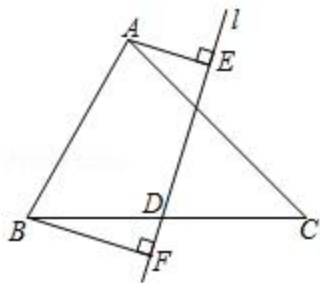


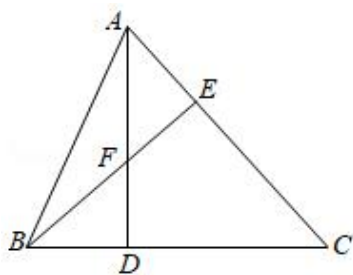
## 专题 08 其他最值问题

1. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=2$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\angle ACB=45^\circ$ ， $D$  是  $BC$  的中点，直线  $l$  经过点  $D$ ， $AE \perp l$ ， $BF \perp l$ ，垂足分别为  $E$ ， $F$ ，则  $AE+BF$  的最大值为( )

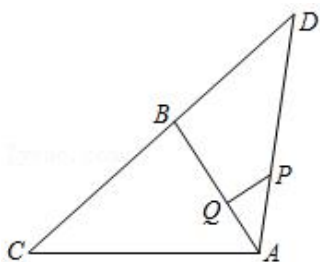


- A.  $\sqrt{6}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{3}$       D.  $3\sqrt{2}$

2. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=4$ ， $BC=5$ ，点  $D$ 、 $E$  分别在  $BC$ 、 $AC$  上， $CD=2BD$ ， $CE=2AE$ ， $BE$  交  $AD$  于点  $F$ ，则  $\triangle AFE$  面积的最大值是 \_\_\_\_.

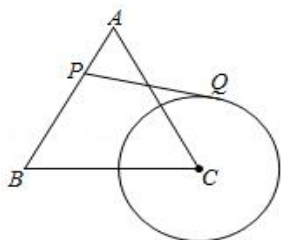


3. 如图，在  $\triangle ACD$  中， $AD=6$ ， $BC=5$ ， $AC^2=AB(AB+BC)$ ，且  $\triangle DAB \sim \triangle DCA$ ，若  $AD=3AP$ ，点  $Q$  是线段  $AB$  上的动点，则  $PQ$  的最小值是( )



- A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D.  $\frac{8}{5}$

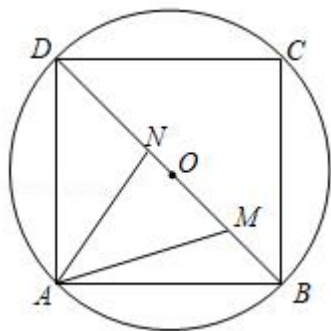
4. 如图，等边三角形  $ABC$  的边长为 4， $\odot C$  的半径为  $\sqrt{3}$ ， $P$  为  $AB$  边上一动点，过点  $P$  作  $\odot C$  的切线  $PQ$ ，切点为  $Q$ ，则  $PQ$  的最小值为 \_\_\_\_.



5. 设  $O$  为坐标原点, 点  $A$ 、 $B$  为抛物线  $y = x^2$  上的两个动点, 且  $OA \perp OB$ . 连接点  $A$ 、 $B$ , 过  $O$  作  $OC \perp AB$  于点  $C$ , 则点  $C$  到  $y$  轴距离的最大值 ( )

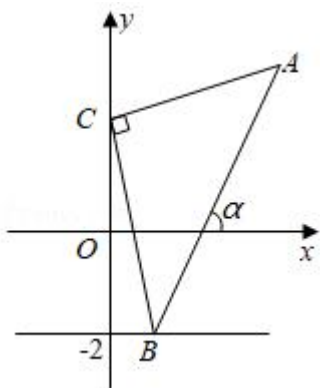
- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D. 1

6. 如图, 正方形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 线段  $MN$  在对角线  $BD$  上运动, 若  $\odot O$  的面积为  $2\pi$ ,  $MN = 1$ , 则  $\triangle AMN$  周长的最小值是 ( )

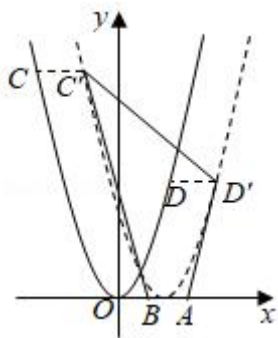


- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

7. 如图, 已知点  $A(4,3)$ , 点  $B$  为直线  $y = -2$  上的一动点, 点  $C(0,n)$ ,  $-2 < n < 3$ ,  $AC \perp BC$  于点  $C$ , 连接  $AB$ . 若直线  $AB$  与  $x$  轴正半轴所夹的锐角为  $\alpha$ , 那么当  $\sin \alpha$  的值最大时,  $n$  的值为 \_\_\_\_.



