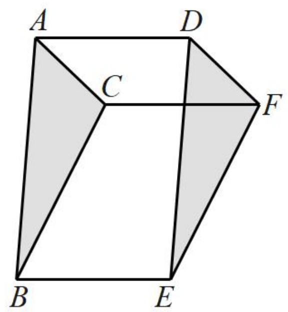
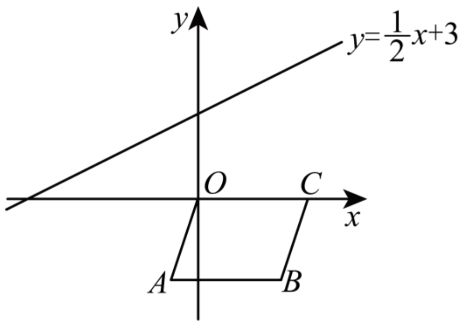
与平行四边形有关的其他问题

【题型 1 平行四边形与平移问题】

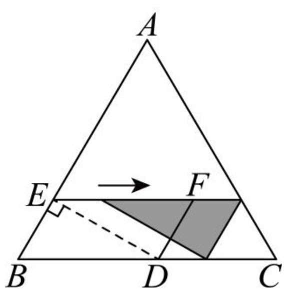
【例 1】如图，将△ABC向右平移 4 个单位，得到△DEF，连接AD，BE，CF，则图中有______个平行四边形.



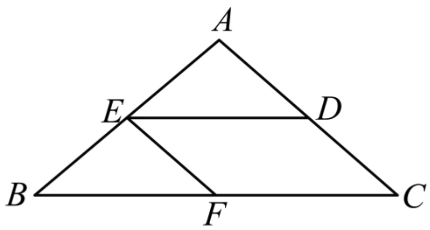
【变式 1-1】（24-25 八年级下·重庆·期中）如图，在平面直角坐标系中，平行四边形$ABCO$的边OC在 x 轴上，$AB=4$，将平行四边形$ABCO$向上平移 m 个单位，点 C 的对应点恰好落在直线$y=\frac{1}{2}x+3$ 上，则平移的距离$m=$__________.



【变式 1-2】如图，等边三角形ABC的边长$AB=9$，点D在边BC上，且$BD=5$．过点D作$DE\perp AB$，垂足为E，以BE、BD为邻边作平行四边形$BEFD$．将△EDF沿BC向右平移，使点F的对应点落在边AC上，则△EDF平移的距离为__________.

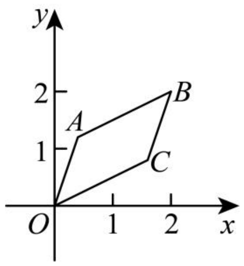


【变式 1-3】(24-25 八年级下·山东·期末）如图，在△ ABC中，$AB = AC$，$BC = 14\text{cm}$，点D在AC上，$DC = 5\text{cm}$，将线段DC沿CB方向平移 8cm 得到线段EF，点E, F分别落在边AB, BC上，那么四边形$EFCD$的面积为______ cm^2.



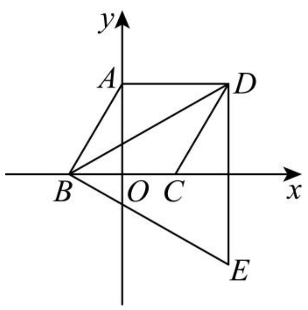
【题型 2 平行四边形与对称问题】

【例 2】(25-26 八年级上·全国·期末）如图，已知平行四边形$OABC$的顶点为$(0.4,1.2)$，若将平行四边形先沿着y轴进行第一次轴对称变换，所得图形再沿着x轴进行第二次轴对称变换，轴对称变换的对称轴遵循y轴、x轴、y轴、x轴……的规律进行，则经过第 2025 次变换后，平行四边形的顶点A的坐标为（ ）



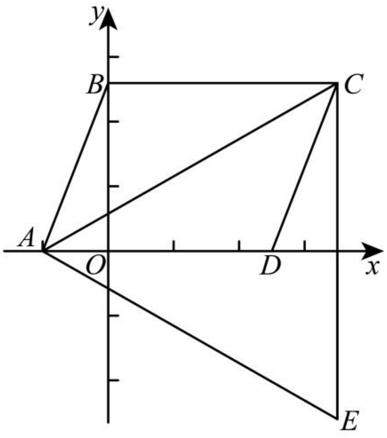
A．$(-0.4, -1.2)$ B．$(-0.4,1.2)$ C．$(0.4, -1.2)$ D．$(-1.2, -0.4)$

【变式 2-1】(24-25 八年级下·辽宁丹东·期末）如图，△ DBE是以▱$ABCD$的对角线BD为边的等边三角形，点D与点E关于x轴对称，若D点的坐标是$(5,2\sqrt{3})$，则C点的坐标为（ ）



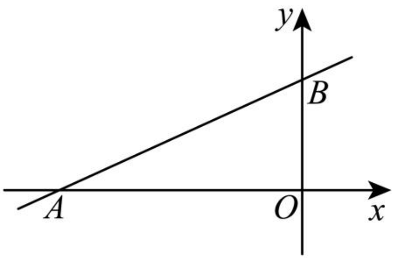
A．$(1,0)$ B．$(2,0)$ C．$(3,0)$ D．$(4,0)$

【变式 2-2】(24-25 八年级下·江苏无锡·月考)如图,△ACE是以▱$ABCD$的对角线AC为边的等边三角形,点 C 与点 E 关于 x 轴对称.若 E 点的坐标是$(7,-3\sqrt{3})$,则 D 点的坐标是()



A.(7,0)　　B.(6,0)　　C.(5,0)　　D.(4,0)

【变式 2-3】如图,在平面直角坐标系xOy中,直线$y=kx+b$经过点$A(-4,0)$,$B(0,3)$.



(1)求直线AB的函数表达式;

(2)点 C 在直线AB上,点 D 与点 C 关于 y 轴对称,如果以 O,A,C,D 为顶点的四边形是平行四边形,求点 C 的坐标.

【题型 3　平行四边形与旋转问题】

【例 3】如图,一副三角板如图 1 放置,$AB=CD=\sqrt{6}$,顶点E重合,将△DEC绕其顶点E旋转,如图 2,在旋转过程中,当$\angle AED=75°$,连接AD、BC,这时△ADE的面积是______.

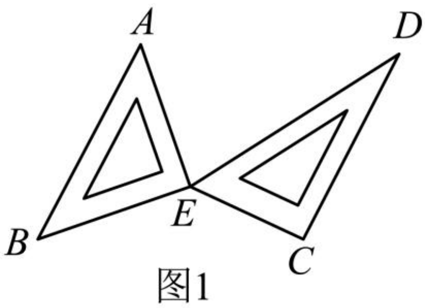


图1

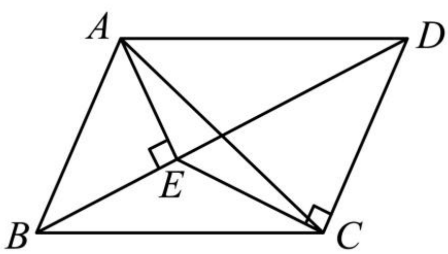
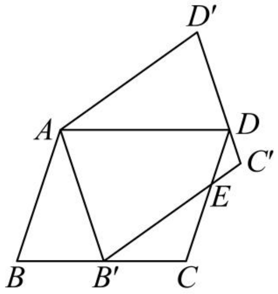
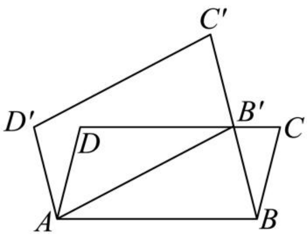


图2

【变式 3-1】（24-25 八年级下·陕西西安·期末）如图，▱$ABCD$绕点A按逆时针方向旋转 36°，得到▱$AB'C'D'$，点B'恰好落在BC边上，$B'C'$和CD相交于点E，则$\angle B'EC$的度数是________.



【变式 3-2】（2025·吉林四平·三模）如图，将平行四边形$ABCD$绕点 A 旋转α°得到平行四边形$AB'C'D'$，点 B'落在边 CD 上，若$\angle C=76°$，当B、B'、C'三点共线时，α等于__________.



【变式 3-3】如图，一副三角板如图 1 放置，$AB=CD=\sqrt{6}$，顶点E重合，将$\triangle DEC$绕其顶点E旋转，如图 2，在旋转过程中，当$\angle AED=75°$，连接AD，BC，此时四边形$ABCD$的面积是________.

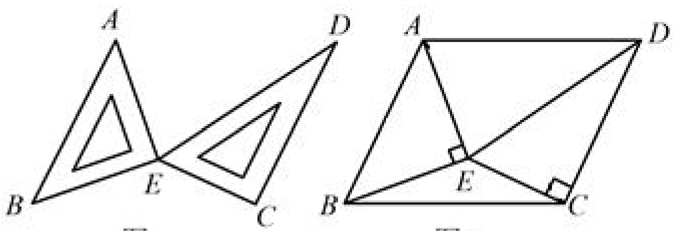
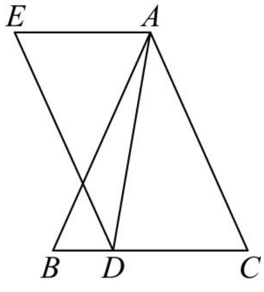


图1 图2

【题型 4 平行四边形与定值问题】

【例 4】（24-25 八年级下·浙江台州·期末）如图，在△ABC中，$AB=AC$，点 D 在BC上，过点 D、A 分别作AC、BC的平行线交于点 E，连接AD，设$AC=m$，$AD=n$，当$AE\cdot BD$为定值时，无论 m、n 的值如何变化，下列代数式的值不变的是（　）



A．mn　　B．m^2-n^2　　C．m^2+n^2　　D．$m+n$

【变式 4-1】(24-25 七年级下·湖北武汉·期中)如图 1，点$A(a,0)$、$B(b,0)$，其中 a、b 满足$\sqrt{a+1}+\sqrt{b-3}=0$，将点 A、B 分别向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位至 C、D，连接AC、BD.

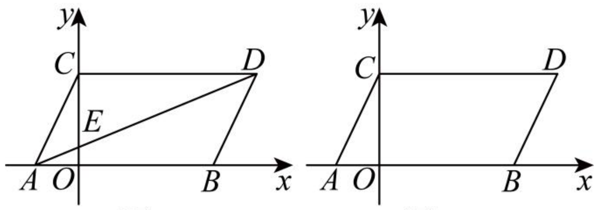


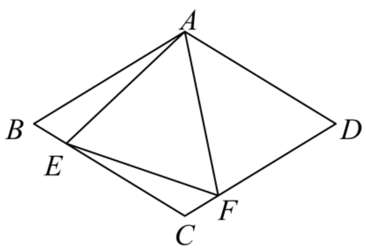
图1 图2

(1)请直接写出$a=$______、$b=$______、c 的坐标是______；

(2)连接AD交OC于一点 E，求CE；

(3)如图 2，点 M 从 O 点出发，以每秒 1 个单位的速度向上运动，同时点 N 从 B 点出发，以每秒 2 个单位的速度向左运动．设运动时间为 t 秒$(0<t\leq 2)$，射线DN交 y 轴于点 F．问$S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}$的值是否为定值？如果是定值，请求出它的值；如果不是定值，请说明理由．

【变式 4-2】如图所示四边形$ABCD$中，$AB=BC=CD=DA=4$，$\angle BAD=120°$，$\triangle AEF$为正三角形，点 E、F 分别在边BC、CD上滑动，且 E、F 不与 B、C、D 重合．



(1)四边形$ABCD$______平行四边形（是或不是）

(2)证明不论 E、F 在BC、CD上如何滑动，总有$BE=CF$；

(3)当点 E、F 在BC、CD上滑动时，四边形$AECF$的面积是否发生变化？如果不变，求出这个定值；如果变化，求出最大（或最小）值．

【变式 4-3】如图 1，在平面直角坐标系中，四边形$OBCD$是正方形，$D(0,3)$，点E是OB延长线上一点，M是线段OB上一动点（不包括O、B），作$MN\perp DM$，交$\angle CBE$的平分线于点N.

