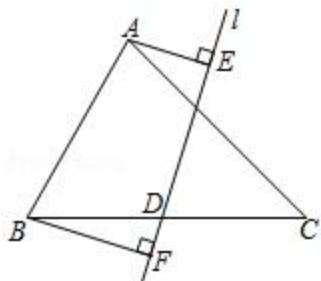


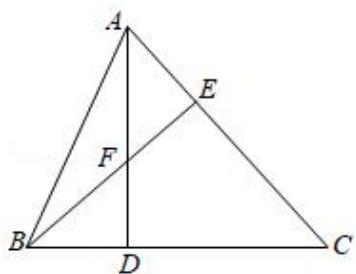
专题 08 其他最值问题

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, D 是 BC 的中点, 直线 l 经过点 D , $AE \perp l$, $BF \perp l$, 垂足分别为 E , F , 则 $AE + BF$ 的最大值为()

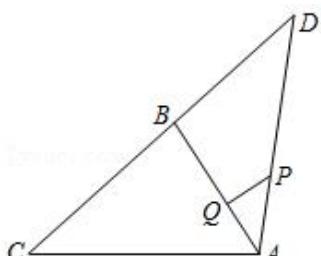


- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 5$, 点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上, $CD = 2BD$, $CE = 2AE$, BE 交 AD 于点 F , 则 $\triangle AFE$ 面积的最大值是 ____.

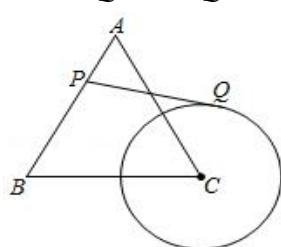


3. 如图, 在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 6$, $BC = 5$, $AC^2 = AB(AB + BC)$, 且 $\triangle DAB \sim \triangle DCA$, 若 $AD = 3AP$, 点 Q 是线段 AB 上的动点, 则 PQ 的最小值是()



- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{8}{5}$

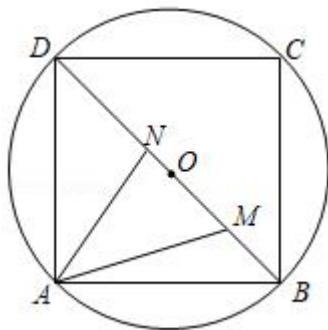
4. 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 4, $\odot C$ 的半径为 $\sqrt{3}$, P 为 AB 边上一动点, 过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ , 切点为 Q , 则 PQ 的最小值为 ____.



5. 设 O 为坐标原点, 点 A 、 B 为抛物线 $y = x^2$ 上的两个动点, 且 $OA \perp OB$. 连接点 A 、 B , 过 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C , 则点 C 到 y 轴距离的最大值()

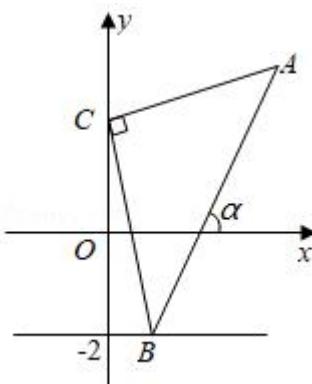
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 线段 MN 在对角线 BD 上运动, 若 $\odot O$ 的面积为 2π , $MN = 1$, 则 $\triangle AMN$ 周长的最小值是()

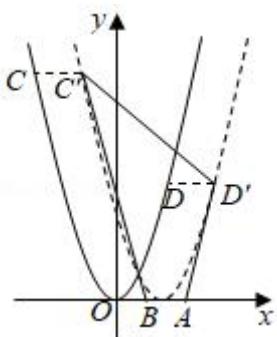


A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. 如图, 已知点 $A(4,3)$, 点 B 为直线 $y = -2$ 上的一动点, 点 $C(0,n)$, $-2 < n < 3$, $AC \perp BC$ 于点 C , 连接 AB . 若直线 AB 与 x 轴正半轴所夹的锐角为 α , 那么当 $\sin \alpha$ 的值最大时, n 的值为 ____.



8. 如图, 已知点 $A(3,0)$, $B(1,0)$, 两点 $C(-3,9)$, $D(2,4)$ 在抛物线 $y = x^2$ 上, 向左或向右平移抛物线后, C , D 的对应点分别为 C' , D' . 当四边形 $ABC'D'$ 的周长最小时, 抛物线的解析式为 ____.

