昆山市 2025-2026 学年第一学期高二数学期末考试模拟试题

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1.（5 分）直线 $x+y-1=0$ 的倾斜角是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

2.（5 分）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=5$，$a_4=7$，则 $a_7=$（　　）

A. 9　　B. 10

C. 11　　D. 12

3.（5 分）“$k<9$”是“方程$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{k-9}=1$表示双曲线”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4.（5 分）为落实教育部关于延期开学期间“停课不停学”的精神，某市举行在线教学，A、B 两位学生每天上课后独立完成 6 道自我检测题，A 及格的概率为$\frac{9}{10}$，B 及格的概率为$\frac{3}{4}$，两人各检测一次，则两人中只有一人及格的概率为（　　）

A. $\frac{27}{40}$　　B. $\frac{9}{40}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{4}$

5.（5 分）若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线经过椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$的左焦点，则 p 的值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 8

6.（5 分）记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_3+S_6=2S_9$，则$\frac{a_6}{a_3}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 1 或$-\frac{1}{2}$　　D. -1 或$\frac{1}{2}$

7.（5 分）周老师上数学课时，给班里同学出了两道选择题，她预估计做对第一道题的概率为 0.80，做对两道题的概率为 0.60，则预估计做对第二道题的概率为（　　）

A. 0.80　　B. 0.75　　C. 0.60　　D. 0.48

8．（5 分）已知 A（1，0），B（﹣1，2），若在直线 $y=k(x+2)$ 上存在点 P，使得 $|PA|^2+|PB|^2=10$，则 k 的取值范围为（　　）

A．$[-2,\sqrt{2}]$　　B．$[-2,\sqrt{6}]$

C．$[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$ D．$[2-\sqrt{6},2+\sqrt{6}]$

二、多选题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上.全部选对得 6 分，部分选对得部分分，不选或有错选的得 0 分。

（多选）9．（6 分）设 k 为实数，直线 l 的方程为 $2x+(k-3)y-2k+6=0$（$k\neq3$），则下列说法正确的是（　　）

A．当 k 变化时，l 恒过定点（0，2）

B．若 $k=1$，则 l 在 x 轴，y 轴上的截距之和为 4

C．若 $k=1$，则 l 的斜率为 1

D．当 $k=1$ 时，点（1，1）关于直线 l 的对称点坐标为（﹣1，2）

（多选）10．（6 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_7<0$，$a_7+a_8>0$，记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_1>0$

B．$\{a_n\}$是递增数列

C．当 $n=7$ 时，S_n 取得最小值

D．使得 $S_n>0$ 的 n 的最小值为 13

（多选）11．（6 分）已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）为抛物线上的两点，且$y_1y_2=-p^2$，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 AB 过抛物线 C 的焦点

B．以 AF 为直径的圆与 y 轴相切

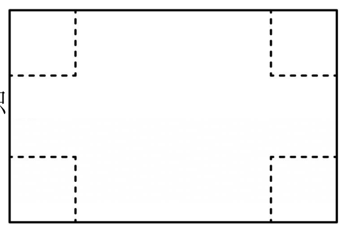
C．当$|AF|=3|BF|$时，$|AB|=3p$

D．若点 D（p，0），且$|AF|=|AD|$，则$\angle OAD+\angle OBD<180°$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.请把答案填写在答题卡相应位置上。

12．（5 分）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+2^n$，则它的前 6 项和为___________ .

13．（5 分）在边长为 $8\times5cm$ 的长方形铁片的四角切去边长相等的小正方形，再把它的边沿虚线折起（如图），做成一个无盖的长方体箱子，则箱子容积的最大值为_________ cm^3.



14．（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，上顶点为 B．连接 BF 并延长交椭圆于点 A，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C．若 $OC\perp AB$，则椭圆离心率为_________ ．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（13 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=3a_n-3$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=\frac{1}{log_3a_n\cdot log_3a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

16．（15 分）已知圆 M 经过 A（﹣1，0），B（5，8）两点，且圆心 M 在直线 $y=x+2$ 上．

（1）求圆 M 的方程；

（2）已知以 A 为端点的弦的长度为 $7\sqrt{2}$，求该弦所在直线方程．

17.（15 分）甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$．假设两人射击是否击中目标相互之间没有影响，每人每次射击是否击中目标相互之间也没有影响．

（1）求甲、乙各射击一次均击中目标的概率；

（2）求甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标的概率；

（3）若乙在射击中出现连续 2 次未击中目标就会被终止射击，求乙恰好射击 4 次后被终止射击的概率．

18.（17 分）已知 O 为坐标原点，双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$过点 $P(2,1)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

（1）求双曲线的方程；

（2）直线 l 过点（2，0），与双曲线 C 交于 A，B 两点.

