ②，

联立①②得 $\cos^2 A=\frac{1}{2}$，而 $\cos A>0$，则 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.

（2）$\because H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心，$\therefore AH\perp BC$，即 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\because \overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2$

$=-\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{12}bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{3}b^2=0$；化简得 $7c^2-7b^2=a^2$，①

同理 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$；$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}b^2-\frac{3}{4}bc\cos A=\frac{1}{3}b^2-\frac{3}{4}bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，

化简得 $9a^2-9c^2-b^2=0$，②，联立①②得 $27c^2=32b^2$，则 $c^2=\frac{32}{27}b^2$，$c=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}b$，

则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-\left(7c^2-7b^2\right)}{2bc}=\frac{8b^2-6c^2}{2bc}=\frac{8b^2-6\times\frac{32}{27}b^2}{2b\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}b}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.