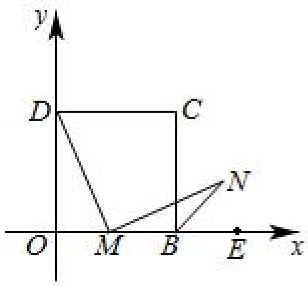


图1

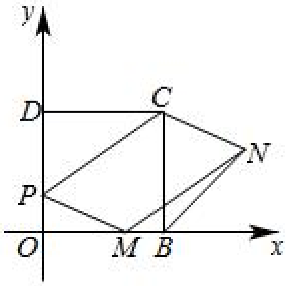


图2

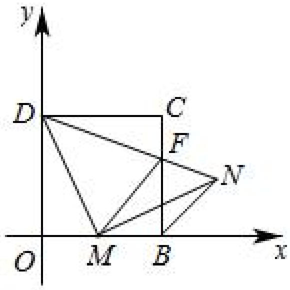


图3

(1)①直接写出点B的坐标______；

②求证：$MD=MN$；

(2)如图 2，若$M(2,0)$，在OD上找一点P，使四边形$MNCP$是平行四边形，求线段OP的长度；

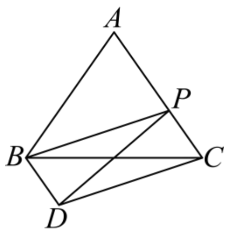
(3)如图，连接DN交BC于F，连接FM，下列两个结论：

①FM的长为定值；

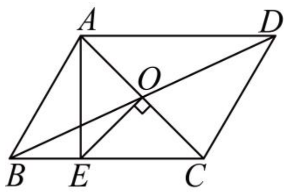
②MN平分$\angle FMB$，其中只有一个正确，选择并证明.

【题型 5　平行四边形与最大值问题】

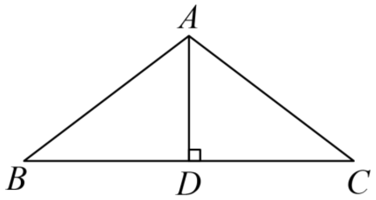
【例 5】（24-25 八年级下·河南洛阳·月考）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$BC=6$，P是边AC上的一个动点，以BC为对角线作平行四边形$BPCD$，则DP的最大值为________，最小值为________.



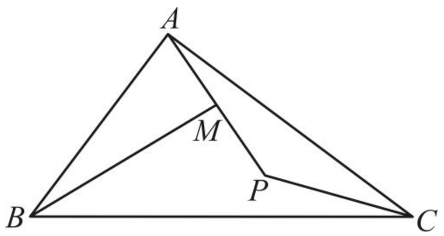
【变式 5-1】在平行四边形$ABCD$中，AC、BD相交于点 O，过点 O 作$OE\perp AC$，连接AE，已知$\triangle ABE$的周长为 18，若AC的长为整数，则AC的最大值是______.



【变式 5-2】在△ ABC中，$AB = AC$，$BC = 24$，$AD = 9$，$AD \perp BC$，将△ ABC沿AD剪开成两个三角形，把这两个三角形拼成一个平行四边形．在拼成的平行四边形中，对角线长度的最大值是___________．



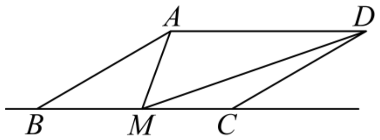
【变式 5-3】（24-25 九年级上·江苏扬州·期中）如图，在 Rt△ ABC中，$\angle BAC = 90°$，$AB = 3$，$AC = 4$，平面上有一点P，连接AP，CP，若$CP = 2$，取AP的中点M．连接BM，则BM的最大值为（　）



A．$\sqrt{13}+1$　　B．$\sqrt{15}$　　C．$\frac{21}{5}$　　D．$3\sqrt{3}$

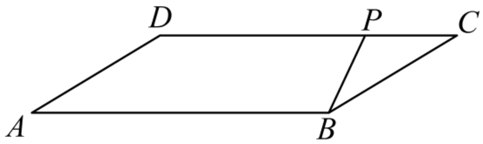
【题型 6　平行四边形与最小值问题】

【例 6】（24-25 八年级下·山东聊城·期末）如图，▱$ABCD$中，$AB = 4$，$AD = 5$，$\angle ABC = 30°$，点M为直线BC上一动点，则$MA + MD$的最小值为（　）



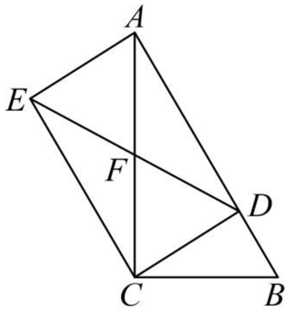
A．$\sqrt{29}$　　B．$\sqrt{39}$　　C．$\sqrt{41}$　　D．7

【变式 6-1】(24-25 八年级下·陕西西安·月考)如图，已知平行四边形$ABCD$的面积为 16，$\angle A = 30°$，$AB = 2BC$，点 P 为边CD上的一个动点，则 $2PB + PD$的最小值为（　）

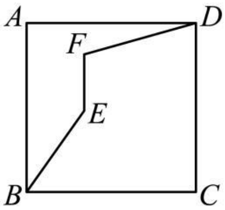


A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$8\sqrt{3}$　　D．8

【变式 6-2】(24-25 八年级下·四川泸州·期中)如图，$\triangle ABC$中$\angle ACB=90°$，$\angle B=60°$，$AB=6$，点 D 在AB边上，以AD，CD为邻边作▱$AECD$，则DE长度的最小值是______.

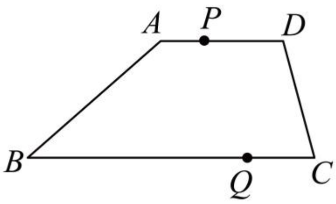


【变式 6-3】如图，在正方形$ABCD$中，$AB=3$，EF是正方形$ABCD$内的一条长为 1 的线段，$EF\parallel AB$，连接BE、DF，则$BE+DF$的最小值为________.

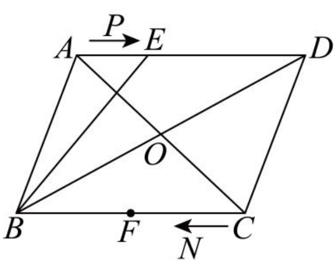


【题型 7　平行四边形与动点问题】

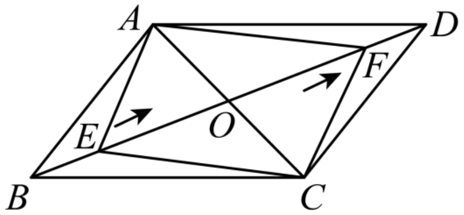
【例 7】(24-25 八年级下·浙江宁波·期末)如图，在四边形$ABCD$中，$BC=20\text{cm}$，$AD=8\text{cm}$，$AD\parallel BC$．点P，Q分别从A，C同时出发，点P以 2cm/s 的速度沿射线AD运动，点Q以 1cm/s 的速度由点C向点B运动，当点Q运动到点B时，两点均停止运动，设运动时间为t，当$t=$__________时，以P、Q、C、D为顶点的四边形是平行四边形.



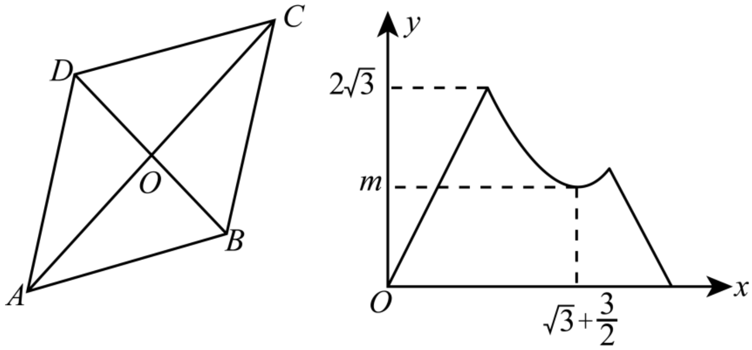
【变式 7-1】如图，在▱$ABCD$中，对角线AC,BD相交于点O．点E在AD上，$AE=5\text{cm}$，$BE=13\text{cm}$，$\angle EBD=\angle DBC$，点F是BC的中点，若点P以 1cm/s 的速度从点A出发，沿AD向点E运动，点N同时以 2cm/s 的速度从点C出发，沿CB向点F运动，点P运动到点E时停止运动，点N也同时停止坛动，当点P运动________s 时，以点P,F,N,E为顶点的四边形是平行四边形.



【变式 7-2】（25-26 八年级上·全国·课后作业）如图，$\square ABCD$的对角线AC、BD相交于点O，$BD=12$，点E在线段BO上从点B出发，以每秒 1 个单位的速度运动，点F在线段OD上从点O出发，以每秒 2 个单位的速度运动．若点E、F同时出发，设运动时间为t，当$t=$______时，四边形$AECF$是平行四边形．



【变式 7-3】（2024·广东深圳·模拟预测）如图，动点 P、Q 在平行四边形$ABCD$的边和对角线上运动，动点 P 的运动轨迹为折线$O-A-D-O$，动点 Q 的运动轨迹为折线$O-C-B-O$，两动点同时开始运动，且运动速度均为 1cm/s．设动点运动时间为 x 秒，两动点间距离为$y$cm，x 与 y 的函数关系式如图所示．当点 P 在平行四边形$ABCD$的边上运动时，两动点间的最短距离为 m，此时运动时间为（$\sqrt{3}+\frac{3}{2}$）秒，则 m 的值为（　）．

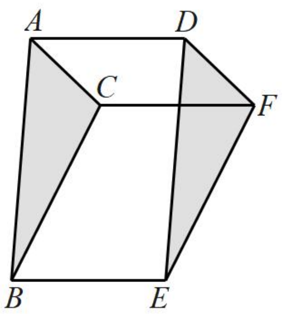


A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

答案与解析

【题型 1 平行四边形与平移问题】

【例 1】如图，将△ ABC向右平移 4 个单位，得到△ DEF，连接AD，BE，CF，则图中有______个平行四边形.



【答案】3

【分析】根据平移的性质，三角形的三条边与平移后的三条边分别相等，平行，进而根据平行四边形的判定定理即可求解.

