# 平四专题之存在性问题

**一、题型分类：**

**①坐标系中的平行四边形存在性问题**

例1. 在平面直角坐标系中，以$A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,1)$为顶点构造平行四边形，则平行四边形顶点$D$的坐标是______.

例2. 在平面直角坐标系中，以$A(m,2)$，$B(2,3)$，$C(0,1)$，$D(-2,n)$为顶点构造平行四边形，则平行四边形顶点$D$的坐标是______.

**②动态几何中的存在性问题**

例3. 已知一次函数 $y=3x-3$ 的图象与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 $A$、$B$ 两点，点 $C$ 为 $x$ 轴负半轴上一点，且 $3OC=4OB$.

(1)求直线 $BC$ 的函数表达式；

(2)如图1，点 $E$ 是 $l_1$:$y=-\frac{1}{2}x+2$ 上的一动点，在 $y$ 轴上是否存在点 $F$，使以 $B$、$C$、$E$、$F$ 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 $E$ 坐标，若不存在，请说明理由；

(3)如图2，设 $l_1$ 交 $y$ 轴于点 $E$，点 $D$ 是直线 $l_1$:$y=-\frac{1}{2}x+2$ 上的一动点，过点 $D$ 作 $y$ 轴平行线，交直线 $BC$ 于点 $F$，当以点 $O$、$E$、$D$、$F$ 四点构成平四时，请直接写出满足条件的点 $D$ 的坐标.

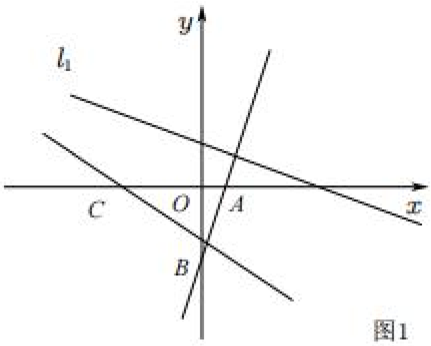


图1

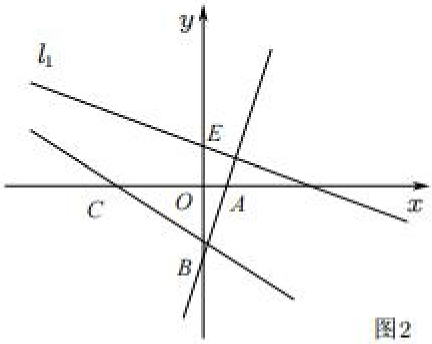
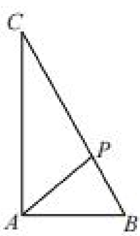


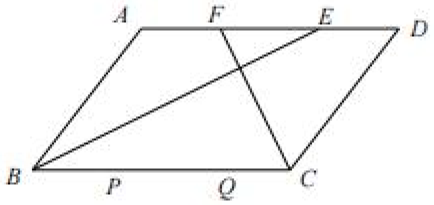
图2

例4. 如图 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=2$，$AC=4$，点 $P$ 为 $BC$ 上任意一点，连接 $PA$，以 $PA$，$PC$ 为邻边作平行四边形 $PAQC$，连接 $PQ$，则 $PQ$ 的最小值为______.



### ③几何图形中的存在性

例5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$cm，$BC=12$cm，$\angle ABC$ 的平分线交 $AD$ 于点 $E$，$\angle BCD$ 的平分线交 $AD$ 于点 $F$．若动点 $P$ 以 1cm/s 的速度从点 $B$ 出发，沿 $BC$ 向终点 $C$ 运动；与此同时，动点 $Q$ 以 2cm/s 的速度从点 $C$ 出发，沿 $CB$ 向终点 $B$ 运动；当有其中一点到达终点时，另一点也将停止运动．当点 $P$ 运动________秒时，以点 $P$、$Q$、$E$、$F$ 为顶点的四边形是平行四边形．




### ④特殊四边形的存在性

【处理策略】

矩形处理——转化为直角△或是平四；

菱形处理——转化为等腰△或是平四；

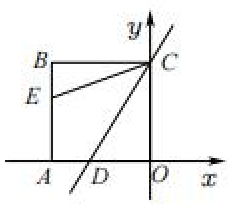
正方形处理——转化为等腰直角△.