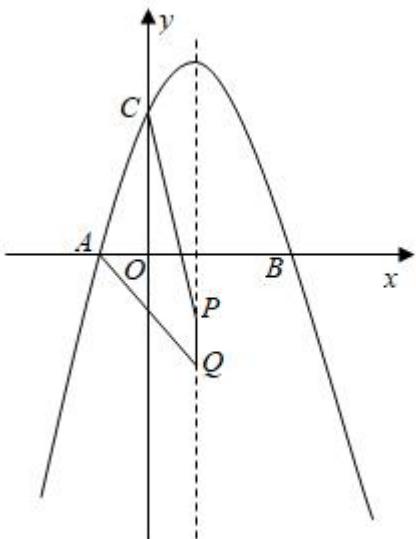


9. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴分别相交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 下表给出了这条抛物线上部分点 (x, y) 的坐标值:

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	0	3	4	3	0	…

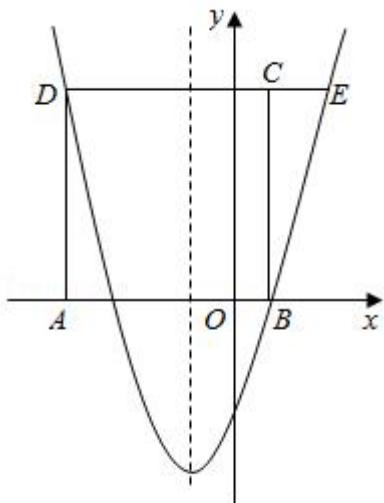
(1) 求出这条抛物线的解析式及顶点 M 的坐标;

(2) PQ 是抛物线对称轴上长为 1 的一条动线段 (点 P 在点 Q 上方), 求 $AQ + QP + PC$ 的最小值;



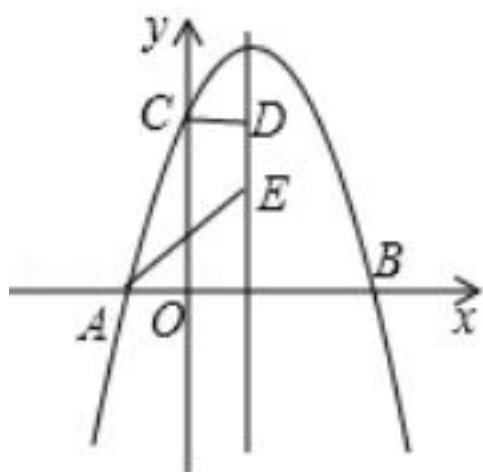
10. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 为正方形，点 A ， B 在 x 轴上，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 B ， $D(-4,5)$ 两点，且与直线 DC 交于另一点 E .

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) P 为 y 轴上一点，过点 P 作抛物线对称轴的垂线，垂足为 M ，连接 ME ， BP ，探究 $EM+MP+PB$ 是否存在最小值. 若存在，请求出这个最小值及点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



11. 如图抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-1,0)$ ，点 $C(0,3)$ ，且 $OB=OC$.

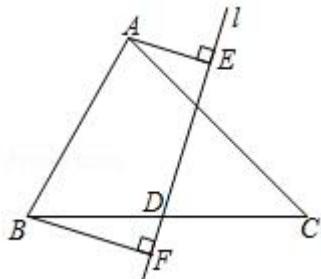
- (1) 求抛物线的解析式及其对称轴；
- (2) 点 D 、 E 是直线 $x=1$ 上的两个动点，且 $DE=1$ ，点 D 在点 E 的上方，求四边形 $ACDE$ 的周长的最小值.



专题 08 其他最值问题

参考答案

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, D 是 BC 的中点, 直线 l 经过点 D , $AE \perp l$, $BF \perp l$, 垂足分别为 E , F , 则 $AE + BF$ 的最大值为()



- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

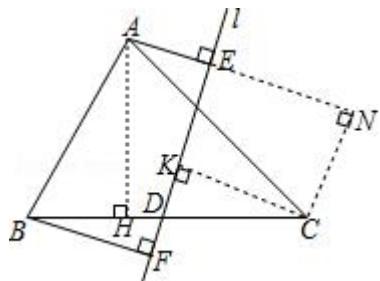
【解答】解: 如图, 过点 C 作 $CK \perp l$ 于点 K , 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,
在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中,

$$\because \angle ABC = 60^\circ, AB = 2,$$

$$\therefore BH = 1, AH = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$,

$$\therefore AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$$



\because 点 D 为 BC 中点,

$$\therefore BD = CD,$$

在 $\triangle BFD$ 与 $\triangle CKD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BFD = \angle CKD = 90^\circ \\ \angle BDF = \angle CDK \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BFD \cong \triangle CKD (AAS),$$

$$\therefore BF = CK,$$

延长 AE , 过点 C 作 $CN \perp AE$ 于点 N ,

可得 $AE + BF = AE + CK = AE + EN = AN$,

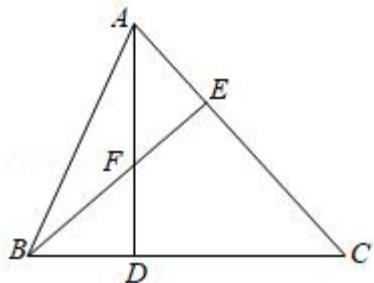
在 $\text{Rt}\triangle ACN$ 中, $AN < AC$,

当直线 $l \perp AC$ 时, 最大值为 $\sqrt{6}$,

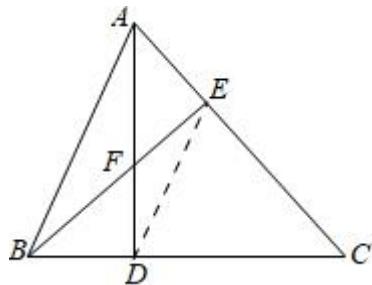
综上所述, $AE + BF$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.

故选: A .

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 5$, 点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上, $CD = 2BD$, $CE = 2AE$, BE 交 AD 于点 F , 则 $\triangle AFE$ 面积的最大值是 $-\frac{4}{3}-$.



【解答】解: 连接 DE .



$\because CD = 2BD$, $CE = 2AE$,

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} = 2,$$

$\therefore DE \parallel AB$,

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{BA} = \frac{2}{3},$$

$\therefore DE \parallel AB$,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle BDF},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABD},$$

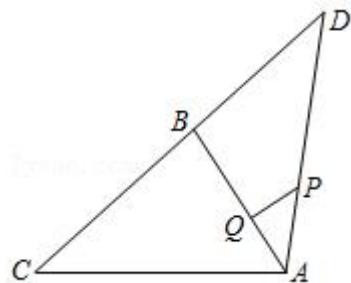
$$\because BD = \frac{1}{3}BC = \frac{5}{3},$$

\therefore 当 $AB \perp BD$ 时, $\triangle ABD$ 的面积最大, 最大值 $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 4 = \frac{10}{3}$,

$$\therefore \triangle AEF$$
 的面积的最大值 $= \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3},$

故答案为: $\frac{4}{3}$

3. 如图, 在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 6$, $BC = 5$, $AC^2 = AB(AB + BC)$, 且 $\triangle DAB \sim \triangle DCA$, 若 $AD = 3AP$, 点 Q 是线段 AB 上的动点, 则 PQ 的最小值是()



- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{8}{5}$

【解答】解: $\because \triangle DAB \sim \triangle DCA$,

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{6}{5+BD} = \frac{BD}{6},$$

解得: $BD = 4$ (负值舍去),

$\because \triangle DAB \sim \triangle DCA$,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AC = \frac{3}{2}AB,$$

$$\therefore AC^2 = AB(AB + BC),$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}AB\right)^2 = AB(AB + BC),$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore AB = BD = 4,$$

过 B 作 $BH \perp AD$ 于 H ,

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AD = 3,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\because AD = 3AP, \quad AD = 6,$$

$$\therefore AP = 2,$$

当 $PQ \perp AB$ 时, PQ 的值最小,

$$\because \angle AQP = \angle AHB = 90^\circ, \quad \angle PAQ = \angle BAH,$$

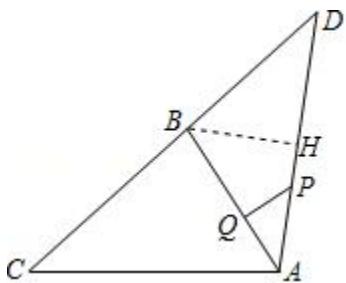
$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABH,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BH},$$

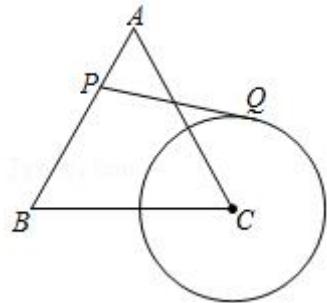
$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{PQ}{\sqrt{7}},$$

$$\therefore PQ = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

故选: A.