【详解】解：依题意，$AC\parallel DF, AC=DF$，则四边形$ACFD$是平行四边形，

$BC\parallel EF, BC=EF$，四边形$BCEF$是平行四边形，

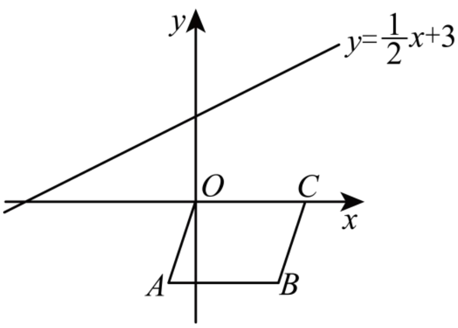
$AB\parallel DE, AB=DE$，四边形$ABED$是平行四边形，

∴有 3 个平行四边形

故答案为：3.

【点睛】本题考查了平移的性质，平行四边形的判定，熟练掌握平行四边形的判定定理是解题的关键.

【变式 1-1】（24-25 八年级下·重庆·期中）如图，在平面直角坐标系中，平行四边形$ABCO$的边OC在 x 轴上，$AB=4$，将平行四边形$ABCO$向上平移 m 个单位，点 C 的对应点恰好落在直线$y=\frac{1}{2}x+3$ 上，则平移的距离$m=$__________.



【答案】5

【分析】本题主要考查平行四边形的性质、平移的性质及求一次函数的值，理解题意，熟练掌握这些基础知识点是解题关键.

根据平行四边形的性质得出$OC=AB=4$，确定$C(4,0)$，再由题意确定当$x=4$时，$y=5$，即可求解.

【详解】解：∵平行四边形$ABCO$的边OC在x轴上，$AB=4$，

$\therefore OC=AB=4$，

$\therefore C(4,0)$，

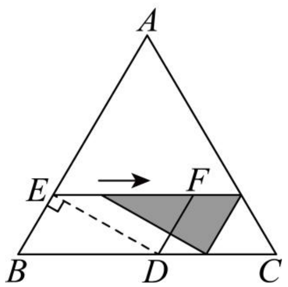
∵将平行四边形$ABCO$向上平移m个单位，点C的对应点恰好落在直线$y=\frac{1}{2}x+3$上，

∴当$x=4$时，$y=\frac{1}{2}\times 4+3=5$，

$\therefore m=5-0=5$，

故答案为：5.

【变式 1-2】如图，等边三角形ABC的边长$AB=9$，点D在边BC上，且$BD=5$．过点D作$DE\perp AB$，垂足为E，以BE、BD为邻边作平行四边形$BEFD$．将$\triangle EDF$沿BC向右平移，使点F的对应点落在边AC上，则$\triangle EDF$平移的距离为__________.



【答案】1.5

【分析】本题考查了等边三角形的性质以及平移的性质，解题的关键是熟练掌握等边三角形的判定和性质.已知$\triangle ABC$是等边三角形，$AB=9$，求出$\angle B=\angle A=60°, AB=BC=AC=9$，再根据$DE\perp AB, BD=5$，求出$BE$和$AE$，再根据四边形$BEFD$是平行四边形求出$EF=BD=5$，进而求出$FG$即可.

【详解】解：∵$\triangle ABC$是等边三角形，$AB=9$，

$\therefore \angle B=\angle A=60°, AB=BC=AC=9$，

$\because DE\perp AB, BD=5$，

$\therefore BE=2.5$，

$\therefore AE=6.5$，

∵将$\triangle EDF$沿BC向右平移，

∴E、F、G三点共线，

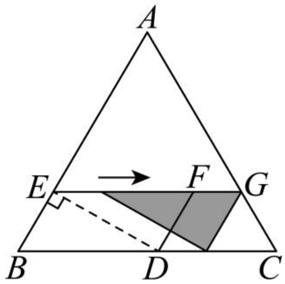
∴ $EG=6.5$，

∵四边形$BEFD$是平行四边形，

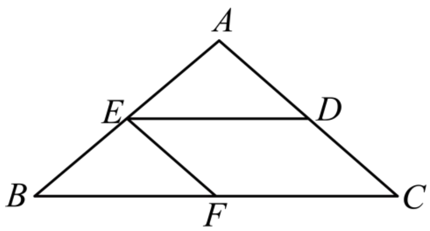
∴ $EF=BD=5$，

∴ $FG=EG-EF=6.5-5=1.5$，

故答案为：1.5．



【变式 1-3】(24-25 八年级下·山东·期末）如图，在△ABC中，$AB=AC$，$BC=14\text{cm}$，点D在AC上，$DC=5\text{cm}$，将线段DC沿CB方向平移 8cm 得到线段EF，点E,F分别落在边AB,BC上，那么四边形$EFCD$的面积为______ cm^2．



【答案】32

【分析】本题主要考查了平移的性质、等腰三角形的性质（等角对等边、三线合一）、勾股定理、平行四边形的判定及平行四边形面积的计算；掌握通过平移和等腰三角形性质求出梯形的高是解题的关键．根据平移性质得到$EF=DC$及FC的长度，利用等腰三角形性质推出$BE=EF$，作高EH后结合勾股定理求出EH，再证明平行四边形，进而计算四边形$EFCD$的面积．

【详解】解：∵将线段DC沿着CB的方向平移 7cm 得到线段EF，

∴$EF=DC=5\text{cm}$，$FC=8\text{cm}$，

∵$AB=AC$，$BC=14\text{cm}$，

∴$\angle B=\angle C$，$BF=6\text{cm}$，

∴$\angle B=\angle BFE$，

$\therefore BE = EF = 5\text{cm}$，

过点E作$EH \perp BC$，

$\because BE = EF$，

$\therefore HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm}$，

在$\triangle EHF$中，

$EH = \sqrt{EF^2 - HF^2} = 4\text{cm}$，

$\because \angle B = \angle C$，$\angle B = \angle BFE$，

$\therefore \angle C = \angle BFE$，

$\therefore EF \parallel DC$，

$\because EF = DC$，

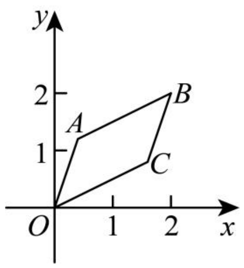
$\therefore$四边形$EFCD$是平行四边形，

$S_{\square EFCD} = EH \times FC = 4 \times 8 = 32\text{cm}^2$.

故答案为：32．

【题型 2　平行四边形与对称问题】

【例 2】（25-26 八年级上·全国·期末）如图，已知平行四边形$OABC$的顶点为$(0.4,1.2)$，若将平行四边形先沿着y轴进行第一次轴对称变换，所得图形再沿着x轴进行第二次轴对称变换，轴对称变换的对称轴遵循y轴、x轴、y轴、x轴……的规律进行，则经过第 2025 次变换后，平行四边形的顶点A的坐标为（　）



A．$(-0.4,-1.2)$　　B．$(-0.4,1.2)$　　C．$(0.4,-1.2)$　　D．$(-1.2,-0.4)$

【答案】B

【分析】本题考查了图形的变化规律，根据题意可得每 4 次轴对称变换重复一轮，据此即可求解，找到图形的变化规律是解题的关键．

【详解】解：将平行四边形先沿着y轴进行第一次轴对称变换，点A的坐标为$(-0.4,1.2)$，

所得图形再沿着x轴进行第二次轴对称变换，点A的坐标为$(-0.4,-1.2)$，

第三次轴对称变换，点A的坐标为$(0.4,-1.2)$，

第四次轴对称变换，点A的坐标为$(0.4,1.2)$，

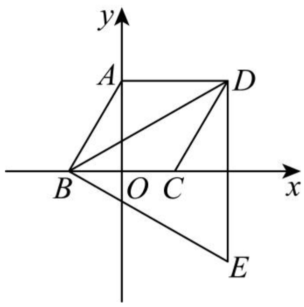
∴每 4 次轴对称变换重复一轮，

∵$2025 \div 4 = 506 \cdots\cdots 1$，

∴经过第 2025 次变换后，平行四边形的顶点A的坐标为$(-0.4,1.2)$，

故选：B．

【变式 2-1】（24-25 八年级下·辽宁丹东·期末）如图，$\triangle DBE$是以▱$ABCD$的对角线BD为边的等边三角形，点D与点E关于x轴对称，若D点的坐标是$\left(5,2\sqrt{3}\right)$，则C点的坐标为（　）

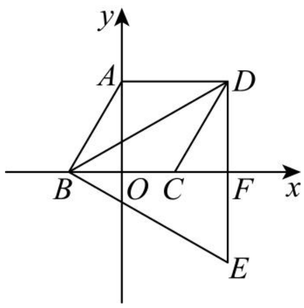


A．$(1,0)$　　B．$(2,0)$　　C．$(3,0)$　　D．$(4,0)$

【答案】D

【分析】本题主要考查等边三角形的性质，关于轴对称的点的坐标变化，平行四边形的性质，勾股定理，解此题的关键在于熟练掌握其知识点． 记DE与 x 轴相交于 F 点，$D\left(5,2\sqrt{3}\right)$，求解$BD = DE = 4\sqrt{3}$，求解$BF = \sqrt{BD^2 - DF^2} = 6$，可得$OB = BF - OF = 1$，结合平行四边形的性质求解即可．

【详解】解：记DE与 x 轴相交于 F 点，$D\left(5,2\sqrt{3}\right)$，



∵D 与点 E 关于 x 轴对称，$E\left(5,-2\sqrt{3}\right)$，

∴$F(5,0)$，即$DF = EF = 2\sqrt{3}$，$OF = 5$，$DE = 4\sqrt{3}$，

∵$\triangle BDE$是等边三角形，

$\therefore BD = DE = 4\sqrt{3}$，

在 Rt△BDF中，$BF = \sqrt{BD^2 - DF^2} = 6$，

$\therefore OB = BF - OF = 1$，

又$\because$四边形$ABCD$为平行四边形，

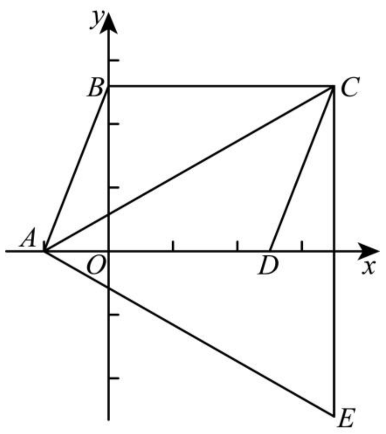
$\therefore AD = BC = 5$，

$\therefore OC = BC - OB = AD - OB = 4$，

则$C(4,0)$．

故选 D

【变式 2-2】（24-25 八年级下·江苏无锡·月考）如图，△ACE是以▱$ABCD$的对角线AC为边的等边三角形，点 C 与点 E 关于 x 轴对称．若 E 点的坐标是$(7, -3\sqrt{3})$，则 D 点的坐标是（）

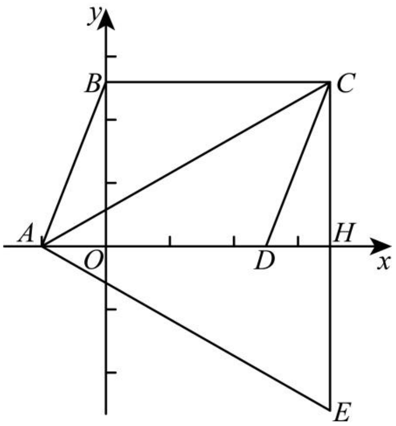


A．(7,0)　　B．(6,0)　　C．(5,0)　　D．(4,0)

【答案】C

【分析】本题考查了点关于 x 轴对称的性质，等边三角形的性质以及平行四边形的性质等知识，通过计算CE的长度，利用等边三角形的性质得到AC的长度，再利用勾股定理求出AH的长度，从而确定A点的坐标，最后根据平行四边形的性质求出D点的坐标，掌握相关知识是解题的关键．

【详解】解：如图：



∵点C与点E关于x轴对称，E点的坐标是$(7,-3\sqrt{3})$，

∴C的坐标为$\left(7,3\sqrt{3}\right)$

∴ $CH=3\sqrt{3}$，$CE=6\sqrt{3}$，

∵$\triangle ACE$是以▱$ABCD$的对角线AC为边的等边三角形，

∴ $AC=6\sqrt{3}$，

∴ $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=9$，

∵ $OH=7$，

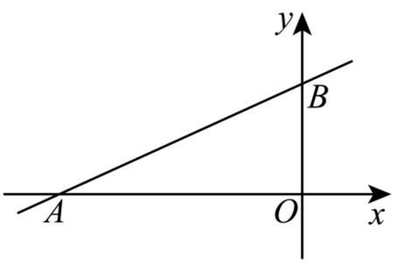
∴ $AO=DH=2$，

∴ $OD=5$，

∴D点的坐标是$(5,0)$，

故选：C.