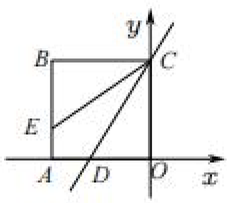
例6. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=\frac{4}{3}x+8$ 交坐标轴于点 $C$，$D$，$AD:OD=1:2$，以 $OA$ 和 $OC$ 为邻边作矩形 $OABC$，点 $E$ 是直线 $AB$ 上一动点．

(1)直接写出点 $B$ 的坐标；

(2)连接 $DE$，若 $DE$ 平分 $\angle ADC$，求出点 $E$ 的坐标；

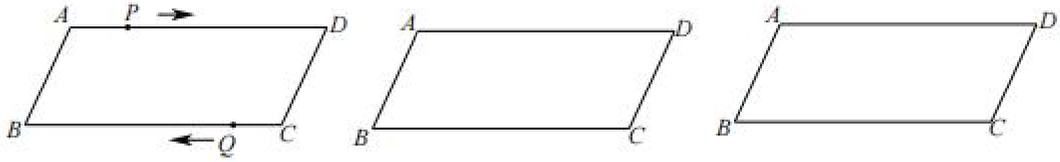
(3)若点 $F$ 是纵轴（$y$ 轴）左侧任意一点，是否存在四个点 $C$、$D$、$E$、$F$ 构成以 $CD$ 直角边的矩形，若存在，求出点 $F$ 坐标，若不存在，请说明理由



二、专题训练

1. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle B=60^\circ$，$AB=6cm$，$BC=12cm$，点$P$从点$A$出发，以$1cm/s$的速度沿$A$到$D$运动，同时点$Q$从点$C$出发，以$3cm/s$的速度沿$C-B-C-\cdots$往复运动，当点$P$到达端点$D$时，点$Q$随之停止运动，在此运动过程中，线段$PQ=CD$出现的次数为______.

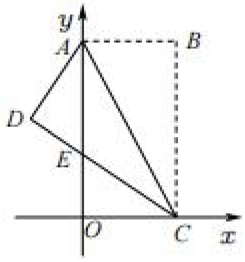



2. 如图，在平面直角坐标系中，把矩形$OABC$沿对角线$AC$所在直线折叠，点$B$落在点$D$处，$DC$与$y$轴相交于点$E$，矩形$OABC$的边$OC=4$，$OA=8$.

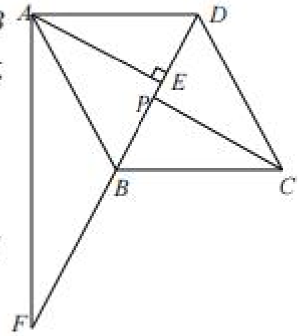
(1)求出线段$OE$的长；

(2)求出点$D$的坐标；

(3)若$F$是直线$AC$上一个动点，在坐标平面内是否存在点$P$，使四边形$ECFP$为菱形？若存在，请求出$F$点的坐标；若不存在，请说明理由.



3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BD=CD$，$AE\perp BD$ 于点 $E$，点 $F$ 在 $DB$ 的延长线上，且 $AB=BF$，点 $P$ 是线段 $DF$ 上的动点(点 $P$ 与点 $D$，点 $F$ 不重合)，连接 $CP$.




(1)若 $AE=4$，$AF=4\sqrt{5}$，求▱$ABCD$ 的面积；

(2)在(1)的条件下，在同一平面内是否存在点 $Q$ 使以点 $C$，$P$，$D$，$Q$ 为顶点的四边形是矩形？若存在，求出 $DQ$ 的长度，若不存在，请说明理由.

4. 已知直线 $l_1$：$y=kx-4(k>0)$ 分别与 $x$ 轴，$y$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，直线 $l_2$：$y=-\frac{1}{2}x+4$ 与 $y$ 轴交于点 $C$，与直线 $l_1$ 交于点 $D$.

(1)如图1，点 $D$ 的横坐标为4，若点 $E$ 是 $l_1$：$y=kx-4(k>0)$ 上一动点，

①求直线 $l_1$ 的函数表达式；

②连接 $CE$，若 $\triangle ECD$ 的面积为4，求 $E$ 的坐标；

(2)如图2，点 $P$ 是线段 $OA$ 上一点，$OP=2$，在线段 $CP$ 上取点 $M$，将线段 $MP$ 绕点 $P$ 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 $PN$，点 $N$ 恰好在直线 $l_1$ 上，且 $AP=1.5$，在平面内是否存在一点 $H$，使得四边形 $MPNH$ 为正方形，若存在，求出点 $H$ 的坐标；若不存在，请说明理由.