4. 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 4, $\odot C$ 的半径为 $\sqrt{3}$, P 为 AB 边上一动点, 过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ , 切点为 Q , 则 PQ 的最小值为 3.



【解答】解: 连接 CP 、 CQ , 作 $CH \perp AB$ 于 H , 如图,

\because 等边三角形 ABC 的边长为 4,

$$\therefore AB = CB = 4, \quad \angle BCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = 2, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3},$$

$\because PQ$ 为 $\odot C$ 的切线,

$$\therefore CQ \perp PQ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CPQ$ 中, $PQ = \sqrt{CP^2 - CQ^2} = \sqrt{CP^2 - 3}$,

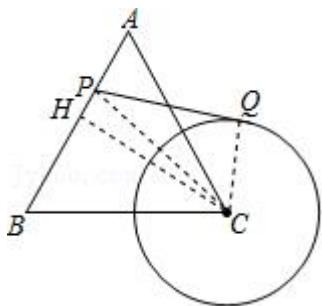
\because 点 P 是 AB 边上一动点,

\therefore 当点 P 运动到 H 点时, CP 最小,

即 CP 的最小值为 $2\sqrt{3}$,

$\therefore PQ$ 的最小值为 $\sqrt{12 - 3} = 3$,

故答案为: 3.



5. 设 O 为坐标原点, 点 A 、 B 为抛物线 $y = x^2$ 上的两个动点, 且 $OA \perp OB$. 连接点 A 、 B , 过 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C , 则点 C 到 y 轴距离的最大值()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

【解答】解: 如图, 分别作 AE 、 BF 垂直于 x 轴于点 E 、 F ,

设 $OE = a$, $OF = b$, 由抛物线解析式为 $y = x^2$,

则 $AE = a^2$, $BF = b^2$,

作 $AH \perp BF$ 于 H , 交 y 轴于点 G , 连接 AB 交 y 轴于点 D ,

设点 $D(0, m)$,

$\because DG \parallel BH$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABH$,

$$\therefore \frac{DG}{BH} = \frac{AG}{AH}, \text{ 即 } \frac{m-a^2}{b^2-a^2} = \frac{a}{a+b}.$$

化简得: $m = ab$.

$\because \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOE + \angle BOF = 90^\circ$,

又 $\angle AOE + \angle EAO = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOF = \angle EAO$,

又 $\angle AEO = \angle BFO = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFB$.

$$\therefore \frac{AE}{OF} = \frac{EO}{BF},$$

$$\text{即 } \frac{a^2}{b} = \frac{a}{b^2},$$

化简得 $ab=1$.

则 $m=ab=1$, 说明直线 AB 过定点 D , D 点坐标为 $(0,1)$.

$\because \angle DCO = 90^\circ$, $DO = 1$,

\therefore 点 C 是在以 DO 为直径的圆上运动,

\therefore 当点 C 到 y 轴距离为 $\frac{1}{2}DO = \frac{1}{2}$ 时, 点 C 到 y 轴的距离最大.

故选: A.

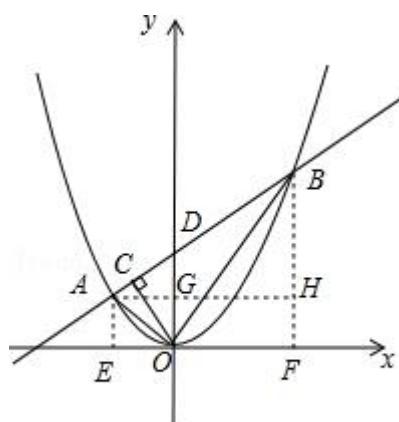
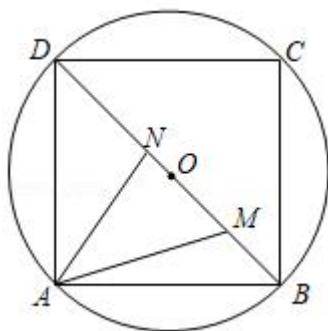