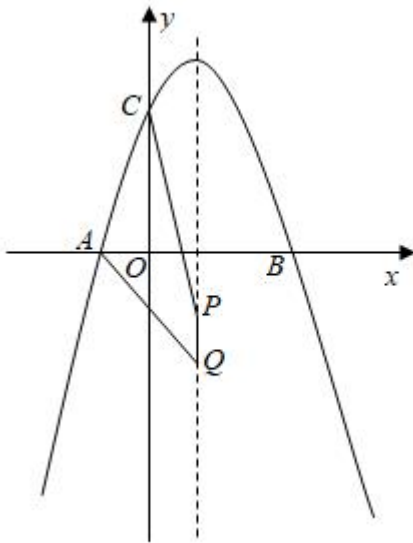
8. 如图, 已知点  $A(3,0)$ ,  $B(1,0)$ , 两点  $C(-3,9)$ ,  $D(2,4)$  在抛物线  $y = x^2$  上, 向左或向右平移抛物线后,  $C$ ,  $D$  的对应点分别为  $C'$ ,  $D'$ . 当四边形  $ABC'D'$  的周长最小时, 抛物线的解析式为 \_\_\_\_.



9. 如图 1, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴分别相交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴相交于点  $C$ , 下表给出了这条抛物线上部分点  $(x, y)$  的坐标值:

$x$	$\cdots$	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y$	$\cdots$	0	3	4	3	0	$\cdots$

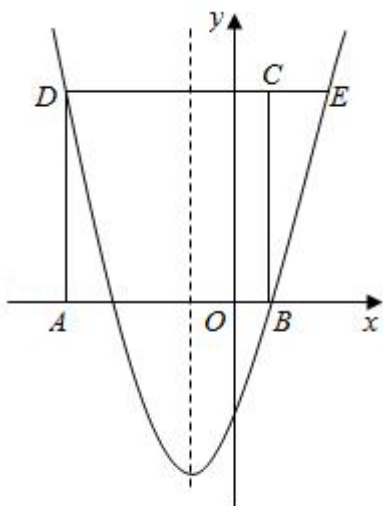
- (1) 求出这条抛物线的解析式及顶点  $M$  的坐标;  
 (2)  $PQ$  是抛物线对称轴上长为 1 的一条动线段 (点  $P$  在点  $Q$  上方), 求  $AQ + QP + PC$  的最小值;



10. 如图，在平面直角坐标系中，四边形  $ABCD$  为正方形，点  $A, B$  在  $x$  轴上，抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过点  $B, D(-4, 5)$  两点，且与直线  $DC$  交于另一点  $E$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

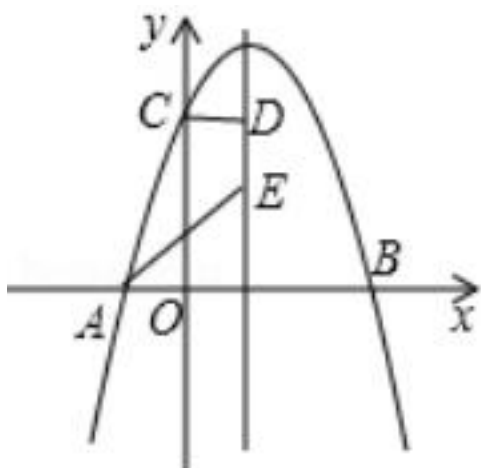
(2)  $P$  为  $y$  轴上一点，过点  $P$  作抛物线对称轴的垂线，垂足为  $M$ ，连接  $ME, BP$ ，探究  $EM + MP + PB$  是否存在最小值。若存在，请求出这个最小值及点  $M$  的坐标；若不存在，请说明理由。



11. 如图抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$ ，点  $C(0, 3)$ ，且  $OB = OC$ 。

(1) 求抛物线的解析式及其对称轴；

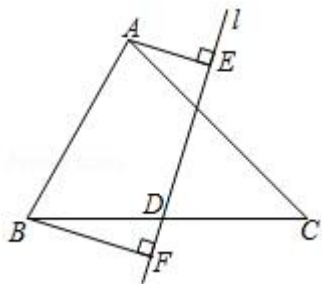
(2) 点  $D, E$  是直线  $x = 1$  上的两个动点，且  $DE = 1$ ，点  $D$  在点  $E$  的上方，求四边形  $ACDE$  的周长的最小值。



## 专题 08 其他最值问题

## 参考答案

1. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=2$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\angle ACB=45^\circ$ ， $D$  是  $BC$  的中点，直线  $l$  经过点  $D$ ， $AE \perp l$ ， $BF \perp l$ ，垂足分别为  $E$ ， $F$ ，则  $AE+BF$  的最大值为( )