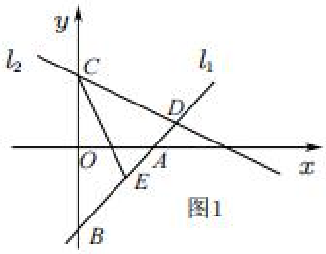



图1

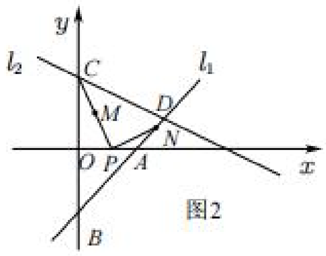



图2

# 平四专题之存在性问题

## 一、题型分类：

### ①坐标系中的平行四边形存在性问题

例1. 在平面直角坐标系中，以 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，$C(0,1)$为顶点构造平行四边形，则平行四边形顶点 $D$ 的坐标是______.

【答案】$(3,1)$ 或 $(-3,1)$ 或 $(1,-1)$.

解法归纳：坐标系中的平四通解：平移法.

例2. 在平面直角坐标系中，以 $A(m,2)$，$B(2,3)$，$C(0,1)$，$D(-2,n)$ 为顶点构造平行四边形，则平行四边形顶点 $D$ 的坐标是______.

【答案】$(-2,4)$ 或 $(-2,0)$ 或 $(-2,2)$.

解法归纳：坐标系中的平四通解：对角线中点策略.

以 $AB$ 为对角线
$\begin{cases}x_A+x_B=x_C+x_D\\y_A+y_B=y_C+y_D\end{cases}$
则：$D(-2,4)$，$m=-4$；

以 $AC$ 为对角线
$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$
则：$D(-2,0)$，$m=0$；

以 $AD$ 为对角线
$\begin{cases}x_A+x_D=x_C+x_B\\y_A+y_D=y_C+y_B\end{cases}$
则：$D(-2,2)$，$m=4$；

从例题的角度，将三种分类讨论明示了，若只是解题，只需要关注未知的点 D 的纵坐标即可.

**②动态几何中的存在性问题**

例3. 已知一次函数 $y=3x-3$ 的图象与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 $A$、$B$ 两点，点 $C$ 为 $x$ 轴负半轴上一点，且 $3OC=4OB$.

(1)求直线 $BC$ 的函数表达式；

(2)如图1，点 $E$ 是 $l_1:y=-\frac{1}{2}x+2$ 上的一动点，在 $y$ 轴上是否存在点 $F$，使以 $B$、$C$、$E$、$F$ 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 $E$ 坐标，若不存在，请说明理由；

(3)如图2，设 $l_1$ 交 $y$ 轴于点 $E$，点 $D$ 是直线 $l_1:y=-\frac{1}{2}x+2$ 上的一动点，过点 $D$ 作 $y$ 轴平行线，交直线 $BC$ 于点 $F$，当以点 $O$、$E$、$D$、$F$ 四点构成平四时，请直接写出满足条件的点 $D$ 的坐标.

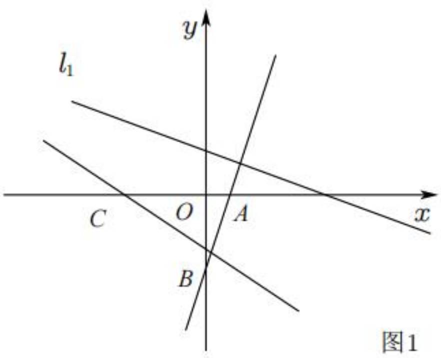


图1

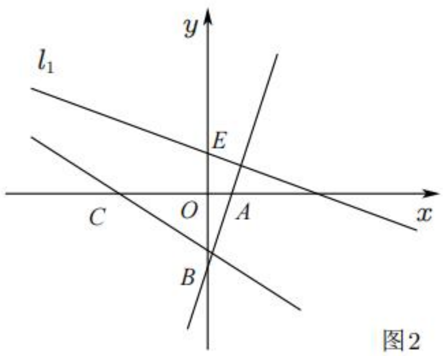


图2

**解析:**

**(2) 坐标系对角线中点策略步骤:**

①设坐标:设 $E\left(m,-\frac{1}{2}m+2\right)$,$F(0,n)$;