①若直线 $l\parallel OP$，求△PAB 的面积；

②在 x 轴上是否存在定点 N，使得$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$为定值？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.

19.（17 分）在数列$\{a_n\}$中，按照下面方式构成数列$\{b_n\}$：$b_1=a_1$，$b_2=max\{a_1, a_2\}$，$b_3=max\{a_1, a_2, a_3\}$，…，$b_n=max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$（$n\geqslant 2$），其中 $max\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$（$2\leqslant i\leqslant n$）表示数列 a_1，a_2，…，a_i 中最大的项．

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$的前 4 项分别为 2，1，4，3，求数列$\{b_n\}$的前 4 项；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$满足 $a_1=-2$，且 $na_{n+1}+2(n+1)a_n=0$．

（i）求 b_3+b_6 的值；

（ii）求$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

昆山市2025-2026学年第一学期八年级语文期末考试模拟试题

答案与解析

一．选择题（共8小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	C	B	B	D

二．多选题（共3小题）

题号	9	10	11
答案	AC	BC	ABD

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上。

1．（5分）直线 $x+y-1=0$ 的倾斜角是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【分析】根据已知条件，结合直线的斜率与倾斜角的关系，即可求解．

【解答】解：直线 $x+y-1=0$ 的斜率为 -1，

则直线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

故选：C．

【点评】本题主要考查直线的斜率与倾斜角的关系，属于基础题．

2．（5分）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2=5$，$a_4=7$，则 $a_7=$（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

【分析】根据给定条件，求出等差数列的公差，进而求出 a_7．

【解答】解：等差数列$\{a_n\}$中，由 $a_2=5$，$a_4=7$，

得 $d=\frac{a_4-a_2}{4-2}=\frac{7-5}{2}=1$，

所以 $a_7=a_2+5d=10$．

故选：B．

【点评】本题考查等差数列的通项公式，考查等差数列的性质，是基础题．

3．（5分）“$k<9$”是“方程$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{k-9}=1$表示双曲线”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

【分析】根据充分条件和必要条件的定义结合双曲线的性质进行判断即可．

【解答】解：若方程$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{k-9}=1$表示双曲线，

则（k－9）（25－k）＜0，

（k－9）（k－25）＞0

即解得 k＞25 或 k＜9，

则“k＜9“是“方程$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{k-9}=1$表示双曲线”的充分不必要条件，

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据双曲线的定义是解决本题的关键．

4．（5 分）为落实教育部关于延期开学期间“停课不停学”的精神，某市举行在线教学，A、B 两位学生每天上课后独立完成 6 道自我检测题，A 及格的概率为$\frac{9}{10}$，B 及格的概率为$\frac{3}{4}$，两人各检测一次，则两人中只有一人及格的概率为（　　）

A．$\frac{27}{40}$　　B．$\frac{9}{40}$　　C．$\frac{3}{10}$　　D．$\frac{1}{4}$

【分析】利用相互独立事件概率乘法公式直接求解．

【解答】解：某市举行在线教学，A、B 两位学生每天上课后独立完成 6 道自我检测题，

A 及格的概率为$\frac{9}{10}$，B 及格的概率为$\frac{3}{4}$，两人各检测一次，

则两人中只有一人及格的概率为：

$P=\frac{9}{10}\times(1-\frac{3}{4})+(1-\frac{9}{10})\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$．

故选：C．

【点评】本题考查相互独立事件概率乘法公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

5．（5 分）若抛物线 $y^2=2px$（p＞0）的准线经过椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$的左焦点，则 p 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【分析】求出椭圆的左焦点，由抛物线的准线方程得 p．

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$，可得 $a=\sqrt{5}$，$b=1$，可得椭圆的半焦距$c=\sqrt{5-1}=2$，

因此抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线$x=-\frac{p}{2}$过点（-2，0），则$-\frac{p}{2}=-2$，∴$p=4$.

故选：C.

【点评】本题考查椭圆的简单性质的应用，抛物线的准线方程的求法，是中档题.

6.（5 分）记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_3+S_6=2S_9$，则$\frac{a_6}{a_3}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1 或$-\frac{1}{2}$　　D．-1 或$\frac{1}{2}$

【分析】先判断 $q\neq1$，再运用等比数列求和公式化简方程，求得$q^3=-\frac{1}{2}$，利用等比数列通项公式化简所求式即得.

【解答】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

若 $q=1$，则 $S_3+S_6=9a_1\neq2S_9=18a_1$，所以 $q\neq1$，

若 $q\neq1$，因为 $S_3+S_6=2S_9$，所以$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\times\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$，

因为 $a_1q\neq0$，所以 $1-q^3+1-q^6=2(1-q^9)$，即 $2q^6-q^3-1=0$，

解得 $q^3=1$（舍去）或$q^3=-\frac{1}{2}$，所以$\frac{a_6}{a_3}=q^3=-\frac{1}{2}$.