- A.  $\sqrt{6}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{3}$       D.  $3\sqrt{2}$

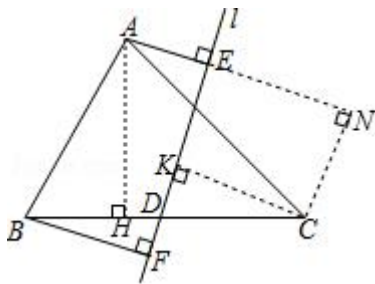
【解答】解：如图，过点  $C$  作  $CK \perp l$  于点  $K$ ，过点  $A$  作  $AH \perp BC$  于点  $H$ ，  
在  $\text{Rt}\triangle AHB$  中，

$$\because \angle ABC = 60^\circ, \quad AB = 2,$$

$$\therefore BH = 1, \quad AH = \sqrt{3},$$

在  $\text{Rt}\triangle AHC$  中， $\angle ACB = 45^\circ$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6},$$



$\because$  点  $D$  为  $BC$  中点，

$$\therefore BD = CD,$$

在  $\triangle BFD$  与  $\triangle CKD$  中，

$$\begin{cases} \angle BFD = \angle CKD = 90^\circ \\ \angle BDF = \angle CDK \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BFD \cong \triangle CKD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = CK,$$

延长  $AE$ ，过点  $C$  作  $CN \perp AE$  于点  $N$ ，

可得  $AE + BF = AE + CK = AE + EN = AN$  ,

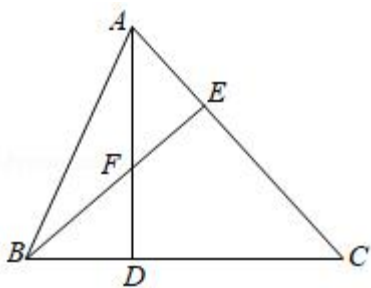
在  $\text{Rt}\triangle ACN$  中,  $AN < AC$  ,

当直线  $l \perp AC$  时, 最大值为  $\sqrt{6}$  ,

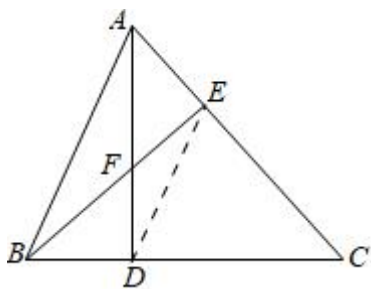
综上所述,  $AE + BF$  的最大值为  $\sqrt{6}$  .

故选: A .

2. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4$  ,  $BC = 5$  , 点  $D$ 、 $E$  分别在  $BC$ 、 $AC$  上,  $CD = 2BD$  ,  $CE = 2AE$  ,  $BE$  交  $AD$  于点  $F$  , 则  $\triangle AFE$  面积的最大值是  $\frac{4}{3}$  .



【解答】解: 连接  $DE$  .



$$\because CD = 2BD, CE = 2AE,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} = 2,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{BA} = \frac{2}{3},$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle BDF},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABD},$$

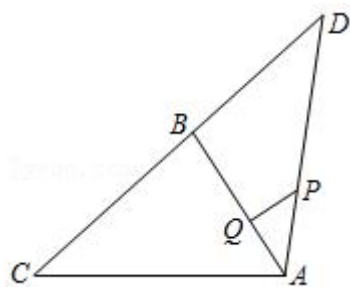
$$\therefore BD = \frac{1}{3}BC = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{当 } AB \perp BD \text{ 时, } \triangle ABD \text{ 的面积最大, 最大值} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 4 = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的面积的最大值} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3},$$

故答案为:  $\frac{4}{3}$

3. 如图, 在  $\triangle ACD$  中,  $AD = 6$ ,  $BC = 5$ ,  $AC^2 = AB(AB + BC)$ , 且  $\triangle DAB \sim \triangle DCA$ , 若  $AD = 3AP$ , 点  $Q$  是线段  $AB$  上的动点, 则  $PQ$  的最小值是 ( )



A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D.  $\frac{8}{5}$

【解答】解:  $\because \triangle DAB \sim \triangle DCA$ ,

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{6}{5+BD} = \frac{BD}{6},$$

解得:  $BD = 4$  (负值舍去),

$$\because \triangle DAB \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AC = \frac{3}{2}AB,$$

$$\because AC^2 = AB(AB + BC),$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}AB\right)^2 = AB(AB + BC),$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore AB = BD = 4,$$

过  $B$  作  $BH \perp AD$  于  $H$ ,

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AD = 3,$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore AD = 3AP, \quad AD = 6,$$

$$\therefore AP = 2,$$

当  $PQ \perp AB$  时,  $PQ$  的值最小,

$$\therefore \angle AQP = \angle AHB = 90^\circ, \quad \angle PAQ = \angle BAH,$$