②分类列出方程:当 $BF$ 为对角线时,则有 $\begin{cases}0=m-4\\n-3=-\frac{1}{2}m+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=4\\n=3\end{cases}\Rightarrow E(4,0)$,其它情况同上哈;

③汇总得答案;

(3) 先分析:会发现已经能够确定对边 $OE$ 和 $DF$ 平行,此时只需要保证 $OE=DF$ 即可,

但四边形顺序不确定,故分类讨论或使用绝对值处理:

设 $D\left(t,-\frac{1}{2}t+2\right)$,则 $F\left(t,-\frac{3}{4}t-3\right)$,

$\because OE\parallel DF$,$\therefore$ 当 $OE=DF$ 时,以点 $O$、$E$、$D$、$F$ 四点构成平四,

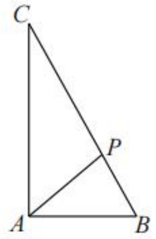
$\therefore\left|--\frac{1}{2}t+2+\frac{3}{4}t+3\right|=2$,解得:$t_1=-12$,$t_2=-28$,

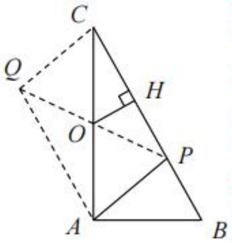
$\therefore D(-12,8)$ 或 $(-28,16)$.

*Ps:* 绝对值处理熟练掌握不用画图形了哦.

【答案】(1)$y=-\frac{3}{4}x-3$;(2)$(-4,4)$ 或 $(4,0)$;(3)$D(-12,8)$ 或 $(-28,16)$

例4. 如图 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=2$，$AC=4$，点 $P$ 为 $BC$ 上任意一点，连接 $PA$，以 $PA$，$PC$ 为邻边作平行四边形 $PAQC$，连接 $PQ$，则 $PQ$ 的最小值为______.




**解析：如图，先作出图，$PQ$ 为平四对角线，联想到 $PQ=2PO$，$O$ 点为 $AC$ 中点，为定点，则最值问题即为 $O$ 到 $BC$ 的距离即 $OH$.**

**垂线段处理一定一定一定要联想到等积，等积的图形可以是三角形或是四边形；**

**找△的方法：看垂线段经过哪个点，作哪个边的垂线（找边别看垂足哈，垂足是做出来的）；**

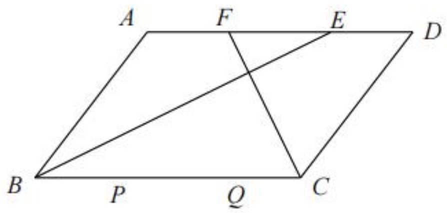
**求法：等积，略；**

**善于观察的你，可能还会发现，因为 $AQ\parallel CP$，所以，P,Q 其实是在两组确定的平行线上动的，什么时候最小？平行线间距离！**

【答案】$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

**③几何图形中的存在性**

例5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=8\text{cm}$，$BC=12\text{cm}$，$\angle ABC$ 的平分线交 $AD$ 于点 $E$，$\angle BCD$ 的平分线交 $AD$ 于点 $F$. 若动点 $P$ 以 1cm/s 的速度从点 $B$ 出发，沿 $BC$ 向终点 $C$ 运动；与此同时，动点 $Q$ 以 2cm/s 的速度从点 $C$ 出发，沿 $CB$ 向终点 $B$ 运动；当有其中一点到达终点时，另一点也将停止运动. 当点 $P$ 运动__________秒时，以点 $P$、$Q$、$E$、$F$ 为顶点的四边形是平行四边形.




**【解析】此题与例 3 的 (3) 类似，PQ // EF，故 PQ=EF 即可，PQ 有两种表示方法，故两解.**

【答案】$\frac{8}{3}$ 或 $\frac{16}{3}$

### ④特殊四边形的存在性

【处理策略】

矩形处理——转化为直角△或是平四;

菱形处理——转化为等腰△或是平四;

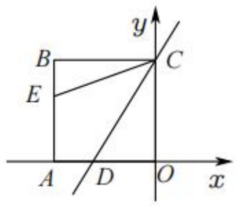
正方形处理——转化为等腰直角△.