图1

6. 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 线段 MN 在对角线 BD 上运动, 若 $\odot O$ 的面积为 2π , $MN=1$, 则 $\triangle AMN$ 周长的最小值是()



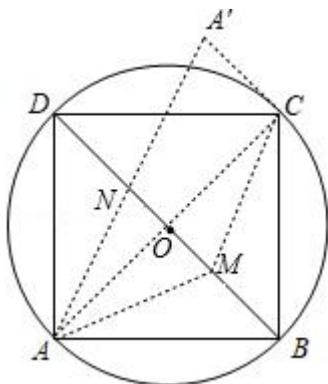
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【解答】解: $\odot O$ 的面积为 2π , 则圆的半径为 $\sqrt{2}$, 则 $BD = 2\sqrt{2} = AC$,

由正方形的性质, 知点 C 是点 A 关于 BD 的对称点,

过点 C 作 $CA' \parallel BD$, 且使 $CA'=1$,

连接 AA' 交 BD 于点 N ，取 $NM = 1$ ，连接 AM 、 CM ，则点 M 、 N 为所求点，



理由： $\because A'C // MN$ ，且 $A'C = MN$ ，则四边形 $MCA'N$ 为平行四边形，

则 $A'N = CM = AM$ ，

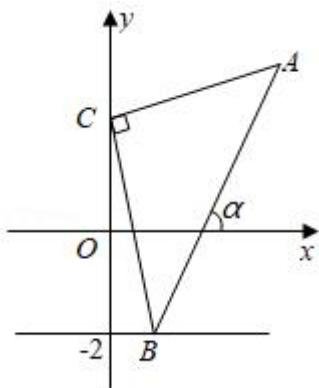
故 $\triangle AMN$ 的周长 $= AM + AN + MN = AA' + 1$ 为最小，

则 $A'A = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$ ，

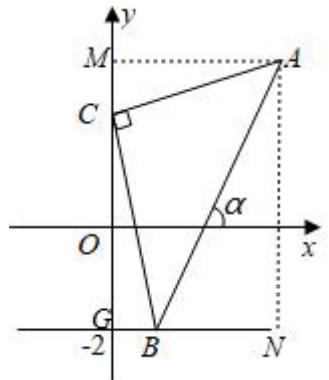
则 $\triangle AMN$ 的周长的最小值为 $3 + 1 = 4$ ，

故选：B.

7. 如图，已知点 $A(4,3)$ ，点 B 为直线 $y = -2$ 上的一动点，点 $C(0,n)$ ， $-2 < n < 3$ ， $AC \perp BC$ 于点 C ，连接 AB . 若直线 AB 与 x 轴正半轴所夹的锐角为 α ，那么当 $\sin \alpha$ 的值最大时， n 的值为 $-\frac{1}{2}$.



【解答】解：过点 A 作 $AM \perp y$ 轴于点 M ，作 $AN \perp BN$ 交于点 N ，



\because 直线 $y = -2$ 与 x 轴平行,

$\therefore \angle ABN = \alpha$,

当 $\sin \alpha$ 的值最大时, 则 $\tan \alpha = \frac{AN}{NB} = \frac{5}{NB}$ 值最大,

故 BN 最小, 即 BG 最大时, $\tan \alpha$ 最大,

即当 BG 最大时, $\sin \alpha$ 的值最大,

设 $BG = y$,

则 $AM = 4$, $GC = n + 2$, $CM = 3 - n$,

$\because \angle ACM + \angle MAC = 90^\circ$, $\angle ACM + \angle BCG = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAM = \angle BCG$,

$\therefore \tan \angle CAM = \tan \angle BCG$,

$\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{BG}{CG}$, 即 $\frac{3-n}{4} = \frac{y}{n+2}$,

$\therefore y = -\frac{1}{4}(n-3)(n+2) = -\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})^2 + \frac{25}{16}$,

$\therefore -\frac{1}{4} < 0$,

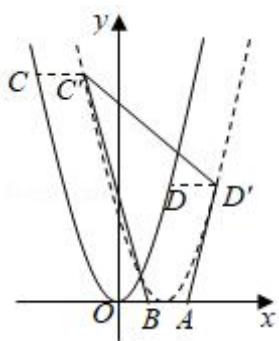
\therefore 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, y 取得最大值,