故选：B.

【点评】本题考查等比数列的前 n 项和公式，属于基础题.

7.（5 分）周老师上数学课时，给班里同学出了两道选择题，她预估计做对第一道题的概率为 0.80，做对两道题的概率为 0.60，则预估计做对第二道题的概率为（　　）

A．0.80　　B．0.75　　C．0.60　　D．0.48

【分析】设事件 A_i（$i=1$，2）表示"做对第 i 道题"，A_1，A_2 相互独立，由已知条件结合相互独立事件的概率乘法公式得 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.8P(A_2)=0.6$，由此能求出做对第二道题的概率.

【解答】解：设事件 A_i（$i=1$，2）表示"做对第 i 道题"，A_1，A_2 相互独立，

由已知得 $P(A_1)=0.8$，$P(A_1A_2)=0.6$，

∴$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.8P(A_2)=0.6$，

解得 $P(A_2)=\frac{0.6}{0.8}=0.75$.

故选：B.

【点评】本题考查概率的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意相互独立事件概率乘法公式的合理运用

8.（5 分）已知 A（1，0），B（-1，2），若在直线 $y=k(x+2)$上存在点 P，使得$|PA|^2+|PB|^2=10$，则 k 的取值范围为（　　）

A．$[-2，\sqrt{2}]$　　B．$[-2，\sqrt{6}]$　　C．$[2-\sqrt{2}，2+\sqrt{2}]$ D．$[2-\sqrt{6}，2+\sqrt{6}]$

【分析】根据$|PA|^2+|PB|^2=10$求出点P的轨迹方程为$x^2+(y-1)^2=3$，由题意，说明直线$y=k(x+2)$与圆C：$x^2+(y-1)^2=3$有公共点，借助于直线与圆的位置关系判断方法，得到不等式，求解即得．

【解答】解：设点$P(x，y)$，由于$A(1，0)$，$B(-1，2)$，

根据$|PA|^2+|PB|^2=10$可得：$(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+(y-2)^2=10$，

化简得$x^2+y^2-2y-2=0$，即$x^2+(y-1)^2=3$，

根据题意，$y=k(x+2)$与圆C：$x^2+(y-1)^2=3$有公共点，

因此圆心$C(0，1)$到直线$kx-y+2k=0$的距离$d\le\sqrt{3}$，

即$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\le\sqrt{3}$，化简得$k^2-4k-2\leq0$，解得$k\in[2-\sqrt{6}，2+\sqrt{6}]$．

故选：D．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系，属于中档题．

二、多选题：本大题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上.全部选对得6分，部分选对得部分分，不选或有错选的得0分。

（多选）9．（6分）设k为实数，直线l的方程为$2x+(k-3)y-2k+6=0$（$k\neq3$），则下列说法正确的是（　　）

A．当k变化时，l恒过定点$(0，2)$

B．若$k=1$，则l在x轴，y轴上的截距之和为4

C．若$k=1$，则l的斜率为1

D．当$k=1$时，点$(1，1)$关于直线l的对称点坐标为$(-1，2)$

【分析】对于A，将直线方程转化为$(y-2)k+(2x-3y+6)=0$，由$\begin{cases}y-2=0\\2x-3y+6=0\end{cases}$解方程组即可；对于$B$，求出直线$l$在$x$轴，$y$轴上的截距即可；对于$C$，化为斜截式即可得解；对于$D$，根据点关于直线的对称的求法，求得对称点的坐标．

【解答】解：对于选项A，直线l的方程为$2x+(k-3)y-2k+6=0$（$k\neq3$）化为$(y-2)k+(2x-3y+6)=0$，

由$\begin{cases}y-2=0\\2x-3y+6=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$，所以直线$l$恒过定点$(0，2)$，故选项$A$正确；

对于选项B，由题意$2x+(k-3)y-2k+6=0$（$k\neq3$），

当$k=1$时，l：$x-y+2=0$，令$y=0$，$x=-2$，令$x=0$，$y=2$，

此时在x轴，y轴上的截距之和为$-2+2=0$，故选项B错误；

对于选项C，由B项可知l：$y=x+2$，故l的斜率为1，故选项C正确；

对于选项 D，$k=1$ 时，l：$x-y+2=0$，

设（1，1）关于直线 $x-y+2=0$ 对称点坐标为（m，n），

则$\begin{cases}\dfrac{n-1}{m-1}=-1\\ \dfrac{m+1}{2}-\dfrac{n+1}{2}+2=0\end{cases}$，解得 $m=-1$，$n=3$，