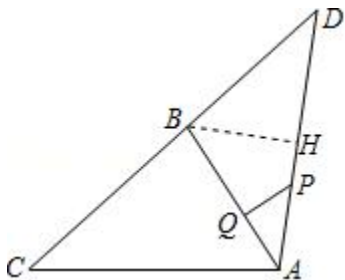
$$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABH,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BH},$$

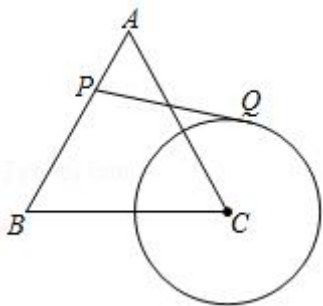
$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{PQ}{\sqrt{7}},$$

$$\therefore PQ = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

故选: A.



4. 如图, 等边三角形  $ABC$  的边长为 4,  $\odot C$  的半径为  $\sqrt{3}$ ,  $P$  为  $AB$  边上一动点, 过点  $P$  作  $\odot C$  的切线  $PQ$ , 切点为  $Q$ , 则  $PQ$  的最小值为 3.



【解答】解: 连接  $CP$ 、 $CQ$ , 作  $CH \perp AB$  于  $H$ , 如图,

$\therefore$  等边三角形  $ABC$  的边长为 4,

$$\therefore AB = CB = 4, \quad \angle BCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = 2, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3},$$

$\therefore PQ$  为  $\odot C$  的切线,

$$\therefore CQ \perp PQ,$$



在  $\text{Rt}\triangle CPQ$  中,  $PQ = \sqrt{CP^2 - CQ^2} = \sqrt{CP^2 - 3}$ ,

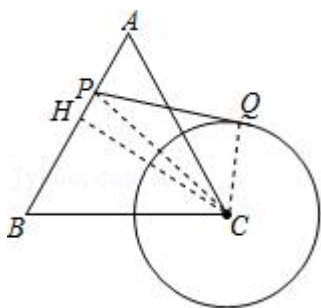
$\therefore$  点  $P$  是  $AB$  边上一动点,

$\therefore$  当点  $P$  运动到  $H$  点时,  $CP$  最小,

即  $CP$  的最小值为  $2\sqrt{3}$ ,

$\therefore PQ$  的最小值为  $\sqrt{12-3} = 3$ ,

故答案为: 3.



5. 设  $O$  为坐标原点, 点  $A$ 、 $B$  为抛物线  $y = x^2$  上的两个动点, 且  $OA \perp OB$ . 连接点  $A$ 、 $B$ , 过  $O$  作  $OC \perp AB$  于点  $C$ , 则点  $C$  到  $y$  轴距离的最大值 ( )

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

【解答】解: 如图, 分别作  $AE$ 、 $BF$  垂直于  $x$  轴于点  $E$ 、 $F$ ,

设  $OE = a$ ,  $OF = b$ , 由抛物线解析式为  $y = x^2$ ,

则  $AE = a^2$ ,  $BF = b^2$ ,

作  $AH \perp BF$  于  $H$ , 交  $y$  轴于点  $G$ , 连接  $AB$  交  $y$  轴于点  $D$ ,

设点  $D(0, m)$ ,

$\therefore DG \parallel BH$ ,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABH$ ,

$$\therefore \frac{DG}{BH} = \frac{AG}{AH}, \text{ 即 } \frac{m - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{a}{a + b}.$$

化简得:  $m = ab$ .

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AOE + \angle BOF = 90^\circ$ ,

又  $\angle AOE + \angle EAO = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BOF = \angle EAO$ ,

又  $\angle AEO = \angle BFO = 90^\circ$ ,

$\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFB$ .

$$\therefore \frac{AE}{OF} = \frac{EO}{BF},$$

$$\text{即 } \frac{a^2}{b} = \frac{a}{b^2},$$

化简得  $ab=1$ .

则  $m=ab=1$ , 说明直线  $AB$  过定点  $D$ ,  $D$  点坐标为  $(0,1)$ .

$\therefore \angle DCO = 90^\circ$ ,  $DO=1$ ,

$\therefore$  点  $C$  是在以  $DO$  为直径的圆上运动,

$\therefore$  当点  $C$  到  $y$  轴距离为  $\frac{1}{2}DO = \frac{1}{2}$  时, 点  $C$  到  $y$  轴的距离最大.

故选:  $A$ .