故 $n = \frac{1}{2}$,

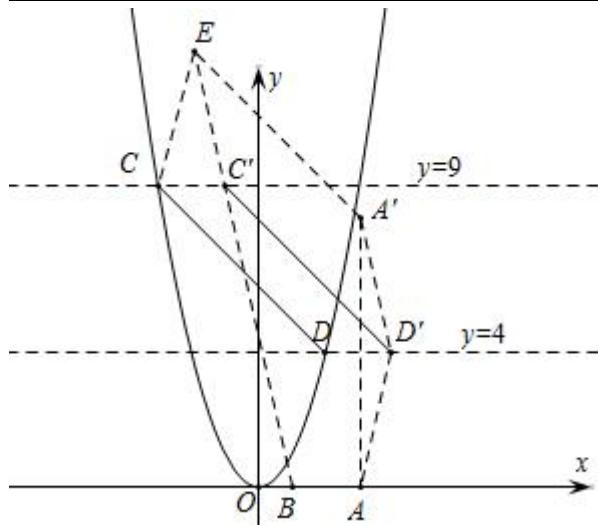
故答案为: $\frac{1}{2}$.

8. 如图, 已知点 $A(3,0)$, $B(1,0)$, 两点 $C(-3,9)$, $D(2,4)$ 在抛物线 $y = x^2$ 上, 向左或向右平移抛物线后,

C , D 的对应点分别为 C' , D' . 当四边形 $ABC'D'$ 的周长最小时, 抛物线的解析式为 $y = (x - \frac{25}{13})^2$.



【解答】解: 过 C 、 D 作 x 轴平行线, 作 A 关于直线 $y = 4$ 的对称点 A' , 过 A' 作 $A'E \parallel CD$, 且 $A'E = CD$, 连接 BE 交直线 $y = 9$ 于 C' , 过 C' 作 $C'D' \parallel CD$, 交直线 $y = 4$ 于 D' , 如图:



作图可知：四边形 $A'ECD$ 和四边形 $C'D'DC$ 是平行四边形，

$\therefore A'E \parallel CD$ ， $C'D' \parallel CD$ ，且 $A'E = CD$ ， $C'D' = CD$ ，

$\therefore C'D' \parallel A'E$ 且 $C'D' = A'E$ ，

\therefore 四边形 $A'EC'D'$ 是平行四边形，

$\therefore A'D' = EC'$ ，

$\because A$ 关于直线 $y=4$ 的对称点 A' ，

$\therefore AD' = A'D'$ ，

$\therefore EC' = AD'$ ，

$\therefore BE = BC' + EC' = BC' + AD'$ ，即此时 $BC' + AD'$ 转化到一条直线上， $BC' + AD'$ 最小，最小值为 BE 的长度，

而 AB 、 CD 为定值，

\therefore 此时四边形 $ABC'D'$ 的周长最小，

$\because A(3,0)$ 关于直线 $y=4$ 的对称点 A' ，

$\therefore A'(3,8)$ ，

\because 四边形 $A'ECD$ 是平行四边形， $C(-3,9)$ ， $D(2,4)$ ，

$\therefore E(-2,13)$ ，

设直线 BE 解析式为 $y = kx + b$ ，则 $\begin{cases} 0 = k + b \\ 13 = -2k + b \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = -\frac{13}{3} \\ b = \frac{13}{3} \end{cases}$ ，

∴ 直线 BE 解析式为 $y = -\frac{13}{3}x + \frac{13}{3}$,

令 $y=9$ 得 $9=-\frac{13}{3}x+\frac{13}{3}$,

$\therefore x=-\frac{14}{13}$,

$\therefore C'(-\frac{14}{13}, 9)$,

$\therefore CC'=-\frac{14}{13}-(-3)=\frac{25}{13}$,

即将抛物线 $y=x^2$ 向右移 $\frac{25}{13}$ 个单位后, 四边形 $ABC'D'$ 的周长最小,

∴ 此时抛物线为 $y=(x-\frac{25}{13})^2$,

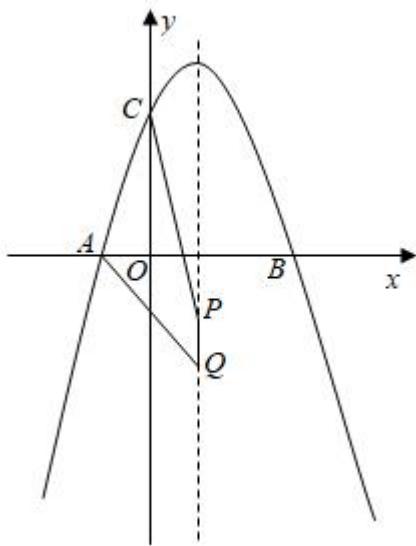
故答案为: $y=(x-\frac{25}{13})^2$.