即点（1，1）关于直线 l 的对称点坐标为（-1，3），故选项 D 错误．

故选：AC．

【点评】本题考查了直线的方程，是基础题．

（多选）10．（6 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_7<0$，$a_7+a_8>0$，记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，则下列说法正确的是（　　）

A．$a_1>0$

B．$\{a_n\}$是递增数列

C．当 $n=7$ 时，S_n 取得最小值

D．使得 $S_n>0$ 的 n 的最小值为 13

【分析】根据给定条件可得 $a_8>0$，公差 $d>0$，再结合等差数列性质及前 n 项和公式逐项判断即可．

【解答】解：因为 $a_7<0$，$a_7+a_8>0$，所以 $a_8>-a_7>0$，

所以等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=a_8-a_7>0$，

对于 A，C，数列$\{a_n\}$的前 7 项都为负，从第 8 项起为正，

因此 $a_1<0$，当 $n=7$ 时，S_n 取得最小值，故 A 错误，C 正确；

对于 B，数列$\{a_n\}$是递增数列，故 B 正确；

对于 D，$S_{13}=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7<0$，因此使得 $S_n>0$ 的 n 的最小值不为 13，故 D 错误．

故选：BC．

【点评】本题考查等差数列的性质应用，属于基础题．

（多选）11．（6 分）已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）为抛物线上的两点，且$y_1y_2=-p^2$，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 AB 过抛物线 C 的焦点

B．以 AF 为直径的圆与 y 轴相切

C．当$|AF|=3|BF|$时，$|AB|=3p$

D．若点 D（p，0），且$|AF|=|AD|$，则$\angle OAD+\angle OBD<180°$

【分析】设直线 AB 方程为 $x=my+t$，将该直线的方程与抛物线的方程联立，结合韦达定理求得$t=\dfrac{p}{2}$

可判断 A；计算可得 AF 的中点 M 到 y 轴的距离为$\frac{1}{2}|AF|$，可判断 B；求出$m^2=\frac{1}{3}$结合焦点弦公式求解可判断 C；利用数量积夹角公式判断$\angle AOB>90°$，$\angle ADB>90°$即可判断 D．

【解答】解：对于 A，设直线 AB 方程为 $x=my+t$，与 $y^2=2px$ 联立，整理得：$y^2-2pmy-2pt=0$，

故 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-2pt$，

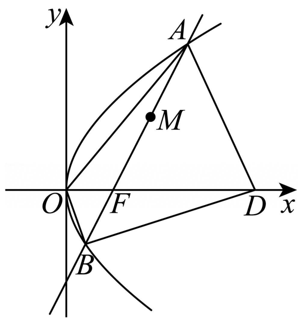
$\because y_1y_2=-p^2$，$\therefore -p^2=-2pt$，解得$t=\frac{p}{2}$，

即直线 AB 恒过点$(\frac{p}{2}，0)$，故选项 A 正确；

对于 B，设点 M 是 AF 的中点，$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，则$M(\frac{x_1+\frac{p}{2}}{2}，\frac{y_1}{2})$，

点 M 到 y 轴的距离为$\frac{1}{2}(x_1+\frac{p}{2})=\frac{1}{2}|AF|$，

故以线段 AF 为直径的圆与 y 轴相切，故 B 正确；



对于 C，$\because|AF|=3|BF|$，且 A，F，B 三点共线，则$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，$\therefore y_1=-3y_2$，

代入$y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$中，得到$y_2=-pm$，$-3y_2^2=-p^2$，即$m^2=\frac{1}{3}$，

$\therefore|AB|=x_1+x_2+p=m(y_1+y_2)+2t+p=2p\times\frac{1}{3}+2\times\frac{p}{2}+p=\frac{8p}{3}$，故 C 错误；

对于 D，$\because$点 D（p，0），且$|AF|=|AD|$，$\therefore x_1=\frac{x_F+x_D}{2}=\frac{3p}{2}$，

由对称性不妨设点 A 在第一象限，$\therefore y_1>0$，$y_2<0$，$\therefore A(\frac{3p}{2}，\sqrt{3}p)$，

又$y_1y_2=-p^2$，$\therefore y_2=-\frac{\sqrt{3}p}{3}$，$\therefore B(\frac{p}{6}，-\frac{\sqrt{3}p}{3})$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-\frac{3p^2}{4}<0$，

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{p}{2}\times(-\frac{5p}{6})+\sqrt{3}p\times(-\frac{\sqrt{3}p}{3})=-\frac{17p^2}{12}<0$，