【变式 2-3】如图，在平面直角坐标系xOy中，直线$y=kx+b$经过点$A(-4,0)$，$B(0,3)$.



(1)求直线AB的函数表达式；

(2)点 C 在直线AB上，点 D 与点 C 关于 y 轴对称，如果以 O，A，C，D 为顶点的四边形是平行四边形，求点 C 的坐标.

【答案】(1)$y=\frac{3}{4}x+3$

(2)点 C 的坐标是$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$或$\left(2,\frac{9}{2}\right)$

【分析】（1）由直线$y=kx+b$经过点$A(-4,0)$，$B(0,3)$，再利用待定系数法求解解析式即可；

（2）设CD与 y 轴相交于点 H，证明$CH=DH$，证明$AO=CD=4$．①当点 C 在线段AB上时，$CH=2$．如图，则点 C 的横坐标是-2，②当点 C 在线段AB的延长线上时，$CH=2$．如图，则点 C 的横坐标是 2，再利用函数的性质可得点的坐标．

【详解】（1）解：由题意得，直线$y=kx+b$经过点$A(-4,0)$，$B(0,3)$，

代入得$\begin{cases}-4k+b=0\\ b=3\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4}\\ b=3\end{cases}$．

∴直线AB的表达式是$y=\frac{3}{4}x+3$．

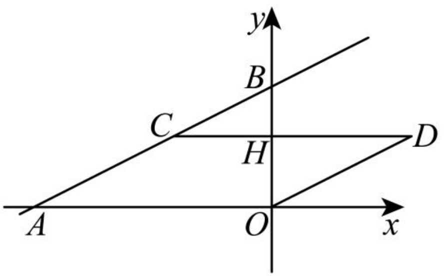
（2）∵点 C 与点 D 关于 y 轴对称，设CD与 y 轴相交于点 H，

∴$CH=DH$，

∵以 O、A、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，

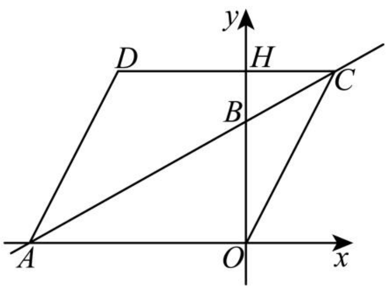
∴$AO=CD=4$．

①当点 C 在线段AB上时，$CH=2$．如图，



则点 C 的横坐标是-2，点 C 的坐标是$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$．

②当点 C 在线段AB的延长线上时，$CH=2$．如图，



则点 C 的横坐标是 2，点 C 的坐标是$\left(2,\frac{9}{2}\right)$．

综上所述，如果以 O，A、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，点 C 的坐标是$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$ 或$\left(2,\frac{9}{2}\right)$．

【点睛】本题考查的是利用待定系数法求解一次函数的解析式，平行四边形的性质与判定，轴对称的性质，

利用数形结合的方法解题是关键.

【题型 3 平行四边形与旋转问题】

【例 3】如图，一副三角板如图 1 放置，$AB=CD=\sqrt{6}$，顶点E重合，将$\triangle DEC$绕其顶点E旋转，如图 2，在旋转过程中，当$\angle AED=75°$，连接AD、BC，这时$\triangle ADE$的面积是______.

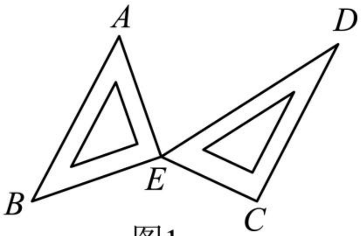


图1

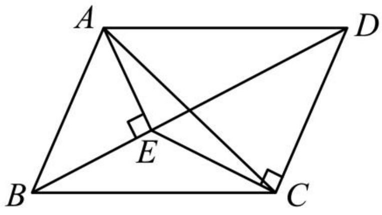
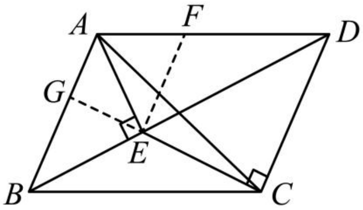


图2

【答案】$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】过点E作$EF\parallel AB$，由$\angle AED=75°$得$AB\parallel CD$，再由$AB=CD$得四边形$ABCD$为平行四边形，再证明$\triangle AEC\cong\triangle BEC$得$AC=BC$，再由$AE=BE$可知$CE$垂直平分$AB$，延长$CE$交$AB$于$G$，求出$BG$、$CG$，然后可用平行四边形的面积减三角形面积可得答案.

【详解】解：如图，过点E作$EF\parallel AB$，



$\therefore\angle BAE=\angle AEF=45°$，

$\because\angle AED=75°$，

$\therefore\angle FED=\angle AED-\angle AEF=30°$，

$\therefore\angle FED=\angle EDC$，

$\therefore EF\parallel CD$，

$\therefore AB\parallel CD$，

$\because AB=CD$，

$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形，

$\because\angle AED=75°$，$\angle DEC=60°$，

$\therefore\angle AEC=135°$，

$\because\angle AEB=90°$，

$\therefore\angle BEC=360°-135°-90°=135°$，

$\therefore \angle BEC=\angle AEC$，

在$\triangle AEC$与$\triangle BEC$中，

$$\begin{cases} AE=BC \\ \angle BEC=\angle AEC, \\ CE=CE \end{cases}$$

$\therefore\triangle AEC\cong\triangle BEC$（SAS），

$\therefore AC=BC$，

$\because AE=BE$，

$\therefore CE$垂直平分AB，

延长CE交AB于G，

$\therefore CG\perp AB$，

$\because AE=BE$，$EG\perp AB$，

$\therefore AG=BG=GE=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\because \angle EDC=30°$，

$\therefore CE=\frac{1}{2}ED$，

$\because EC^2+CD^2=ED^2$，

$\therefore CE=\sqrt{2}$，

$\therefore CG=CE+GE=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\because CE$垂直平分AB，

$\therefore$ $S_{四边形ABCD}=CG\cdot AB=\sqrt{6}\times$（$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$）$=3+2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle AED}=S_{四边形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}-S_{\triangle BEC}$

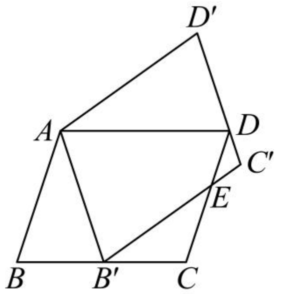
$=3+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题是三角形旋转变换综合题，主要考查了平行线的判定与性质，平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，垂直平分线的判定与性质以及勾股定理，综合能力较强.

【变式3-1】（24-25八年级下·陕西西安·期末）如图，$▱ABCD$绕点A按逆时针方向旋转36°，得到$▱AB'C'D'$，点B'恰好落在BC边上，$B'C'$和CD相交于点E，则$\angle B'EC$的度数是________.



【答案】36°/36 度

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质，旋转的性质，等边对等角，三角形内角和定理，由旋转的性质可得$AB=AB'$，$\angle BAB'=36°$，$\angle ABC=\angle AB'C'$，$\angle B+\angle C=180°$，由等腰三角形的性质可得$\angle B=\angle AB'B=72°$，由三角形的内角和定理可求解．

【详解】解：∵平行四边形$ABCD$绕点A逆时针旋转 36°，得到▱$AB'C'D'$，

$\therefore AB=AB'$，$\angle BAB'=36°$，$\angle ABC=\angle AB'C'$，$\angle B+\angle C=180°$，

$\therefore \angle B=\angle AB'B=72°$，

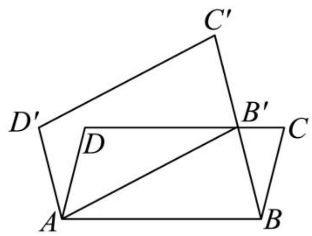
$\therefore \angle C=108°$，$\angle AB'C'=\angle B=72°$，

$\therefore \angle CB'E=180°-72°-72°=36°$，

$\therefore \angle B'EC=180°-\angle C-\angle CB'E=180°-108°-36°=36°$，

故答案为：36°．

【变式 3-2】（2025·吉林四平·三模）如图，将平行四边形$ABCD$绕点 A 旋转$\alpha°$得到平行四边形$AB'C'D'$，点 B' 落在边 CD 上，若$\angle C=76°$，当B、B'、C'三点共线时，α等于__________．



【答案】28

【分析】本题主要考查了平行四边形的性质，图形旋转的性质，等腰三角形的性质等知识，由图形旋转的性质可知$\angle C'=76°$，由平行四边形的性质可知$\angle AB'B=76°$，再用等腰三角形的性质推得$\angle ABB'=76°$，最后根据三角形的内角和定理即可得到答案，灵活运用平行四边形和图形旋转的性质是解答本题的关键．

【详解】解：∵平行四边形$ABCD$绕点 A 旋转$\alpha°$得到平行四边形$AB'C'D'$，

$\therefore \angle C'=\angle C=76°$，$AB'\parallel C'D'$ ，$AB'=AB$，

$\therefore \angle AB'B=\angle C'=\angle C=76°$，

$\because AB'=AB$，

$\therefore \angle AB'B = \angle ABB' = 76°$，

$\therefore \angle BAB = 180° - \angle ABB' - \angle AB'B = 180° - 76° - 76° = 28°$，

$\therefore \alpha$等于 28，

故答案为：28．

【变式 3-3】如图，一副三角板如图 1 放置，$AB = CD = \sqrt{6}$，顶点E重合，将$\triangle DEC$绕其顶点E旋转，如图 2，在旋转过程中，当$\angle AED = 75°$，连接AD，BC，此时四边形$ABCD$的面积是________．