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴分别相交于 A 、 B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 下表给出了这条抛物线上部分点 (x,y) 的坐标值:

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	0	3	4	3	0	…

(1) 求出这条抛物线的解析式及顶点 M 的坐标;

(2) PQ 是抛物线对称轴上长为 1 的一条动线段 (点 P 在点 Q 上方), 求 $AQ+QP+PC$ 的最小值;



【解答】解: (1) 根据表格可得出 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$,

设抛物线解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$,

将 $C(0,3)$ 代入, 得: $3=a(0+1)(0-3)$,

解得: $a=-1$,

$$\therefore y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

\therefore 该抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$, 顶点坐标为 $M(1, 4)$;

(2) 如图 1, 将点 C 沿 y 轴向下平移 1 个单位得 $C'(0, 2)$, 连接 BC' 交抛物线对称轴 $x=1$ 于点 Q' ,

过点 C 作 $CP' \parallel BC'$, 交对称轴于点 P' , 连接 AQ' ,

$\because A$ 、 B 关于直线 $x=1$ 对称,

$$\therefore AQ' = BQ',$$

$$\because CP' \parallel BC', P'Q' \parallel CC',$$

\therefore 四边形 $CC'Q'P'$ 是平行四边形,

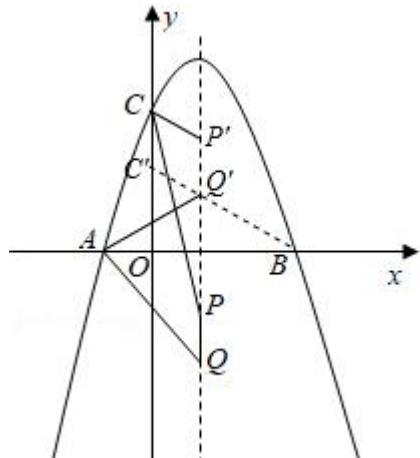
$$\therefore CP' = C'Q', Q'P' = CC' = 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BOC' \text{ 中}, BC' = \sqrt{OC'^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore AQ' + Q'P' + P'C = BQ' + C'Q' + Q'P' = BC' + Q'P' = \sqrt{13} + 1,$$

此时, C' 、 Q' 、 B 三点共线, $BQ' + C'Q'$ 的值最小,

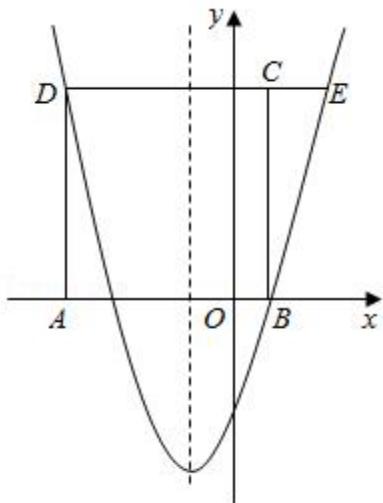
$\therefore AQ + QP + PC$ 的最小值为 $\sqrt{13} + 1$;



10. 如图, 在平面直角坐标系中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 A , B 在 x 轴上, 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 B , $D(-4, 5)$ 两点, 且与直线 DC 交于另一点 E .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) P 为 y 轴上一点, 过点 P 作抛物线对称轴的垂线, 垂足为 M , 连接 ME , BP , 探究 $EM + MP + PB$ 是否存在最小值. 若存在, 请求出这个最小值及点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【解答】解：（1）由点 D 的纵坐标知，正方形 $ABCD$ 的边长为 5，