$\therefore\angle AOB>90°$，$\angle ADB>90°$，

$\therefore\angle OAD+\angle OBD=360°-(\angle AOB+\angle ADB)<180°$，故 D 正确．

故选：ABD．

【点评】本题考查抛物线的相关结论：$y^2=2px$ 中，过焦点 F 的直线与抛物线交于 A，B 两点，则以 AF，

BF 为直径的圆与 y 轴相切，以 AB 为直径的圆与准线相切；$x^2=2py$ 中，过焦点 F 的直线与抛物线交于 A，B 两点，则以 AF，BF 为直径的圆与 x 轴相切，以 AB 为直径的圆与准线相切．属于中档题．

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.请把答案填写在答题卡相应位置上。

12.（5 分）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+2^n$，则它的前 6 项和为__147__．

【分析】根据数列通项公式特点，运用分组求和，利用等差（等比）数列求和公式计算即得．

【解答】解：设$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，

因为$a_n=n+2^n$，

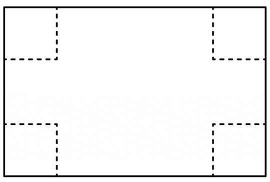
所以$S_6=(1+2+\cdots+6)+(2+2^2+\cdots+2^6)$

$=\frac{6(1+6)}{2}+\frac{2(1-2^6)}{1-2}=21+2(2^6-1)=147$．

故答案为：147．

【点评】本题考查等差、等比数列的求和公式，属于基础题．

13.（5 分）在边长为 $8\times5cm$ 的长方形铁片的四角切去边长相等的小正方形，再把它的边沿虚线折起（如图），做成一个无盖的长方体箱子，则箱子容积的最大值为__18__ cm^3．



【分析】根据长方体的体积公式求得 $V(x)$，求得函数的定义域，利用导数法求得最大值即可．

【解答】解：根据题目：边长为 $8\times5cm$ 的长方形铁片的四角切去边长相等的小正方形，再把它的边沿虚线折起（如图），

设小正方形的边长为 x，依题意，箱子容积 $V(x)=(8-2x)(5-2x)x=4x^3-26x^2+40x$，

由$\begin{cases}8-2x>0\\5-2x>0\\x>0\end{cases}$，解得 $0<x<2.5$，所以 $V(x)$ 的定义域为 $(0,2.5)$．

则 $V'(x)=12x^2-52x+40=4(3x-10)(x-1)$，

所以 $V(x)$ 在区间 $(0,1)$，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增；

在区间 $(1,2.5)$，$V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减，

所以当 $x=1cm$ 时，$V(x)$ 取到最大值，且最大值为 $V(1)=18cm^3$．

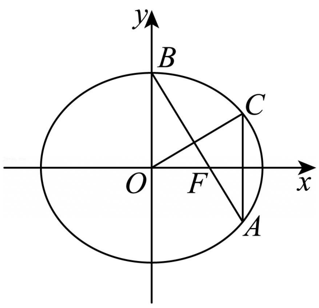
故答案为：18．

【点评】本题考查利用导数求解函数的最值，属于中档题．

14．（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，上顶点为 B．连接 BF 并延长交椭圆于点 A，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C．若 $OC\perp AB$，则椭圆离心率为__$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$__．

【分析】求出点 A 的坐标，由对称性求出点 C 的坐标，由题意可得出 $k_{OC}\cdot k_{BF}=-1$，可得出关于 a、c 的齐次等式，结合 $0<e<1$ 可求出 e 的值．

【解答】解：由题意，易知点 B（0，b）、F（c，0），如图所示：



则直线 BF 的方程为$\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$，

联立$\begin{cases}\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x\neq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}\\ y=-\frac{b^3}{a^2+c^2}\end{cases}$，即点$A(\frac{2a^2c}{a^2+c^2}，-\frac{b^3}{a^2+c^2})$，

由椭圆的对称性可知，点 C 与点 A 关于 x 轴对称，则$C(\frac{2a^2c}{a^2+c^2}，\frac{b^3}{a^2+c^2})$，

所以$k_{OC}=\frac{b^3}{2a^2c}$，且直线 BF 的斜率为$k_{BF}=-\frac{b}{c}$，

由已知 $OC\perp BF$，则$k_{OC}\cdot k_{BF}=\frac{b^3}{2a^2c}\cdot(-\frac{b}{c})=-\frac{b^4}{2a^2c^2}=-1$，

则 $b^4=2a^2c^2$，即（a^2-c^2）$^2=2a^2c^2$，即 $c^4-4a^2c^2+a^4=0$，

即 $e^4-4e^2+1=0$，因为 $0<e<1$，解得$e^2=2-\sqrt{3}$，

即椭圆离心率$e=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．

【点评】本题考查椭圆的性质及椭圆离心率的求法，属中档题．

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（13 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=3a_n-3$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=\frac{1}{log_3a_n\cdot log_3a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