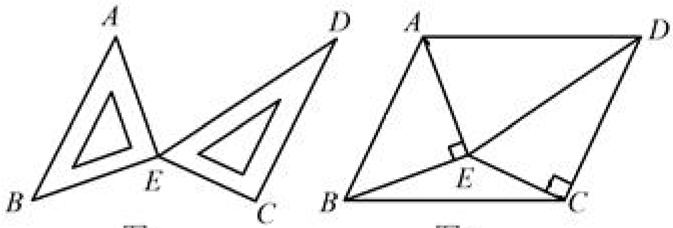


图1 图2

【答案】$2\sqrt{3}+3$

【分析】延长 CE 交 AB 于点 F，先根据特殊直角三角形的性质和$\angle AED=75°$，推出 $AB // CD$，从而可证四边形 $ABCD$ 为平行四边形，再根据等腰直角三角形的性质求出 EF 长，则可求出 CF 长，最后计算平行四边形 $ABCD$ 的面积即可．

【详解】解：如图 2，延长 CE 交 AB 于点 F，

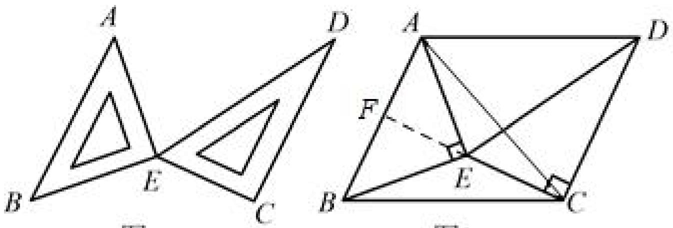


图1 图2

$\because \angle AED = 75°$，

$\therefore \angle EAD + \angle ADE = 180° - \angle AED = 105°$，

又$\angle BAE + \angle CDE = 45° + 30° = 75°$，

$\therefore \angle BAD + \angle CDA = \angle BAE + \angle CDE + \angle EAD + \angle ADE = 180°$，

$\therefore AB \parallel CD$，

$\because AB = CD$，

∴四边形是$ABCD$平行四边形，

∵$CE\perp CD$，

∴$CE\perp AB$，即$EF\perp AB$，

∴$EF=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$EC=\frac{\sqrt{3}}{3}CD=\sqrt{2}$，

∴$CF=EC+EF=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}$，

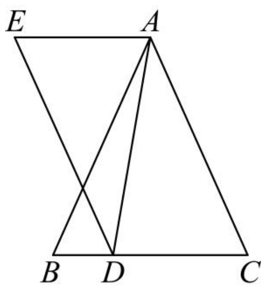
∴$S_{四边形ABCD}=AB\times CF=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3$．

故答案为：$2\sqrt{3}+3$．

【点睛】本题考查了旋转的性质，平行四边形的判定和平行四边形面积的计算，先证出四边形 ABCD 是平行四边形是解题的关键．

【题型 4　平行四边形与定值问题】

【例 4】（24-25 八年级下·浙江台州·期末）如图，在△ABC中，$AB=AC$，点 D 在BC上，过点 D、A 分别作AC、BC的平行线交于点 E，连接AD，设$AC=m$，$AD=n$，当$AE\cdot BD$为定值时，无论 m、n 的值如何变化，下列代数式的值不变的是（　　）



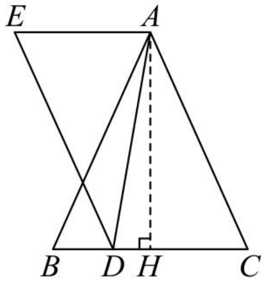
A．mn　　B．m^2-n^2　　C．m^2+n^2　　D．$m+n$

【答案】B

【分析】本题考查等腰三角形的性质，平行四边形判定和性质，勾股定理，关键是判定四边形$AEDC$是平行四边形，推出$AE=CD$，由勾股定理得到$m^2-n^2=AE\cdot BD$．

过 A 作$AH\perp BC$于 H，由等腰三角形的性质推出$BH=CH$，判定四边形 $AEDC$ 是平行四边形，推出$AE=CD$，由勾股定理得到$m^2-n^2=AE\cdot BD=$定值．

【详解】解：过 A 作$AH\perp BC$于 H，



$\because AB = AC$，

$\therefore BH = CH$，

$\because AE \parallel BC$，$DE \parallel AC$，

$\therefore$四边形$AEDC$是平行四边形，

$\therefore AE = CD$，

设$AC = m$，$AD = n$，

$\because AC^2 = m^2 = AH^2 + CH^2$，$AD^2 = n^2 = AH^2 + DH^2$，

$\therefore m^2 - n^2 = CH^2 - DH^2 = (CH + DH)(CH - DH) = CD \cdot (BH - DH) = AE \cdot BD =$定值，

故选：B

【变式 4-1】(24-25 七年级下·湖北武汉·期中) 如图 1，点$A(a,0)$、$B(b,0)$，其中 a、b 满足$\sqrt{a+1} + \sqrt{b-3} = 0$，将点 A、B 分别向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位至 C、D，连接AC、BD.

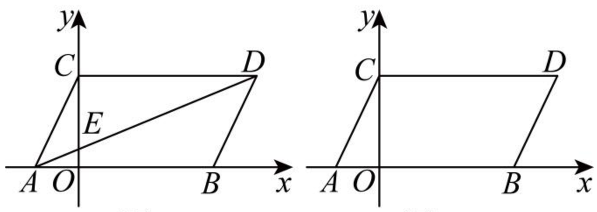


图1　　图2

(1)请直接写出$a =$______、$b =$______、c 的坐标是______；

(2)连接AD交OC于一点 E，求CE；

(3)如图 2，点 M 从 O 点出发，以每秒 1 个单位的速度向上运动，同时点 N 从 B 点出发，以每秒 2 个单位的速度向左运动．设运动时间为 t 秒$(0 < t \le 2)$，射线DN交 y 轴于点 F．问$S_{\triangle FMD} - S_{\triangle OFN}$的值是否为定值？如果是定值，请求出它的值；如果不是定值，请说明理由．

【答案】(1)-1，3，(0,2)

(2)$CE = \frac{8}{5}$

(3)$S_{\triangle FMD} - S_{\triangle OFN}$的值是定值，定值为 3

【分析】本题考查三角形综合题，考查了非负数的性质，三角形的面积等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题．

（1）利用非负数的性质，构建方程组即可解决问题．

（2）利用面积法求解即可．

（3）结论：$S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}$的值是定值．分两种情形：如图 2-1 中，当点 N 在线段OB上时，连接OD．如图 2-2 中，当点 N 在BO的延长线上时，连接OD．分别说明即可解决问题．

【详解】（1）解：$\because\sqrt{a+1}+\sqrt{b-3}=0$，

$\therefore a+1=0$，$b-3=0$，

$\therefore a=-1$，$b=3$，

$\therefore A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore AB=CD=4$，

$\because$将点 A、B 分别向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位至 C、D，

$\therefore C(0,2)$，

故答案为：-1，3，$(0,2)$；

（2）解：如图 1 中，

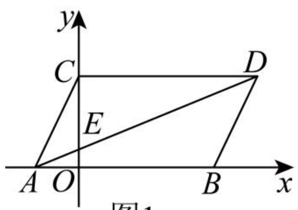


图1

$\because S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle CDE}$，

$\therefore\frac{1}{2}CO\cdot CD=\frac{1}{2}CE\cdot AO+\frac{1}{2}CE\cdot CD$，

即$\frac{1}{2}\times4\times2=\frac{1}{2}\times1\times CE+\frac{1}{2}\times4\times CE$，

$\therefore CE=\frac{8}{5}$；

（3）解：结论：$S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}$的值是定值．

理由：如图 2-1 中，当点 N 在线段OB上时，连接OD．

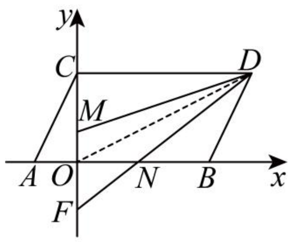


图2-1

设运动时间为 t 秒，

由题意：$OM=t$，$BN=2t$，

$\therefore S_{\triangle OMD}=\frac{1}{2}\times t\times 4=2t, S_{\triangle DBN}=\frac{1}{2}\times 2t\times 2=2t$，

$\therefore S_{\triangle OMD}=S_{\triangle BND}$，

$\therefore S_{\text{四边形}DMON}=S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$，

$\because S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}=S_{\text{四边形}DMON}=3=$定值.

如图 2-2 中，当点 N 在BO的延长线上时，连接OD.

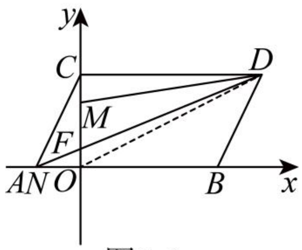
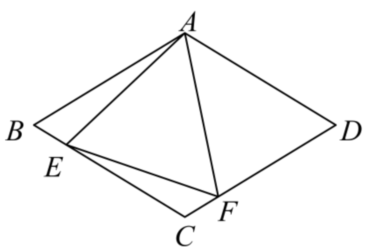


图2-2

$\because S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}=S_{\triangle ODM}-S_{\triangle ODN}=S_{\triangle DBN}-S_{\triangle ODN}=S_{\triangle OBD}=3=$定值，

综上所述，$S_{\triangle FMD}-S_{\triangle OFN}$的值是定值，定值为 3.

【变式 4-2】如图所示四边形$ABCD$中，$AB=BC=CD=DA=4$，$\angle BAD=120°$，$\triangle AEF$为正三角形，点 E、F 分别在边BC、CD上滑动，且 E、F 不与 B、C、D 重合.



(1)四边形$ABCD$______平行四边形（是或不是）

(2)证明不论 E、F 在BC、CD上如何滑动，总有$BE=CF$；

(3)当点 E、F 在BC、CD上滑动时，四边形$AECF$的面积是否发生变化？如果不变，求出这个定值；如果变化，求出最大（或最小）值.

【答案】(1)是

(2)见解析

(3)四边形$AECF$的面积不变，为定值 $4\sqrt{3}$

【分析】（1）根据$AB=BC=CD=DA=4$可知四边形$ABCD$是平行四边形，即可得答案；

（2）根据平行四边形及$\angle BAD=120°$，可证得$\triangle ABC$和$\triangle ACD$为等边三角形，则$\angle BAC=60°$，$\angle ABE=\angle 4=60°$，$AC=AB$，再结合$\triangle AEF$是等边三角形，进而证得$\angle 1=\angle 3$，利用 ASA 即可证明$\triangle ABE\cong\triangle ACF$，即可得结论；

（3）根据$\triangle ABE\cong\triangle ACF$，得$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACF}$，故由$S_{四边形AECF}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ACF}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}$，可知四边形$AECF$的面积是定值，作$AH\perp BC$于$H$点，由等边三角形的性质求得$BH=2$，进而求得$AH$即可求得$S_{\triangle ABC}$，可得定值．

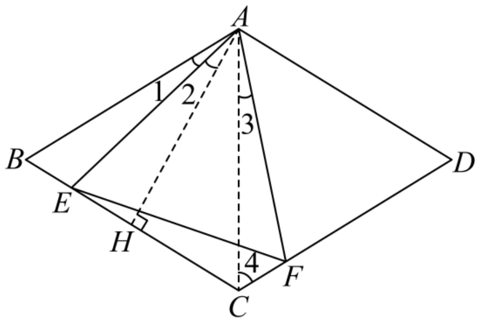
【详解】（1）解：四边形$ABCD$是平行四边形，理由如下：

$\because AB=BC=CD=DA=4$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形，

故答案为：是；

（2）证明：由（1）知四边形$ABCD$为平行四边形，则$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，



$\because\angle BAD=120°$，$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，

$\therefore\angle ABC=\angle ADC=60°$，

又$\because AB=BC=CD=DA=4$，

$\therefore\triangle ABC$和$\triangle ACD$为等边三角形，

$\therefore\angle BAC=60°$，$\angle 4=60°$，$AC=AB$，

$\because\triangle AEF$是等边三角形，

$\therefore\angle EAF=60°$，

$\therefore \angle 1 + \angle EAC = 60°$，$\angle 3 + \angle EAC = 60°$，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$，

又$\because \angle ABE = \angle 4 = 60°$，$AC = AB$，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF(\mathrm{ASA})$.