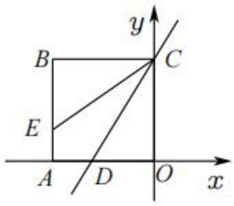
例6. 如图,在平面直角坐标系中,直线 $y=\frac{4}{3}x+8$ 交坐标轴于点 $C$,$D$,$AD:OD=1:2$,以 $OA$ 和 $OC$ 为邻边作矩形 $OABC$,点 $E$ 是直线 $AB$ 上一动点.

(1)直接写出点 $B$ 的坐标;

(2)连接 $DE$,若 $DE$ 平分 $\angle ADC$,求出点 $E$ 的坐标;

(3)若点 $F$ 是纵轴($y$ 轴)左侧任意一点,是否存在四个点 $C$、$D$、$E$、$F$ 构成以 $CD$ 直角边的矩形,若存在,求出点 $F$ 坐标,若不存在,请说明理由



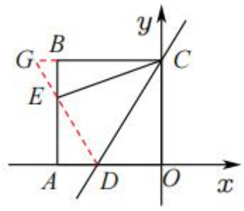




解析: (2) 归纳总结: 见到角平分线,若是"大环境中有平行线"($BC\parallel OA$),

则联想到 $\left\{\begin{matrix}\text{角平分线}\\\text{平行线}\end{matrix}\right.\Rightarrow$ 等腰△,如图,延长构造等腰,易得 $G(-10,8)$,

进而得直线 $DG$: $y=-2x-12$, 最终得 $E(-9,6)$

法②: 也可以作双垂直+勾股定理




(3) 法①: 作答规范:

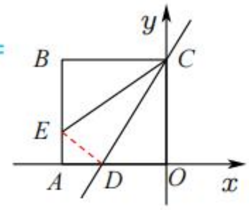
假设存在四个点 $C$、$D$、$E$、$F$ 构成以 $CD$ 直角边的矩形(step ①先假设存在),设 $AE=x$,

∵ 四个点 $C$、$D$、$E$、$F$ 构成以 $CD$ 直角边的矩形,

∴ ① 当 $DE$,$DC$ 为邻边时,则 $\angle EDC=90°$,(step ②邻边分类) ∴ $DE^2+DC^2=EC^2$,

∵ 矩形 $OABC$, ∴ $\angle B=\angle A=90°$, ∴ $BE^2+BC^2=EC^2$,$AE^2+AD^2=DE^2$,

∴ $x^2+3^2+10^2=9^2+(8-x)^2$,$\Rightarrow x=\frac{9}{4}$,$\Rightarrow E\left(-9,\frac{9}{4}\right)$,$\Rightarrow F\left(-3,\frac{41}{4}\right)$.




② 当 $DC$, $CE$ 为邻边时,则 $\angle DCE=90°$, 如图, 方法同

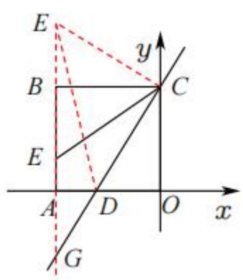
勾股模型之三勾股: $AE^2+AD^2-DC^2=BE^2+BC^2$,

或是双勾股: 需要先找到 $CD$ 与 $BA$ 延长线的交点 $G$, 求出点 $G$,

$EG^2-CG^2=BE^2+BC^2$, 列出方程后求得.

法②: 也可以直接用距离公式+勾股定理列方程,比如情况②,

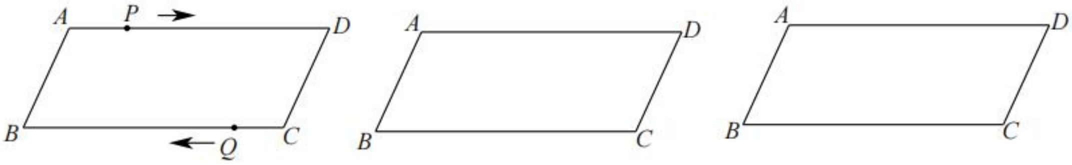
设点 $E(-9,y)$, 根据 $EC^2+CD^2=ED^2\Rightarrow 9^2+(y-8)^2+10^2=(-9+6)^2+y^2$.