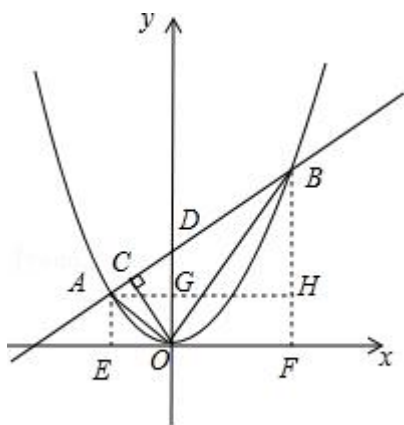
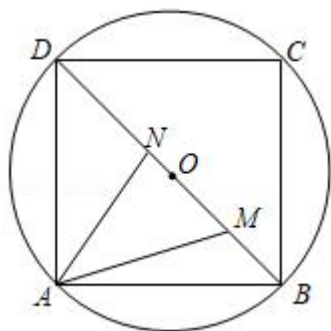


图1

6. 如图, 正方形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 线段  $MN$  在对角线  $BD$  上运动, 若  $\odot O$  的面积为  $2\pi$ ,  $MN=1$ , 则  $\triangle AMN$  周长的最小值是( )



A. 3

B. 4

C. 5

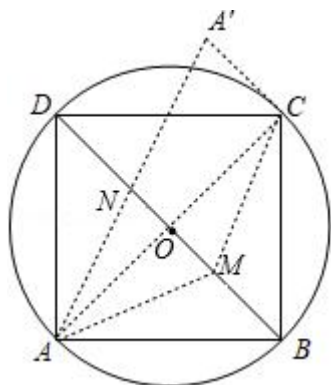
D. 6

【解答】解:  $\odot O$  的面积为  $2\pi$ , 则圆的半径为  $\sqrt{2}$ , 则  $BD=2\sqrt{2}=AC$ ,

由正方形的性质, 知点  $C$  是点  $A$  关于  $BD$  的对称点,

过点  $C$  作  $CA' \parallel BD$ , 且使  $CA'=1$ ,

连接  $AA'$  交  $BD$  于点  $N$ ，取  $NM=1$ ，连接  $AM$ 、 $CM$ ，则点  $M$ 、 $N$  为所求点，



理由：∵  $A'C \parallel MN$ ，且  $A'C = MN$ ，则四边形  $MCA'N$  为平行四边形，

则  $A'N = CM = AM$ ，

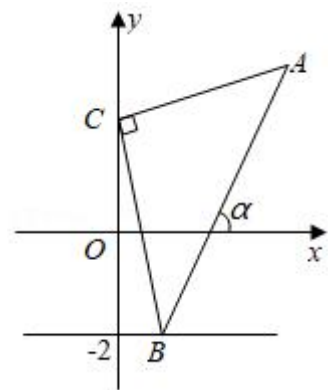
故  $\triangle AMN$  的周长  $= AM + AN + MN = AA' + 1$  为最小，

则  $AA' = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$ ，

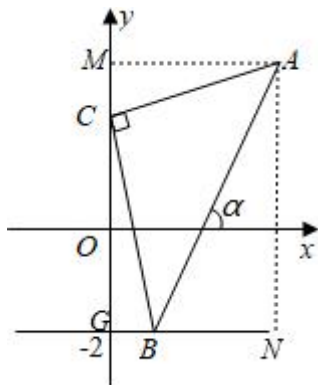
则  $\triangle AMN$  的周长的最小值为  $3 + 1 = 4$ ，

故选：B。

7. 如图，已知点  $A(4,3)$ ，点  $B$  为直线  $y=-2$  上的一动点，点  $C(0,n)$ ， $-2 < n < 3$ ， $AC \perp BC$  于点  $C$ ，连接  $AB$ 。若直线  $AB$  与  $x$  轴正半轴所夹的锐角为  $\alpha$ ，那么当  $\sin \alpha$  的值最大时， $n$  的值为  $-\frac{1}{2}$ 。



【解答】解：过点  $A$  作  $AM \perp y$  轴于点  $M$ ，作  $AN \perp BN$  交于点  $N$ ，



$\because$  直线  $y = -2$  与  $x$  轴平行，

$\therefore \angle ABN = \alpha$ ，

当  $\sin \alpha$  的值最大时，则  $\tan \alpha = \frac{AN}{NB} = \frac{5}{NB}$  值最大，

故  $BN$  最小，即  $BG$  最大时， $\tan \alpha$  最大，

即当  $BG$  最大时， $\sin \alpha$  的值最大，

设  $BG = y$ ，

则  $AM = 4$ ， $GC = n + 2$ ， $CM = 3 - n$ ，

$\because \angle ACM + \angle MAC = 90^\circ$ ， $\angle ACM + \angle BCG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAM = \angle BCG$ ，

$\therefore \tan \angle CAM = \tan \angle BCG$ ，

$\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{BG}{CG}$ ，即  $\frac{3-n}{4} = \frac{y}{n+2}$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{4}(n-3)(n+2) = -\frac{1}{4}(n-\frac{1}{2})^2 + \frac{25}{16}$ ，