$\therefore BE = CF$；

（3）四边形$AECF$的面积不变，为定值 $4\sqrt{3}$.

理由如下：由（2）得$\triangle ABE \cong \triangle ACF$，则$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACF}$，

故$S_{四边形AECF} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ACF} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$，是定值，

作$AH \perp BC$于H点，

$\because \angle BAC = 60°$，$AB = AC = 4$

$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = 2$，则$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{四边形AECF} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 4\sqrt{3}$，

综上，四边形$AECF$的面积不变，为定值 $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定及性质，三角形全等的判定与性质，等边三角形的判定及性质，勾股定理，综合性较强，正确添加辅助线，熟练掌握和灵活运用相关知识是解题的关键.

【变式 4-3】如图 1，在平面直角坐标系中，四边形$OBCD$是正方形，$D(0,3)$，点E是OB延长线上一点，M是线段OB上一动点（不包括O、B），作$MN \perp DM$，交$\angle CBE$的平分线于点N.

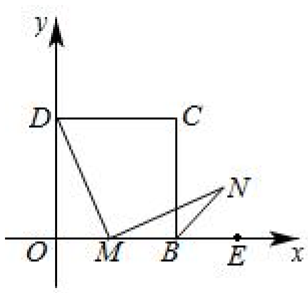


图1

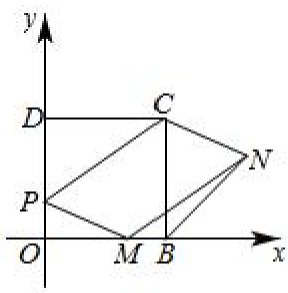


图2

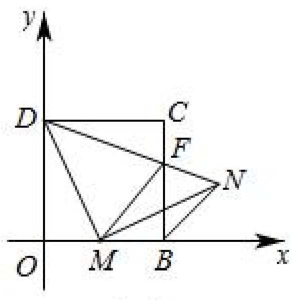


图3

(1)①直接写出点B的坐标______；

②求证：$MD = MN$；

(2)如图 2，若$M(2,0)$，在OD上找一点P，使四边形$MNCP$是平行四边形，求线段OP的长度；

(3)如图，连接DN交BC于F，连接FM，下列两个结论：

①FM的长为定值；

②MN平分$\angle FMB$，其中只有一个正确，选择并证明．

【答案】(1)①$B(3,0)$；　②证明见解析

(2)$OP = 1$

(3)②正确，证明见解析

【分析】（1）①由正方形的性质求得点 B 的坐标；②在 OD 上取 $OH=OM$，连接 HM，只要证明△DHM≌△MBN 即可．

（2）如图，作 $NE\perp OB$ 于 E，只要证明△DMO≌△MNE 即可求得点 N 的坐标．由平行四边形的对边相互平行且相等的性质求得点 P 的坐标，从而可得答案．

（3）结论：②MN 平分$\angle FMB$ 成立．如图，在 BO 延长线上取 $OA=CF$，过 M 作 $MP\perp DN$ 于 P，因为$\angle NMB+\angle CDF=45°$，所以只要证明$\angle FMN+\angle CDF=45°$即可解决问题，再说明 FM 不是定值即可，即结论①不成立．

【详解】（1）解：①∵四边形 $OBCD$ 是正方形，D（0，3），

$\therefore OD = OB = BC = DC, \angle DOB = \angle OBC = \angle BCD = \angle ODC = 90°,$

∴ B（3，0）．

②证明：如图，在 OD 上取 $OH=OM$，连接 HM，

∵$OD=OB$，$OH=OM$，

∴$HD=MB$，$\angle OHM=\angle OMH=45°$，

∴$\angle DHM=180°-45°=135°$，

∵NB 平分$\angle CBE$，

∴$\angle NBE=45°$，　∴$\angle NBM=180°-45°=135°$，

∴$\angle DHM=\angle NBM$，

∵$MN\perp DM$，　∴$\angle DMO+\angle NMB=90°$，

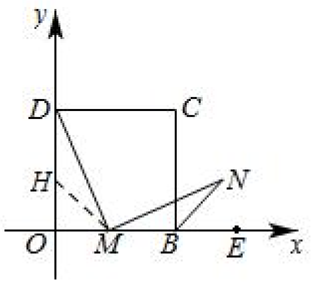
∵$\angle HDM+\angle DMO=90°$，

∴$\angle HDM=\angle NMB$，

在△*DHM* 和△*MBN* 中，$\begin{cases}\angle HDM=\angle NMB\\ DH=MB\\ \angle DHM=\angle NBM\end{cases}$，

∴△*DHM*≌△*MBN*（ASA），

∴*DM*=*MN*.



（2）如图，连接 *DM*，作 *NE*⊥*OB* 于 *E*，

由 *M*（2，0）知 *OM*=2，

∵∠*DMN*=90°，

∴∠*DMO*+∠*NME*=90°，∠*NME*+∠*MNE*=90°，

∴∠*DMO*=∠*MNE*，

在△*DMO* 和△*MNE* 中，$\begin{cases}\angle DOM=\angle NEM=90^\circ\\ \angle DMO=\angle MNE\\ DM=MN\end{cases}$，

∴△*DMO*≌△*MNE*（AAS），

∴*ME*=*DO*=3，*NE*=*OM*=2，

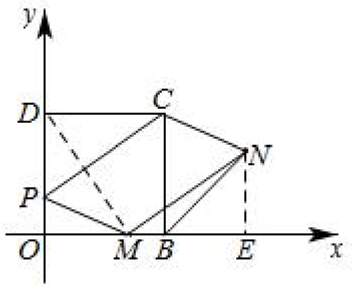
∴*OE*=*OM*+*ME*=2+3=5，

∴点 *N* 坐标（5，2），

∵四边形 *MNCP* 是平行四边形，*C*（3，3），

∴由平移的性质可得：*P*（0，1）.

所以线段$OP=1$；



（3）结论：②MN 平分$\angle FMB$ 成立．

证明：如图，在 BO 延长线上取 $OA=CF$，

在△AOD 和△FCD 中，$\begin{cases} DO=DC \\ \angle DOA=\angle C=90° \\ OA=CF \end{cases}$，

∴△DOA≌△DCF（SAS），

∴$AD=DF$，$\angle ADO=\angle CDF$，$\angle DFC=\angle DAO$,

∵$DM=MN, DM\perp MN$,

∴ $\angle MDN=45°$，

∴$\angle CDF+\angle ODM=45°$，

∴$\angle ADO+\angle ODM=45°$，

∴$\angle ADM=\angle FDM$，

在△DMA 和△DMF 中，$\begin{cases} DM=DM \\ \angle MDA=\angle MDF \\ DA=DF \end{cases}$，

∴△DMA≌△DMF（SAS），

∴$\angle DFM=\angle DAM=\angle DFC$，

过 M 作 $MP\perp DN$ 于 P，则$\angle FMP=\angle CDF$，

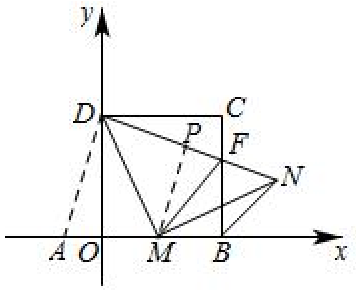
∴ $\angle NMF+\angle FMP=\angle PMN=45°$，

∵ $\angle NMB=\angle MDO$，$\angle MDO+\angle CDF=45°$，

∴$\angle NMB=\angle NMF$，即 MN 平分$\angle FMB$．

由M为OB上一个动点，且 MN 平分$\angle FMB$，$DM\perp MN$,

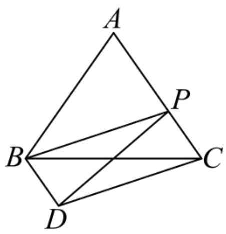
显然FM不是定值．即结论①不成立．



【点睛】本题考查四边形综合题、全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的判定和性质，坐标与图形，平行四边形的性质，正方形的性质等知识，解题的关键是学会添加辅助线，构造全等三角形，记住一些基本图形，可以使得我们在观察新问题的时候很迅速地联想到解题方法．

【题型 5　平行四边形与最大值问题】

【例 5】（24-25 八年级下·河南洛阳·月考）如图，在△ABC中，$AB=AC=5$，$BC=6$，P是边AC上的一个动点，以BC为对角线作平行四边形$BPCD$，则DP的最大值为________，最小值为________．

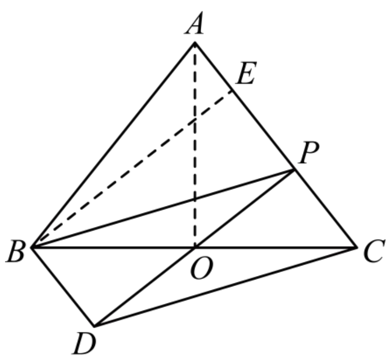


【答案】　8　$\frac{24}{5}$

【分析】本题考查的是平行四边形的性质，垂线段最短，等腰三角形的性质，勾股定理，根据平行四边形的性质得出当$DP\perp AC$时，DP最小，然后连接AO，利用等腰三角形的性质得出$AO\perp BC$，再由勾股定理及三角形等面积法即可求解；点 P 在 A 点时，DP最大为DA，根据$DA=2OA$解答即可．

【详解】解：设DP与BC交于点O，连接AO,

∵四边形$BPCD$是平行四边形，



$\therefore AC\parallel BD, BO=CO=3$

∵ P是边AC上的一个动点，

∴当$DP\perp AC$时，DP最小，

∵ $AB=AC=5$，

∴ $AO\perp BC$，

∴ $\angle AOC=90°$，

∴ $AO=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴ $\frac{1}{2}AO\times CO=\frac{1}{2}AC\times PO$，即$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times PO$，

解得$PO=\frac{12}{5}$，

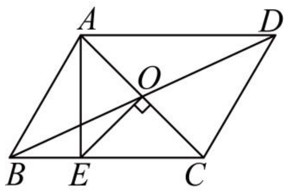
∴ $PD=2PO=\frac{24}{5}$；

当点 P 在 A 点时，DP最大为DA，

这时$DA=2OA=8$，

故答案为：8；$\frac{24}{5}$.

【变式 5-1】在平行四边形$ABCD$中，AC、BD相交于点 O，过点 O 作$OE\perp AC$，连接AE，已知$\triangle ABE$的周长为 18，若AC的长为整数，则AC的最大值是______.



【答案】17

【分析】由平行四边形的性质可得$AO=CO$，且$OE\perp AC$，可得OE是AC的垂直平分线，可得$AE=EC$，即$AB+BE+AE=AB+BE+EC=AB+BC=18$，由三角形的三边关系可求解.