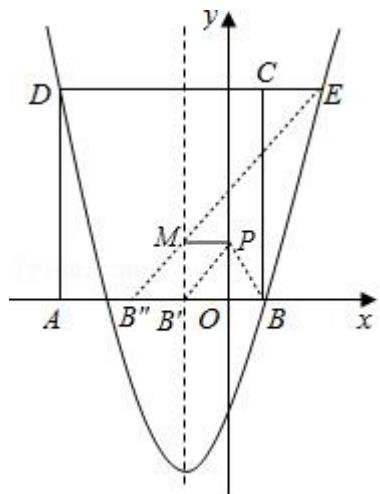
则 $OB = AB - AO = 5 - 4 = 1$ ，故点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 16-4b+c=5 \end{cases} \text{，解得 } \begin{cases} b=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

故抛物线的表达式为 $y=x^2+2x-3$ ；

（2）存在，理由：

由题意抛物线的对称轴交 x 轴于点 $B'(-1, 0)$ ，将点 B' 向左平移 1 个单位得到点 $B''(-2, 0)$ ，



连接 $B''E$ ，交函数的对称轴于点 M ，过点 M 作 $MP \perp y$ 轴，则点 P 、 M 为所求点，此时 $EM + MP + PB$ 为最小，

理由： $\because B'B''=PM=1$ ，且 $B'B'' \parallel PM$ ，故四边形 $B''B'PM$ 为平行四边形，则 $B''M=B'P=BP$ ，

则 $EM + MP + PB = EM + 1 + MB'' = B''E + 1$ 为最小，

由点 B'' 、 E 的坐标得，直线 $B''E$ 的表达式为 $y=\frac{5}{4}(x+2)$ ，

当 $x = -1$ 时, $y = \frac{5}{4}(x+2) = \frac{5}{4}$, 故点 M 的坐标为 $(-1, \frac{5}{4})$,

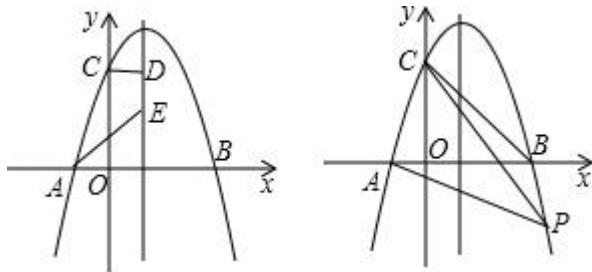
则 $EM + MP + PB$ 的最小值 $B'E + 1 = 1 + \sqrt{(-2-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41} + 1$.

11. 如图抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$, 点 $C(0, 3)$, 且 $OB = OC$.

(1) 求抛物线的解析式及其对称轴;

(2) 点 D 、 E 是直线 $x = 1$ 上的两个动点, 且 $DE = 1$, 点 D 在点 E 的上方, 求四边形 $ACDE$ 的周长的最小值.

(3) 点 P 为抛物线上一点, 连接 CP , 直线 CP 把四边形 $CBPA$ 的面积分为 $3:5$ 两部分, 求点 P 的坐标.



【解答】解: (1) $\because OB = OC$, \therefore 点 $B(3, 0)$,

则抛物线的表达式为: $y = a(x+1)(x-3) = a(x^2 - 2x - 3) = ax^2 - 2ax - 3a$,

故 $-3a = 3$, 解得: $a = -1$,

故抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 3 \dots ①$,

函数的对称轴为: $x = 1$;

(2) 四边形 $ACDE$ 的周长 $= AC + DE + CD + AE$, 其中 $AC = \sqrt{10}$ 、 $DE = 1$ 是常数,

故 $CD + AE$ 最小时, 周长最小,

取点 C 关于直线 $x = 1$ 对称点 $C'(2, 3)$, 则 $CD = C'D$,

取点 $A'(-1, 1)$, 则 $A'D = AE$,

故: $CD + AE = A'D + DC'$, 则当 A' 、 D 、 C' 三点共线时, $CD + AE = A'D + DC'$ 最小, 周长也最小,

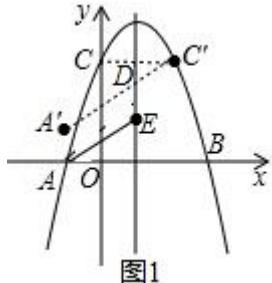


图1

四边形 $ACDE$ 的周长的最小值 $= AC + DE + CD + AE = \sqrt{10} + 1 + A'D + DC' = \sqrt{10} + 1 + A'C' = \sqrt{10} + 1 + \sqrt{13}$;