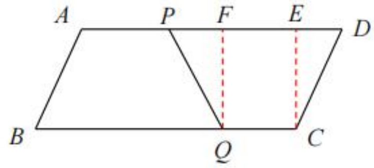

(1)$B(-9,8)$;(2)$(-9,6)$;(3)$F\left(-15,\frac{27}{4}\right)$ 或 $F\left(-3,\frac{41}{4}\right)$.

**二、专题训练**

1. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle B=60^\circ$，$AB=6cm$，$BC=12cm$，点$P$从点$A$出发，以$1cm/s$的速度沿$A$到$D$运动，同时点$Q$从点$C$出发，以$3cm/s$的速度沿$C-B-C-\cdots$往复运动，当点$P$到达端点$D$时，点$Q$随之停止运动，在此运动过程中，线段$PQ=CD$出现的次数为______.




【解析】思路点拨：出现线段$PQ=CD$，情况要分两种，
①四边形$PDCQ$构成平四；
②四边形$PDCQ$构成等腰梯形；
(2024常州中考题亦可用同样的方法优化)
平四的情况好分析，等腰梯形的情况如下图：
作双垂直，得到$PF=DE=3$，则要求$PD>6$，
满足$EF=QC$去找符合题意的时间$t$.



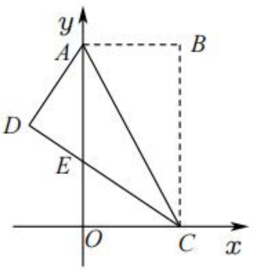

【答案】4

2. 如图，在平面直角坐标系中，把矩形 $OABC$ 沿对角线 $AC$ 所在直线折叠，点 $B$ 落在点 $D$ 处，$DC$ 与 $y$ 轴相交于点 $E$，矩形 $OABC$ 的边 $OC=4$，$OA=8$.

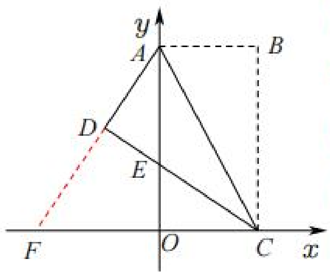
(1)求出线段 $OE$ 的长；

(2)求出点 $D$ 的坐标；

(3)若 $F$ 是直线 $AC$ 上一个动点，在坐标平面内是否存在点 $P$，使四边形 $ECFP$ 为菱形？若存在，请求出 $F$ 点的坐标；若不存在，请说明理由.




【解析】

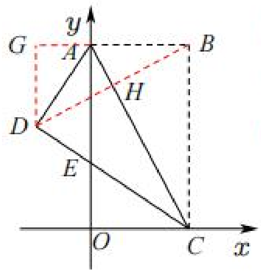



(2) 求点 $D$ 坐标方法：

法①函数法：把 $D$ 看作两直线交点，求出直线 $AD$ 和 $CE$，需要解决直线 $AD$ 表达式的问题，

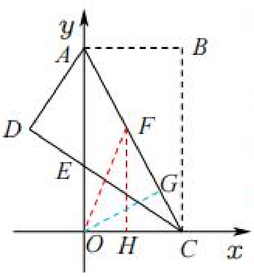
翻折会有角平分线，“大环境有平行”，则构造等腰，如图所示，

则有 $AF=FC$，根据 $Rt\triangle AFO$，可解出点 $F$；




法②几何法：如图，翻折常用辅助线：连接对应点 $BD$，(有垂直平分)

等积法可先求得 $BH$，从而有 $BD$，在 $Rt\triangle AGD$ 和 $Rt\triangle BGD$ 中，双勾股可求 $AG$ 和 $GD$，从而求得点 $D$ 的坐标.




(3) 如图，根据 $EC=CF$，找到点 $F$ 的位置，线段 $AC$ 上和其延长线上各有一个，先看线段 $AC$ 上的点 $F$，

方法归纳：根据线段长求解点的坐标，用等积法处理，

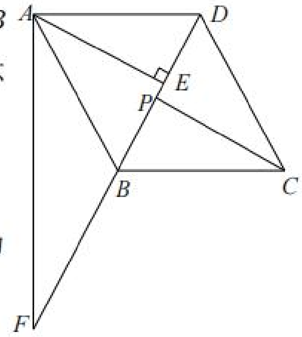
如图，等积法求出 $OG$，得到 $\triangle FOC$ 面积，然后等积法求出 $FH$，代入直线 $AC$ 表达式即可；

法②：也可直接用距离公式表示 $FC$，列出方程，不过涉及一元二次方程，没学过的话先了解，跳过此方法的计算哈.