【分析】（1）直接利用数列的递推关系式的应用求出数列的通项公式；

（2）利用裂项相消法的应用求出数列的和．

【解答】解：（1）当 $n=1$ 时，$2a_1=3a_1-3$，解得 $a_1=3$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3a_n-3a_{n-1}$，

整理得：$a_n=3a_{n-1}$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$（常数），

所以数列$\{a_n\}$是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，

所以$a_n=3^n$．

（2）因为$log_3a_n=log_33^n=n$，

所以$b_n=\frac{1}{log_3a_n\cdot log_3a_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$．

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法，数列的求和，裂项相消法的求和，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题．

16．（15 分）已知圆 M 经过 A（－1，0），B（5，8）两点，且圆心 M 在直线 $y=x+2$ 上．

（1）求圆 M 的方程；

（2）已知以 A 为端点的弦的长度为 $7\sqrt{2}$，求该弦所在直线方程．

【分析】（1）法（i）求出 AB 的中垂线方程，与圆心所在直线方程联立求得 M（2，4），利用距离公式求出半径，即可得解；

法（ii）由题意设圆心 M 的装备，由$|MA|=|MB|$，可得参数的值，即求出圆心坐标和半径的大小，代入标准方程即可求出圆的方程；

（2）按照弦所在直线斜率是否存在讨论，当斜率存在时，结合点到直线距离公式，根据弦长公式列式求解即可．

【解答】解：（1）因为 A（－1，0），B（5，8），

所以 AB 的中垂线的斜率为$-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{-1-5}{8}=-\frac{3}{4}$，

又 AB 的中点为（2，4），所以 AB 的中垂线方程为$y-4=-\frac{3}{4}(x-2)$，

即 $3x+4y-22=0$，

由$\begin{cases}3x+4y-22=0\\ y=x+2\end{cases}$，解得 M（2，4），又半径 $r=|MA|=5$，

所以圆 M 的方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=25$；

法（ii）因为圆 M 经过 A（﹣1，0），B（5，8）两点，且圆心 M 在直线 $y=x+2$ 上，

设圆心 M（a，$a+2$），因为$|MA|=|MB|$，

即$\sqrt{(a+1)^2+(a+2)^2}=\sqrt{(a-5)^2+(a+2-8)^2}$，

整理可得 $2a+1+4a+4=-10a+25-12a+36=0$，解得 $a=2$，

即圆心坐标为（2，4），半径 $r=|AM|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

圆 M 的方程为（$x-2$）^{2}+（$y-4$）^{2}=25；

（2）若弦所在直线斜率不存在，则弦长为 8，不合题意，故所求弦的斜率存在．

设弦所在直线方程为 $y=k$（$x+1$），即 $kx-y+k=0$，设圆心到弦的距离为 d，

由 $7\sqrt{2}=2\sqrt{25-d^2}$所以$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即$\frac{|3k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $k=1$ 或$\frac{31}{17}$．

所以弦所在的直线方程为 $x-y+1=0$ 或 $31x-17y+31=0$．

【点评】本题考查圆的方程的求法及分类讨论求直线与圆的相交弦长，属于中档题．

17．（15 分）甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$．假设两人射击是否击中目标相互之间没有影响，每人每次射击是否击中目标相互之间也没有影响．

（1）求甲、乙各射击一次均击中目标的概率；

（2）求甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标的概率；

（3）若乙在射击中出现连续 2 次未击中目标就会被终止射击，求乙恰好射击 4 次后被终止射击的概率．

【分析】（1）由于两人射击是否击中目标相互之间没有影响，所以由相互独立事件的概率公式求解即可；

（2）记事件 A_i 表示“甲第 i（$i=1$，2，3，4）次射击击中目标”，并记“甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标”为事件 C，则$C=A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4$，且$A_1A_2A_3\overline{A}_4$与$\overline{A}_1A_2A_3A_4$是互斥事件，再由独立事件和互斥事件的概率求解即可；

（3）记事件 B_i 表示“乙第 i（$i=1$，2，3，4）次射击击中目标”，事件 D 表示“乙在第 4 次射击后被终止射击”，则$D=B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$，且$B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$与$\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$是互斥事件，再利用由独立事件和互斥事件的概率求解即可．

【解答】解：（1）用事件 A 表示“甲击中目标”，事件 B 表示“乙击中目标”，

所以$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$;

（2）用事件 A_i 表示“甲第 i（$i=1$，2，3，4）次射击击中目标”，并记“甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标”为事件 C，

则$C=A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4$，且$A_1A_2A_3\overline{A}_4$与$\overline{A}_1A_2A_3A_4$是互斥事件，

由题意可知 A_i 与 $\overline{A}_j$（i，j=1，2，3，4，且 i≠j）之间也相互独立.