【详解】解：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AO=CO$，且$OE\perp AC$，

∴$AE=CE$，

∵$\triangle ABE$的周长为 18，

∴$AB+BE+AE=AB+BE+EC=AB+BC=18$，

∵$AB+BC>AC$，

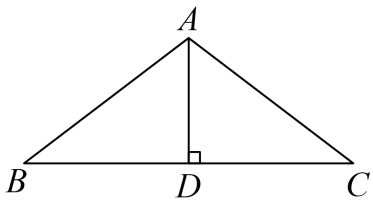
$\therefore AC < 18$，

$\therefore$对角线AC的最大整数值为 17，

故答案为：17．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，线段垂直平分线的性质，三角形三边关系，熟练运用平行四边形的性质是本题的关键．

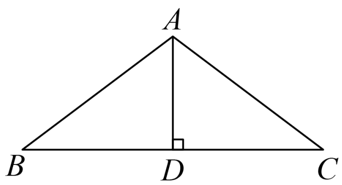
【变式 5-2】在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，$BC = 24$，$AD = 9$，$AD \perp BC$，将$\triangle ABC$沿AD剪开成两个三角形，把这两个三角形拼成一个平行四边形．在拼成的平行四边形中，对角线长度的最大值是____________．



【答案】$3\sqrt{73}$

【分析】利用等腰三角形的性质，进而重新组合得出平行四边形，进而利用勾股定理求出对角线的长．

【详解】解：如图，

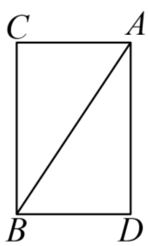


$\because \triangle ABC$中，$BC = 24$，$AD = 9$，

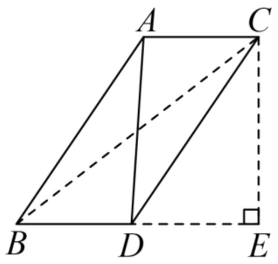
$\therefore BD = DC = 12$，

$\therefore AB = AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$，

如图所示：四边形$ACBD$是矩形，则其对角线AB的长为 15；



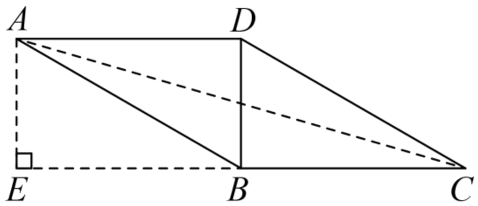
如图所示：$AD = 12$，$AB = 15$，$BD = 9$，连接BC，过点 C 作$CE \perp BD$于点 E，



则$EC = AD = 12$，$BE = 2BD = 18$，

$\therefore BC = \sqrt{12^2 + 18^2} = 6\sqrt{13}$；

如图所示：$AD = BC = 12$，$AB = 15$，$BD = 9$，过点 A 作$AE \perp BC$于点 E，



由题意可得：$AE = 9$，$EC = 2BC = 24$，

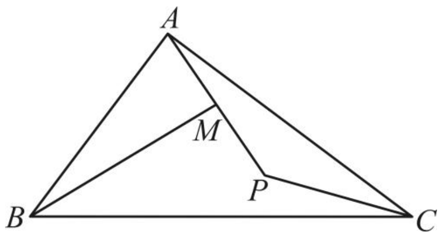
$\therefore AC = \sqrt{3^2 + 8^2}$=$3\sqrt{73}$，

其中最长的对角线的值为 $3\sqrt{73}$.

故答案为：$3\sqrt{73}$.

【点睛】此题主要考查了图形的剪拼以及勾股定理和等腰三角形的性质等知识，熟练掌握分类讨论是解题关键.

【变式 5-3】（24-25 九年级上·江苏扬州·期中）如图，在 Rt△ABC中，$\angle BAC = 90°$，$AB = 3$，$AC = 4$，平面上有一点P，连接AP，CP，若$CP = 2$，取AP的中点M．连接BM，则BM的最大值为（　）



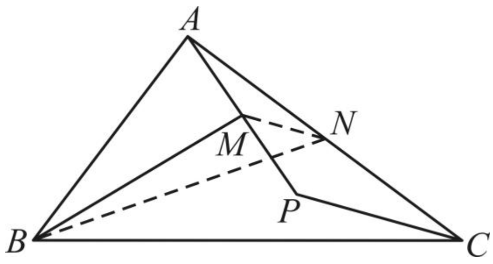
A．$\sqrt{13} + 1$　　　B．$\sqrt{15}$　　　C．$\frac{21}{5}$　　　D．$3\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】本题主要考查了勾股定理，三角形的中位线定理，三角形三边之间的关系．取AC的中点 N，连接MN, BN，则$AN = \frac{1}{2}AC = 2$，根据勾股定理求出$BN = \sqrt{13}$，由三角形的中位线定理得出$MN = \frac{1}{2}CP = 1$，根据三角形三边之间的关系得出$BM < \sqrt{13} + 1$，当点 B、M、N 在同一直线上时，BM取最大值，即可求

解.

【详解】解：取AC的中点N，连接MN，BN，



∵点N为AC中点，$AC=4$，

∴$AN=\frac{1}{2}AC=2$，

∵在Rt△ABN中，$\angle BAN=90°$，$AB=3$，

∴$BN=\sqrt{AB^2+AN^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

∵点M为AP中点，点N为AC中点，$CP=2$，

∴$MN=\frac{1}{2}CP=1$，

∴在△BMN中，$BM<BN+MN$，即$BM<\sqrt{13}+1$，

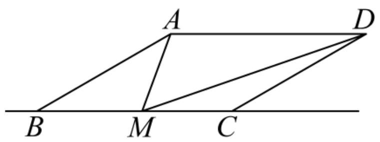
当点B、M、N在同一直线上时，$BM=BN+MN$，

此时BM取最大值$\sqrt{13}+1$，

故选：A.

【题型6　平行四边形与最小值问题】

【例6】（24-25八年级下·山东聊城·期末）如图，▱$ABCD$中，$AB=4$，$AD=5$，$\angle ABC=30°$，点M为直线BC上一动点，则$MA+MD$的最小值为（　）

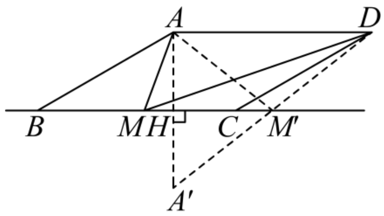


A．$\sqrt{29}$　　B．$\sqrt{39}$　　C．$\sqrt{41}$　　D．7

【答案】C

【分析】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，轴对称的性质.作A关于直线BC的对称点A'，连接$A'D$交BC于M'，则$AH=A'H$，$AH\perp BC$，$AM'=A'M'$，当M,M'重合时，$MA+MD$最小，最小值为$A'D$，再进一步结合勾股定理求解即可.

【详解】解：如图，作A关于直线BC的对称点A'，连接$A'D$交BC于M'，则$AH=A'H$，$AH\perp BC$，$AM'=A'M'$，



$\therefore$当M,M'重合时，$MA+MD$最小，最小值为$A'D$，

$\because AB=4$，$\angle ABC=30°$，在▱$ABCD$中，

$\therefore AH=\frac{1}{2}AB=2$，$AD\parallel BC$，

$\therefore AA'=2AH=4$，$AA'\perp AD$，

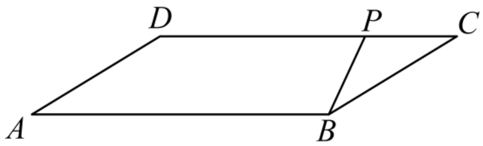
$\because AD=5$，

$\therefore A'D=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，

即$MA+MD$的最小值为$\sqrt{41}$.

故选：C.

【变式 6-1】(24-25 八年级下·陕西西安·月考)如图，已知平行四边形$ABCD$的面积为 16，$\angle A=30°$，$AB=2BC$，点 P 为边CD上的一个动点，则 $2PB+PD$的最小值为（　）

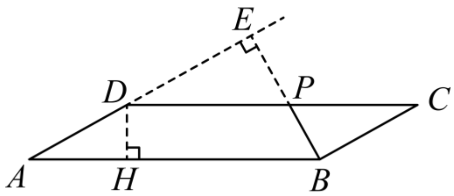


A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$8\sqrt{3}$　　D．8

【答案】D

【分析】本题考查了平行四边形的性质，垂线段最短和含 30 度的直角三角形性质，熟练应用相关性质是解题的关键．过点P $PH\perp AB$于 H，作$PE\perp AD$，交AD的延长线于点E，先求出$AB=DC=8,AD=BC=4$，可得$EP=\frac{1}{2}PD$，即$PB+\frac{1}{2}PD=PB+PE$，则当点B，点P，点E三点共线且$BE\perp AD$时，$PB+PE$有最小值，由$\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$可求最小值为$BE$.

【详解】解：如图，过点P作$PH\perp AB$于 H，作$PE\perp AD$，交AD的延长线于点E，



∵平行四边形$ABCD$的面积为 16，$\angle A = 30°$，$AB = 2BC$，

$\therefore AB = DC, AD = BC, DC \parallel AB$，

设$AB = DC = x$，则$AD = BC = \frac{1}{2}x$，$DH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}x$，

$\therefore x \cdot \frac{1}{4}x = 16$，

解得：$x = 8$（负值已舍），

$\therefore AB = DC = 8, AD = BC = 4$

$\because AB \parallel CD$，

$\therefore \angle EDP = \angle DAB = 30°$，

$\therefore \frac{EP}{DP} = \frac{1}{2}$,

$\therefore EP = \frac{1}{2}PD$，

$\therefore PB + \frac{1}{2}PD = PB + PE$，

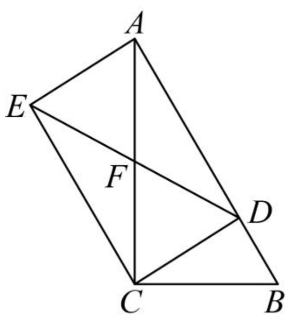
∴当点B，点P，点E三点共线且$BE \perp AD$时，$PB + PE$有最小值，即最小值为BE，

在 Rt$\triangle ABE$中，$\because \frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}$,

$\therefore 2PB + PD = 2\left(PB + \frac{1}{2}PD\right) = 2 \times BE = 2 \times \frac{1}{2}AB = 8$.

故选：D.

【变式 6-2】（24-25 八年级下·四川泸州·期中）如图，$\triangle ABC$中$\angle ACB = 90°$，$\angle B = 60°$，$AB = 6$，点 D 在AB边上，以AD，CD为邻边作▱$AECD$，则DE长度的最小值是______.



【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【分析】本题考查了平行四边形性质，垂线段最短，勾股定理，含 30 度角的直角三角形性质，解题的关键

在于根据题意找出DE长度最小时D所在位置.

过点F作$FM\perp AB$于点M，根据平行四边形性质和垂线段最短，推出当D与M重合时， DF的长度最小，再利用勾股定理，以及直角三角形性质求解，即可解题.