$\because -\frac{1}{4} < 0$ ，

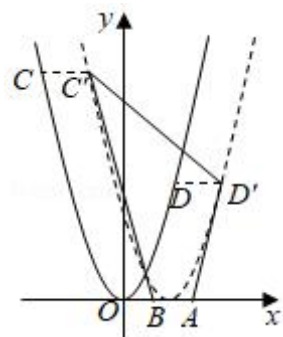
$\therefore$  当  $n = \frac{1}{2}$  时， $y$  取得最大值，

故  $n = \frac{1}{2}$ ，

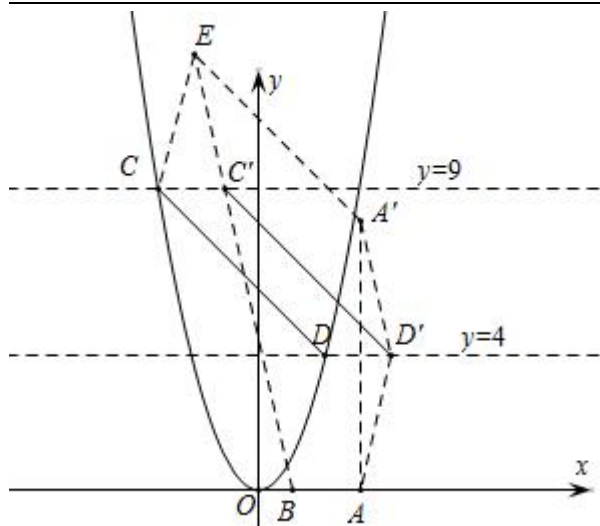
故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

8. 如图，已知点  $A(3,0)$ ， $B(1,0)$ ，两点  $C(-3,9)$ ， $D(2,4)$  在抛物线  $y = x^2$  上，向左或向右平移抛物线后，

$C$ ， $D$  的对应点分别为  $C'$ ， $D'$ 。当四边形  $ABC'D'$  的周长最小时，抛物线的解析式为  $y = (x - \frac{25}{13})^2$ 。



【解答】解：过  $C$ 、 $D$  作  $x$  轴平行线，作  $A$  关于直线  $y = 4$  的对称点  $A'$ ，过  $A'$  作  $A'E \parallel CD$ ，且  $A'E = CD$ ，连接  $BE$  交直线  $y = 9$  于  $C'$ ，过  $C'$  作  $C'D' \parallel CD$ ，交直线  $y = 4$  于  $D'$ ，如图：



作图可知：四边形  $A'ECD$  和四边形  $C'D'DC$  是平行四边形，

$\therefore A'E \parallel CD$ ， $C'D' \parallel CD$ ，且  $A'E = CD$ ， $C'D' = CD$ ，

$\therefore C'D' \parallel A'E$  且  $C'D' = A'E$ ，

$\therefore$  四边形  $A'EC'D'$  是平行四边形，

$\therefore A'D' = EC'$ ，

$\because A$  关于直线  $y=4$  的对称点  $A'$ ，

$\therefore AD' = A'D'$ ，

$\therefore EC' = AD'$ ，

$\therefore BE = BC' + EC' = BC' + AD'$ ，即此时  $BC' + AD'$  转化到一条直线上， $BC' + AD'$  最小，最小值为  $BE$  的长度，

而  $AB$ 、 $CD$  为定值，

$\therefore$  此时四边形  $ABC'D'$  的周长最小，

$\because A(3,0)$  关于直线  $y=4$  的对称点  $A'$ ，

$\therefore A'(3,8)$ ，

$\because$  四边形  $A'ECD$  是平行四边形， $C(-3,9)$ ， $D(2,4)$ ，

$\therefore E(-2,13)$ ，

设直线  $BE$  解析式为  $y=kx+b$ ，则  $\begin{cases} 0=k+b \\ 13=-2k+b \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} k=-\frac{13}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases}$$

∴ 直线  $BE$  解析式为  $y = -\frac{13}{3}x + \frac{13}{3}$ ,

令  $y = 9$  得  $9 = -\frac{13}{3}x + \frac{13}{3}$ ,

∴  $x = -\frac{14}{13}$ ,

∴  $C'(-\frac{14}{13}, 9)$ ,

∴  $CC' = -\frac{14}{13} - (-3) = \frac{25}{13}$ ,

即将抛物线  $y = x^2$  向右移  $\frac{25}{13}$  个单位后, 四边形  $ABC'D'$  的周长最小,

∴ 此时抛物线为  $y = (x - \frac{25}{13})^2$ ,

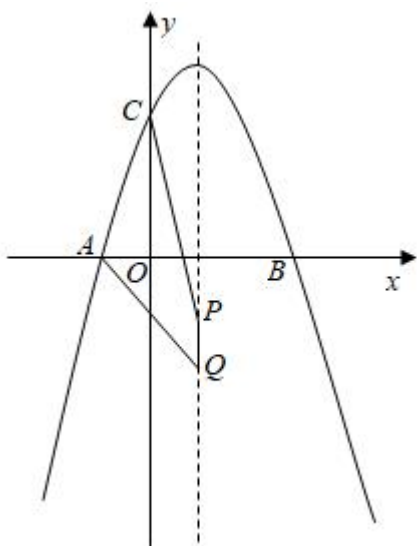
故答案为:  $y = (x - \frac{25}{13})^2$ .

9. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴分别相交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴相交于点  $C$ , 下表给出了这条抛物线上部分点  $(x, y)$  的坐标值:

$x$	...	-1	0	1	2	3	...
$y$	...	0	3	4	3	0	...

(1) 求出这条抛物线的解析式及顶点  $M$  的坐标;

(2)  $PQ$  是抛物线对称轴上长为 1 的一条动线段 (点  $P$  在点  $Q$  上方), 求  $AQ + QP + PC$  的最小值;



【解答】解: (1) 根据表格可得出  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 3)$ ,

设抛物线解析式为  $y = a(x+1)(x-3)$ ,

将  $C(0, 3)$  代入, 得:  $3 = a(0+1)(0-3)$ ,

解得:  $a = -1$ ,

$$\therefore y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$  该抛物线解析式为  $y = -x^2 + 2x + 3$ ，顶点坐标为  $M(1, 4)$ ；

(2) 如图 1，将点  $C$  沿  $y$  轴向下平移 1 个单位得  $C'(0, 2)$ ，连接  $BC'$  交抛物线对称轴  $x=1$  于点  $Q'$ ，

过点  $C$  作  $CP' \parallel BC'$ ，交对称轴于点  $P'$ ，连接  $AQ'$ ，

$\because A、B$  关于直线  $x=1$  对称，

$$\therefore AQ' = BQ',$$

$$\because CP' \parallel BC', P'Q' \parallel CC',$$

$\therefore$  四边形  $CC'Q'P'$  是平行四边形，

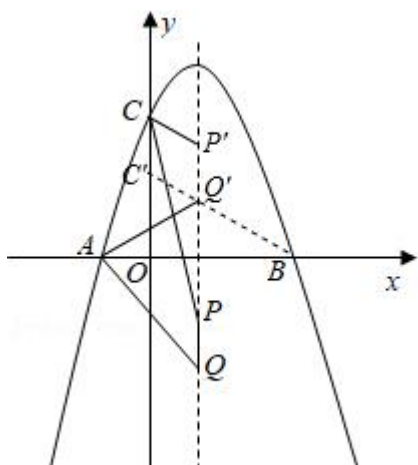
$$\therefore CP' = C'Q', Q'P' = CC' = 1,$$

在  $Rt\triangle BOC'$  中， $BC' = \sqrt{OC'^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ，

$$\therefore AQ' + Q'P' + P'C = BQ' + C'Q' + Q'P' = BC' + Q'P' = \sqrt{13} + 1,$$

此时， $C'、Q'、B$  三点共线， $BQ' + C'Q'$  的值最小，

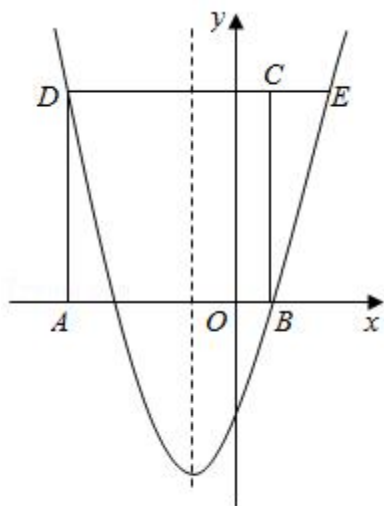
$\therefore AQ + QP + PC$  的最小值为  $\sqrt{13} + 1$ ；



10. 如图，在平面直角坐标系中，四边形  $ABCD$  为正方形，点  $A, B$  在  $x$  轴上，抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过点  $B, D(-4, 5)$  两点，且与直线  $DC$  交于另一点  $E$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2)  $P$  为  $y$  轴上一点，过点  $P$  作抛物线对称轴的垂线，垂足为  $M$ ，连接  $ME, BP$ ，探究  $EM + MP + PB$  是否存在最小值。若存在，请求出这个最小值及点  $M$  的坐标；若不存在，请说明理由。