所以$P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=P(\overline{A}_3)=P(\overline{A}_4)=\frac{1}{3}$,

故$P(C)=P(A_1A_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2A_3A_4)$

$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$

$=(\frac{2}{3})^3\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^3=\frac{16}{81}$.

所以甲射击 4 次，恰有 3 次连续击中目标的概率为$\frac{16}{81}$.

（3）用事件 B_i 表示“乙第 i（i=1，2，3，4）次射击击中目标”，事件 D 表示“乙在第 4 次射击后被终止射击”，

则$D=B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$，且$B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$与$\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4$是互斥事件.

由题意可知 B_i 与$\overline{B}_j$（i，j=1，2，3，4，且 i≠j）之间也相互独立.

所以$P(\overline{B}_i)=\frac{1}{4}(i=1，2，3，4)$，

故$P(D)=P(B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4\cup\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4)$

$=P(B_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4)+P(\overline{B}_1B_2\overline{B}_3\overline{B}_4)$

$=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)P(\overline{B}_4)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)P(\overline{B}_4)$

$=(\frac{3}{4})^2\times(\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}\times(\frac{1}{4})^3=\frac{3}{64}$.

所以乙恰好射击 4 次后被终止射击的概率为$\frac{3}{64}$.

【点评】本题主要考查相互独立事件的概率乘法公式，考查转化能力，属于中档题

18.（17 分）已知 O 为坐标原点，双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$过点 $P(2,1)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

（1）求双曲线的方程；

（2）直线 l 过点（2，0），与双曲线 C 交于 A，B 两点.

①若直线 l∥OP，求△PAB 的面积；

②在 x 轴上是否存在定点 N，使得$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$为定值？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.

【分析】（1）根据题意及双曲线性质，列出方程组，求解即可；

（2）①写出直线 l 的方程，与双曲线方程联立，求出弦长$|AB|$和点 P 到 l 的距离即可；

②设 N（n，0），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），当直线 l 斜率不为 0 时，设 l：$x=my+2$，与双曲线方程联立，表示并化简得$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=\frac{(4n-6)m^2+2}{m^2-2}+(2-n)^2$，根据$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$为常数得出$n=\frac{5}{4}$时$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\frac{7}{16}$；再验证当直线 l 斜率时也满足即可.

【解答】解：（1）因为点 P（2，1）在双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，得$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，①

又因为渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，②

联立①②解得 $a^2=2$，$b^2=1$，所以双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=1$；

（2）①直线 OP 斜率为$\frac{1}{2}$，l∥OP，故直线 l 的方程为$y=\frac{1}{2}x-1$，

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-1\\ \frac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$，消去 y，可得 $x^2+4x-8=0$，

则 $\Delta=16+32=48>0$，$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-8$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{15}$，

又点 P 到 l 的距离为$d=\frac{|2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故△PAB 的面积为$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=2\sqrt{3}$；

②设 N（n，0），A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

当直线 l 斜率不为 0 时，设 l：$x=my+2$，

代入双曲线 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，得（m^2-2）$y^2+4my+2=0$，

则 $\Delta=16m^2+8$（m^2-2）>0，$y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2-2}$，$y_1y_2=\frac{2}{m^2-2}$，

所以$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(x_1-n)(x_2-n)+y_1y_2=(my_1+2-n)(my_2+2-n)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+m(2-n)(y_1+y_2)+(2-n)^2$

$=(m^2+1)\frac{2}{m^2-2}+m(2-n)\frac{-4m}{m^2-2}+(2-n)^2$

$=\frac{(4n-6)m^2+2}{m^2-2}+(2-n)^2$，

若$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$为常数，则$\frac{(4n-6)m^2+2}{m^2-2}$为常数，

设$\frac{(4n-6)m^2+2}{m^2-2}=\lambda$，λ为常数，则对任意的实数 m 恒成立，

则（$4n-6$）$m^2+2=\lambda$（m^2-2），所以$\begin{cases}4n-6=\lambda\\ 2=-2\lambda\end{cases}$，

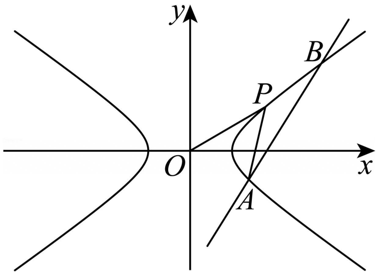
所以$n=\frac{5}{4}$，$\lambda=-1$，此时$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=-\frac{7}{16}$；

当直线 l 斜率时为 0 时，可得$A(\sqrt{2}，0)$，$B(-\sqrt{2}，0)$，

对于$N(\frac{5}{4}，0)$，有$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(-\sqrt{2}-n)(\sqrt{2}-n)=n^2-2=-\frac{7}{16}$，

解得$n=\frac{5}{4}$或$n=-\frac{5}{4}$（舍），

所以在 x 轴上存在定点$N(\frac{5}{4},\ 0)$，使得$\vec{NA}\cdot\vec{NB}$为定值$-\frac{7}{16}$.