【详解】解：∵点 D 在AB边上，四边形$AECD$为平行四边形，

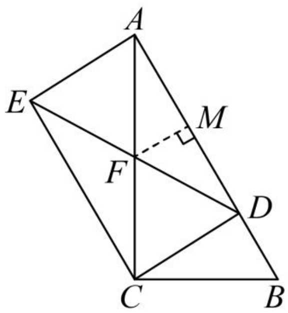
$\therefore F$为AC的中点，$DF=EF$，

$\because DE=DF+EF=2DF$，

∴要使DE的长度最小，即DF的长度最小，

过点F作$FM\perp AB$于点M，

当D与M重合时，据垂线段最短可知，此时DF的长度最小，



$\because \angle ACB=90°$，$\angle B=60°$，

$\therefore \angle BAC=30°$，

$\because AB=6$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=3$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3\sqrt{3}$，

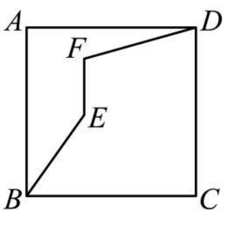
$\therefore AF=\frac{1}{2}AC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore FM=\frac{1}{2}AF=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore DE$长度的最小值是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

故答案为：$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【变式 6-3】如图，在正方形$ABCD$中，$AB=3$，EF是正方形$ABCD$内的一条长为 1 的线段，$EF\parallel AB$，连接BE、DF，则$BE+DF$的最小值为________.



【答案】$\sqrt{13}$

【分析】本题考查了线段和的最值问题，解题的关键是作辅助线，将求线段和最值转换到求某条线段长．在AB上取点M，使$BM=EF=1$，证明四边形$BMFE$是平行四边形，得出$BE=MF$，从而得到$BE+DF=MF+DF$，得到当M、F、D三点共线时，$BE+DF$有最小值，根据勾股定理求解MD的长即可得到所求．

【详解】解：如图所示，在AB上取点M，使$BM=EF=1$，

在正方形$ABCD$中，$AB=3$，

$\therefore AM=AB-BM=3-1=2$，$AD=AB=3$，

$\because EF\parallel AB$，

$\therefore$四边形$BMFE$是平行四边形，

$\therefore BE=MF$，

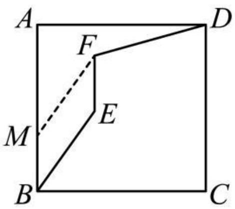
$\therefore BE+DF=MF+DF$，

当M、F、D三点共线时，$BE+DF$有最小值，

此时，$BE+DF=MF+DF=MD=\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

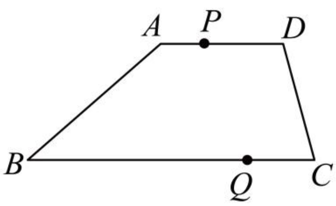
$\therefore BE+DF$的最小值为$\sqrt{13}$．

故答案为：$\sqrt{13}$ ．



【题型 7　平行四边形与动点问题】

【例 7】(24-25 八年级下·浙江宁波·期末）如图，在四边形$ABCD$中，$BC=20\text{cm}$，$AD=8\text{cm}$，$AD\parallel BC$．点P，Q分别从A，C同时出发，点P以 2cm/s 的速度沿射线AD运动，点Q以 1cm/s 的速度由点C向点B运动，当点Q运动到点B时，两点均停止运动，设运动时间为t，当$t=$__________时，以P、Q、C、D为顶点的四边形是平行四边形．



【答案】$\frac{8}{3}$或 8

【分析】此题考查了平行四边形的判定方法，熟练运用方程的思想方法是解题的关键．根据题意有$AP=2t$，$CQ=t$，$BQ=20-t$，点 P 位于线段AD上时，$PD=8-2t$，且$DP=CQ$时，四边形$PQCD$是平行四边形；

当点 P 位于射线AD上点 D 右侧时，$PD=2t-8$，且$PD=CQ$时，四边形$PDQC$是平行四边形，分别求出 t 即可.

【详解】解：根据题意有$AP=2t$，$CQ=t$，$BQ=20-t$，

$\because AD \parallel BC$，当点 P 位于线段AD上时，$PD=8-2t$，

$\therefore$当$DP=CQ$时，四边形$PQCD$是平行四边形，

$\therefore t=8-2t$，解得$t=\frac{8}{3}$，

$\therefore$运动$\frac{8}{3}$s 时四边形$PQCD$是平行四边形，

$\because AD \parallel BC$，当点 P 位于射线AD上点 D 右侧时，$PD=2t-8$，

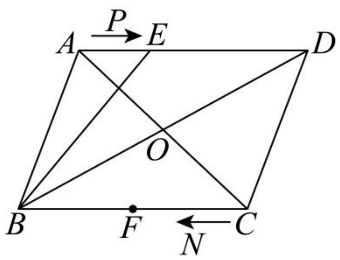
$\therefore$当$PD=CQ$时，四边形$PDQC$是平行四边形，

$\therefore 2t-8=t$，解得$t=8$，

$\therefore$运动 8s 时，四边形$PDQC$是平行四边形，

故答案为：$\frac{8}{3}$或 8.

【变式 7-1】如图，在▱$ABCD$中，对角线AC,BD相交于点O．点E在AD上，$AE=5$cm，$BE=13$cm，$\angle EBD=\angle DBC$，点F是BC的中点，若点P以 1cm/s 的速度从点A出发，沿AD向点E运动，点N同时以 2cm/s 的速度从点C出发，沿CB向点F运动，点P运动到点E时停止运动，点N也同时停止坛动，当点P运动________s 时，以点P,F,N,E为顶点的四边形是平行四边形.



【答案】4 或$\frac{14}{3}$

【分析】本题考查平行四边形的性质和判定．要使以点P,F,N,E为顶点的四边形是平行四边形，则$PE=FN$，先表示出PE,FN,则 $5-t=9-2t$或 $5-t=2t-9$，解出t即可.

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形

$\therefore AD \parallel BC, AD=BC$

$\therefore \angle ADB=\angle CBD$

$\because \angle EBD=\angle DBC$

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$

$\therefore EB = ED = 13\text{cm}$

$\because AE = 5\text{cm}$

$\therefore AD = 18\text{cm}$

$\because F$是BC的中点

$\therefore CF = BC = \frac{1}{2}AD = 9\text{cm}$

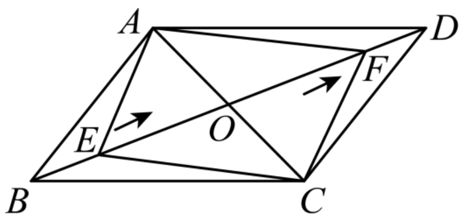
要使以点P, F, N, E为顶点的四边形是平行四边形

则$PE = FN$

$\therefore 5 - t = 9 - 2t$或 $5 - t = 2t - 9$

解得$t = 4$ 或$t = \frac{14}{3}$.

【变式 7-2】（25-26 八年级上·全国·课后作业）如图，▱$ABCD$的对角线AC、BD相交于点O，$BD = 12$，点E在线段BO上从点B出发，以每秒 1 个单位的速度运动，点F在线段OD上从点O出发，以每秒 2 个单位的速度运动．若点E、F同时出发，设运动时间为t，当$t =$______时，四边形$AECF$是平行四边形．



【答案】2

【分析】本题考查平行四边形的判定和性质，关键是根据平行四边形的性质得出方程解答．

根据平行四边形的性质得到$BO = DO = 6$，根据题意列方程即可得到结论．

【详解】解：∵四边形$AECF$为平行四边形，

$\therefore AO = OC$，$EO = OF$，

∵四边形$ABCD$为平行四边形，

$\therefore BO = OD = \frac{1}{2}BD = 6$，

$\therefore EO = 6 - t$，$OF = 2t$，

$\therefore 6 - t = 2t$，

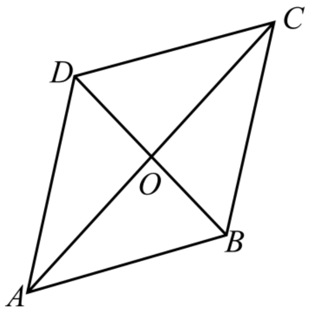
$\therefore t = 2$，

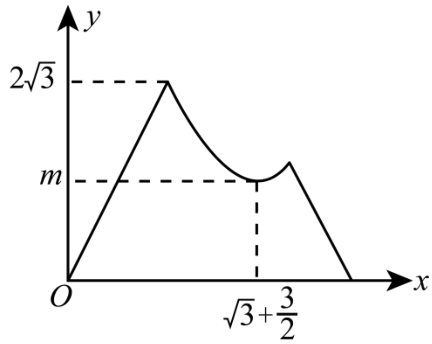
∴当t为 2 秒时，四边形$AECF$是平行四边形．

故答案为：2．

【变式 7-3】（2024·广东深圳·模拟预测）如图，动点 P、Q 在平行四边形$ABCD$的边和对角线上运动，动点 P

的运动轨迹为折线$O-A-D-O$，动点 Q 的运动轨迹为折线$O-C-B-O$，两动点同时开始运动，且运动速度均为 1cm/s．设动点运动时间为 x 秒，两动点间距离为$y$cm，x 与 y 的函数关系式如图所示．当点 P 在平行四边形$ABCD$的边上运动时，两动点间的最短距离为 m，此时运动时间为（$\sqrt{3}+\frac{3}{2}$）秒，则 m 的值为（　）．





A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】B

【分析】本题考查函数图象，平行四边形的性质，全等三角形的判定及性质，勾股定理．

根据图象可得$AC=2\sqrt{3}$，当点 P 在AD上，点 Q 在BC上运动时，过点 O 作$EF\perp AD$于点 E，交BC于点 F，则EF的长为AD，BC间的距离．通过“ASA”证明$\triangle AOE\cong\triangle COF$，得到$AE=CF$，从而当点 P 运动至点 E 时，点 Q 运动至点 F，此时$PQ=EF=m$，根据勾股定理求出EO的长，即可得到EF，从而解答．

【详解】解：由图可知，当点 P 从点 O 向点 A，点 Q 从点 O 向点 C 运动时，PQ间距离 y 逐渐增大，

当点 P 运动到点 A，点 Q 运动到点 C 时，由图象可知$y=PQ=2\sqrt{3}$，

$\therefore AC=2\sqrt{3}$，

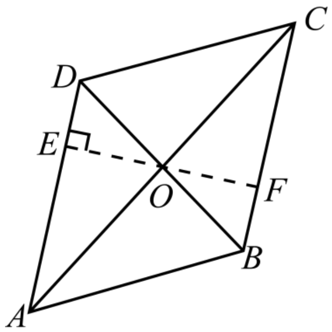
$\because$四边形四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

此时它们运动了$\sqrt{3}\div 1=\sqrt{3}(\mathrm{s})$，

当点 P 在AD上，点 Q 在BC上运动时，

过点 O 作$EF\perp AD$于点 E，交BC于点 F，则EF的长为AD，BC间的距离



∵在平行四边形$ABCD$中，$AO=CO$，$AD\parallel BC$，

∴$\angle EAO=\angle FCO$，

∵$\angle AOE=\angle COF$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle COF(\mathrm{ASA})$，

∴$AE=CF$，

∵点 P，Q 的运动速度相同，

∴当点 P 运动至点 E 时，点 Q 运动至点 F，此时$PQ=EF=m$，

根据图象可知点 P 从点 A 运动至点 E，需要$\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}(\mathrm{s})$，

∴$AE=\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$，

∵$EF\perp AD$，

∴$\mathrm{Rt}\triangle AEO$中，$EO=\sqrt{AO^2-AE^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∵$\triangle AOE\cong\triangle COF$，

∴$FO=EO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$EF=\sqrt{3}$，

即$m=\sqrt{3}$.

故选：B