【解答】解：（1）由点  $D$  的纵坐标知，正方形  $ABCD$  的边长为 5，

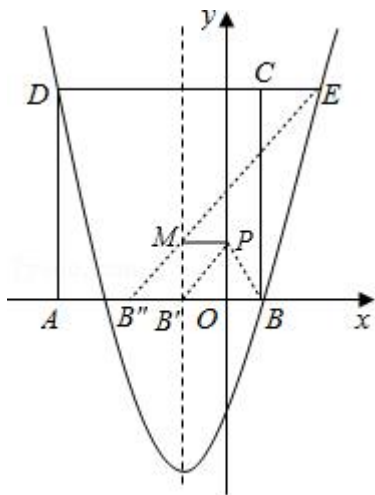
则  $OB = AB - AO = 5 - 4 = 1$ ，故点  $B$  的坐标为  $(1, 0)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 1+b+c=0 \\ 16-4b+c=5 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b=2 \\ c=-3 \end{cases},$$

故抛物线的表达式为  $y = x^2 + 2x - 3$ ；

（2）存在，理由：

由题意抛物线的对称轴交  $x$  轴于点  $B'(-1, 0)$ ，将点  $B'$  向左平移 1 个单位得到点  $B''(-2, 0)$ ，



连接  $B''E$ ，交函数的对称轴于点  $M$ ，过点  $M$  作  $MP \perp y$  轴，则点  $P$ 、 $M$  为所求点，此时  $EM + MP + PB$  为最小，

理由： $\because B'B'' = PM = 1$ ，且  $B'B'' \parallel PM$ ，故四边形  $B''B'PM$  为平行四边形，则  $B''M = B'P = BP$ ，

则  $EM + MP + PB = EM + 1 + MB'' = B''E + 1$  为最小，

由点  $B''$ 、 $E$  的坐标得，直线  $B''E$  的表达式为  $y = \frac{5}{4}(x + 2)$ ，



当  $x = -1$  时,  $y = \frac{5}{4}(x+2) = \frac{5}{4}$ , 故点  $M$  的坐标为  $(-1, \frac{5}{4})$ ,

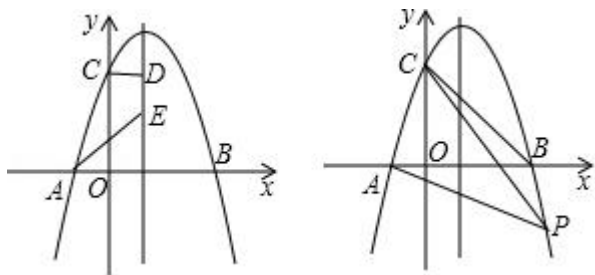
则  $EM + MP + PB$  的最小值  $B'E + 1 = 1 + \sqrt{(-2-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{41} + 1$ .

11. 如图抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  经过点  $A(-1, 0)$ , 点  $C(0, 3)$ , 且  $OB = OC$ .

(1) 求抛物线的解析式及其对称轴;

(2) 点  $D$ 、 $E$  是直线  $x=1$  上的两个动点, 且  $DE=1$ , 点  $D$  在点  $E$  的上方, 求四边形  $ACDE$  的周长的最小值.

(3) 点  $P$  为抛物线上一点, 连接  $CP$ , 直线  $CP$  把四边形  $CBPA$  的面积分为 3:5 两部分, 求点  $P$  的坐标.



【解答】解: (1)  $\because OB = OC$ ,  $\therefore$  点  $B(3, 0)$ ,

则抛物线的表达式为:  $y = a(x+1)(x-3) = a(x^2 - 2x - 3) = ax^2 - 2ax - 3a$ ,

故  $-3a = 3$ , 解得:  $a = -1$ ,

故抛物线的表达式为:  $y = -x^2 + 2x + 3 \dots \textcircled{1}$ ,

函数的对称轴为:  $x = 1$ ;

(2) 四边形  $ACDE$  的周长  $= AC + DE + CD + AE$ , 其中  $AC = \sqrt{10}$ 、 $DE = 1$  是常数,

故  $CD + AE$  最小时, 周长最小,

取点  $C$  关于直线  $x=1$  对称点  $C'(2, 3)$ , 则  $CD = C'D$ ,

取点  $A'(-1, 1)$ , 则  $A'D = AE$ ,

故:  $CD + AE = A'D + DC'$ , 则当  $A'$ 、 $D$ 、 $C'$  三点共线时,  $CD + AE = A'D + DC'$  最小, 周长也最小,

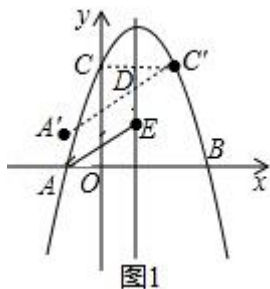


图1

四边形  $ACDE$  的周长的最小值  $= AC + DE + CD + AE = \sqrt{10} + 1 + A'D + DC' = \sqrt{10} + 1 + A'C' = \sqrt{10} + 1 + \sqrt{13}$ ;