有了线段 $AC$ 上的点 $F$，延长线上的点 $F$ 可根据 $C$ 是中点求得.

【答案】(1)$OE=3$;(2)$\left(-\frac{12}{5},\frac{24}{5}\right)$;　（3）F（$4-\sqrt{5}$，$2\sqrt{5}$）或($4+\sqrt{5}$,$-2\sqrt{5}$)

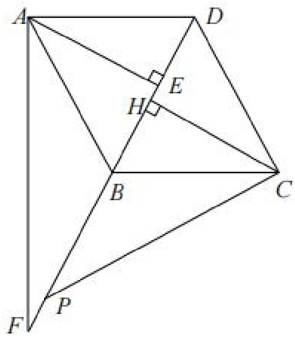
3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BD=CD$，$AE\perp BD$ 于点 $E$，点 $F$ 在 $DB$ 的延长线上，且 $AB=BF$，点 $P$ 是线段 $DF$ 上的动点(点 $P$ 与点 $D$，点 $F$ 不重合)，连接 $CP$.




(1)若 $AE=4$，$AF=4\sqrt{5}$，求□$ABCD$ 的面积；

(2)在(1)的条件下，在同一平面内是否存在点 $Q$ 使以点 $C$，$P$，$D$，$Q$ 为顶点的四边形是矩形？若存在，求出 $DQ$ 的长度，若不存在，请说明理由.

【解析】(3) 情况②：当 $DC$，$CP$ 为邻边时，则 $\angle DCP=90°$，
如图，求解时，借助第一种情况或是作 $CH\perp PD$，
易得 $DH$，$HC$，在 $Rt\triangle DCP$ 和 $Rt\triangle HCP$ 中，设出 $BP$，双勾股即可.




【答案】(1)20；(2)$CP\perp BD$ 时，$DQ=4$；$PC\perp CD$ 时，$DQ=\frac{20}{3}$.

4. 已知直线 $l_1$：$y=kx-4\ (k>0)$分别与 $x$ 轴，$y$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，直线 $l_2$：$y=-\frac{1}{2}x+4$ 与 $y$ 轴交于点 $C$，与直线 $l_1$ 交于点 $D$.

(1)如图1，点 $D$ 的横坐标为4，若点 $E$ 是 $l_1$：$y=kx-4\ (k>0)$上一动点，

①求直线 $l_1$ 的函数表达式；

②连接 $CE$，若 $\triangle ECD$ 的面积为4，求 $E$ 的坐标；

(2)如图2，点 $P$ 是线段 $OA$ 上一点，$OP=2$，在线段 $CP$ 上取点 $M$，将线段 $MP$ 绕点 $P$ 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 $PN$，点 $N$ 恰好在直线 $l_1$ 上，且 $AP=1.5$，在平面内是否存在一点 $H$，使得四边形 $MPNH$ 为正方形，若存在，求出点 $H$ 的坐标；若不存在，请说明理由.

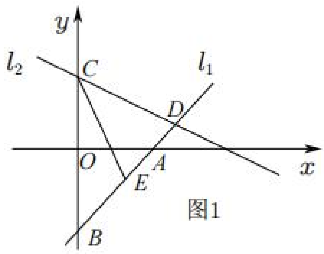



图1

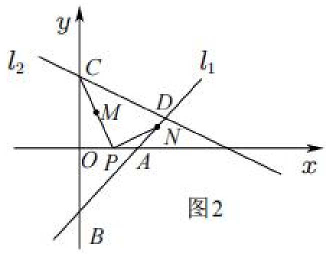



图2

【解析】(1)②动点△面积处理：依靠坐标轴去割补或是铅锤高法
要注意的是点 $E$ 的位置是不确定的，可能在点 $D$ 的上方哈，别漏解；
(2) 按部就班的照着题意走就行，正方形拆解成等腰 $Rt\triangle$，用 $k$ 全等处理；

【答案】(1)①$y=\frac{3}{2}x-4$；②$E(3,0.5)$或$(5,3.5)$；(2)存在，点 $H\left(\frac{10}{3},4\right)$