【点评】本题考查双曲线的性质，考查直线与双曲线的综合应用，属难题.

19.（17 分）在数列$\{a_n\}$中，按照下面方式构成数列$\{b_n\}$：$b_1=a_1$，$b_2=max\{a_1，a_2\}$，$b_3=max\{a_1，a_2，a_3\}$，…，$b_n=max\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$（$n\geqslant2$），其中 $max\{a_1，a_2，\cdots，a_i\}$（$2\leqslant i\leqslant n$）表示数列 $a_1，a_2，\cdots，a_i$ 中最大的项.

（Ⅰ）若数列$\{a_n\}$的前 4 项分别为 2，1，4，3，求数列$\{b_n\}$的前 4 项；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$满足 $a_1=-2$，且 $na_{n+1}+2(n+1)a_n=0$.

（i）求 b_3+b_6 的值；

（ii）求$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

【分析】（Ⅰ）根据题意求 b_1，b_2，b_3，b_4，即可得结果；

（Ⅱ）根据题意分析可知数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是以首项和公比均为﹣2 的等比数列，进而可得$a_n=n\cdot(-2)^n$；（i）结合题意即可得 b_3，b_6；（ii）根据题意可得$\{b_n\}$的通项公式，利用分组求和法结合错位相减法运算求解.

【解答】解：（Ⅰ）因为数列$\{a_n\}$的前 4 项分别为 $a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=4$，$a_4=3$，

则 $b_1=a_1=2$，$b_2=max\{2，1\}=2$，$b_3=max\{2，1，4\}=4$，$b_4=max\{2，1，4，3\}=4$，

所以$\{b_n\}$的前 4 项分别为 2，2，4，4

（Ⅱ）因为 $na_{n+1}+2(n+1)a_n=0$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}=(-2)\cdot\frac{a_n}{n}$，

且$\frac{a_1}{1}=-2\neq0$，可知数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是以首项和公比均为﹣2 的等比数列.

则$\frac{a_n}{n}=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$，

所以$a_n=n\cdot(-2)^n$.

（i）当 n 为奇数时，$a_n=-n\cdot2^n<0$；

当 n 为偶数时，$a_n=n\cdot2^n$，可知数列$\{a_n\}$为递增数列，

可知 $b_3=a_2=8$，$b_6=a_6=384$，

所以 $b_3+b_6=a_2+a_6=8+384=392$；

当 $n=1$ 时，$b_1=a_1=-2$，$S_1=-2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=\begin{cases}a_{n-1} & (n为奇数)\\ a_n & (n为偶数)\end{cases}=\begin{cases}(n-1)\cdot 2^{n-1} & (n为奇数)\\ n\cdot 2^n & (n为偶数)\end{cases}$；

当 n 为奇数时，$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n=a_1+a_2+a_2+a_4+a_4+\cdots+a_{n-1}+a_{n-1}$

$=-2+2(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})=-2+2(2\cdot 2^2+4\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1})$，

令 $M=2\cdot 2^2+4\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$，①，

$4M=2\cdot 2^4+4\cdot 2^6+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n+1}$，②，

作差得 $-3M=2\times 2^2+2\times 2^4+\ldots+2\times 2^{n-1}-(n-1)\times 2^{n+1}$，

$=\frac{8\times(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}-(n-1)\times 2^{n+1}$，

$=(\frac{5}{3}-n)\times 2^{n+1}-\frac{8}{3}$；

所以$M=\frac{3n-5}{9}\cdot 2^{n+1}+\frac{8}{9}$；

经检验 $n=1$ 也满足上式，所以$S_n=-2+2M=\frac{3n-5}{9}\cdot 2^{n+2}-\frac{2}{9}$；

（ii）当 n 为偶数时，$S_n=S_{n-1}+b_n=\frac{3n-8}{9}\cdot 2^{n+1}-\frac{2}{9}+n\cdot 2^n=\frac{15n-16}{9}\cdot 2^n-\frac{2}{9}$；

综上所述：$S_n=\begin{cases}\frac{3n-5}{9}\cdot 2^{n+2}-\frac{2}{9}，n为奇数\\ \frac{15n-16}{9}\cdot 2^n-\frac{2}{9}，n为偶数\end{cases}$.

【点评】本题考查的知识点：错位相减法的应用，分奇偶的求和问题，主要考查学生的运算能力，属于中档题