昆山市 2025-2026 学年第一学期高三数学期末考试模拟试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1．（5 分）已知集合 $A=\{-2，0，1，3\}$，集合 $B=\{x|-x\in A$ 且 $3+x\notin A\}$，则 $B=$（　　）

A．$\{0，3\}$　　B．$\{-2，1\}$

C．$\{2，-1\}$　　D．$\{0，1，3\}$

2．（5 分）已知复数 z 满足$z(2+i)=\overline{z}+4i$（i 为虚数单位），则$|z|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$

C．2　　D．4

3．（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=0$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{c}|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$

C．2　　D．$1+\sqrt{2}$

4．（5 分）皖江明珠，创新之城——芜湖，正加快建设省域副中心城市．为了烘托“七一”节日氛围，需要准备 10000 盆绿植作装饰．已知栽种绿植的花盆可近似看成圆台，上底面圆直径约为 20cm，下底面圆直径约为 10cm，母线长约 10cm．假定每一个花盆装满营养土，请问需要营养土多少立方米？（参考数据：$\pi\approx3.14$，$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）（　　）

A．863.50　　B．8.64

C．1584.39　　D．15.84

5．（5 分）已知曲线 $y=e^{|x|}+a$ 与 $y=\cos x-x^2$ 只有唯一交点，则 $a=$（　　）

A．0　　B．1

C．2　　D．3

6．（5 分）已知函数$f(x)=cos(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间$[0，\frac{\pi}{18}]$上不单调，且曲线 $y=f(x)$ 的一个对称中心是$(\frac{\pi}{6}，0)$，则ω的最小值是（　　）

A．20　　B．16

C．13　　D．7

7．（5 分）已知随机变量 $X\sim N(2，\sigma^2)$，若 $P(X<a)=0.8$，$P(b<X<2)=0.3$，$a>0$，$b>0$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}$的最小值是（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$

C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{8}{5}$

8.（5 分）已知实数 x，y 满足$ye^x=xe^{2y}(x>1，y>\frac{1}{2})$，则下列关系一定正确的是（　　）

A．$x<y$　　B．$2x<y$

C．$x<2y$　　D．$x>2y$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9.（6 分）现有两组数据，第一组数据为 a_1，a_2，a_3，…，a_{12}，其平均数为 a，标准差为 b，极差为 m，第 80 百分位数为 n；第二组数据为 $2a_1-4$，$2a_2-4$，$2a_3-4$，…，$2a_{12}-4$．则下列说法正确的是（　　）

A．第一组数据去掉 a_1，a_{12}，其剩余数据的标准差比 b 小

B．第二组数据的平均数为 $2a-4$

C．第二组数据的第 80 百分位数为 $2n-4$

D．第二组数据的极差为 $2m-4$

（多选）10.（6 分）已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，$AA_1=BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，O 为该三棱柱的外接球球心 O，则（　　）

A．直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为$\frac{\pi}{4}$

B．球 O 的体积为$\frac{4\pi}{3}$

C．半径为$\frac{\sqrt{2}}{4}$的球可以放入该直三棱柱的内部

D．球 O 被平面 AB_1C 截得的截面圆的面积为$\frac{9\pi}{10}$

（多选）11.（6 分）已知抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F，A，B 为抛物线上的两点，O 为坐标原点，分别过点 A，B 作抛物线 C 的切线 l_1，l_2 交于点 M，且 l_1，l_2 与 x 轴分别交于点 D，E，则（　　）

A．若$|AF|=5$，则点 A（4，5）

B．若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，则直线 AB 恒过定点（0，2）

C．若直线 AB 过点 F，则点 M 恒在直线 $y=-1$ 上

D．若直线 AB 过点 F，则$|DE|=|MF|$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12.（5 分）$(x+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{12}$的展开式中的常数项是 ________ ．

13.（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=3$，$S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，在 a_k 和 a_{k+1} 两项之间插入 2^k 个 2（$k\in\mathbf{N}^*$），得到新数列$\{b_n\}$，则数列$\{b_n\}$的前 100 项和为 ________ ．

14．（5 分）已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$C$ 上存在一点 A，使 $AF_1\perp AF_2$，点 B 满足 $2\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{OF_2}$，$\angle F_1AF_2$ 的平分线交直线 OB 于点 D，$|OD|=b=\sqrt{3}$，则椭圆 C 的标准方程为 ______________________ ．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知某单位质检科有 4 个办公室，每个办公室有 4 名员工，第 k 号（$k=1$，2，3，4）办公室有 k 名男员工，$4-k$ 名女员工．现不按办公室编号顺序选取部分员工去参加活动，任意选定其中一个办公室，且从中随机连续三次选出 3 名员工．

（1）若选中的恰为 2 号办公室，求第三次选出的员工为女员工的概率；

（2）设选出的 3 名员工中女员工人数为 X，求 E（X）．

16．已知在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且$cos^2B-cos^2C=sinA(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot sinB\cdot sinC-sinA)$．

（1）求角 B 的大小；

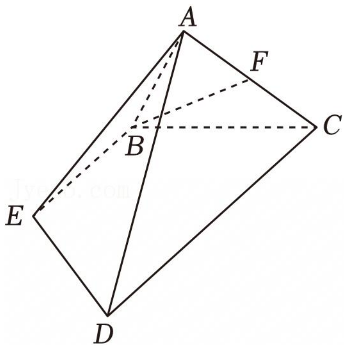
（2）若 $b=3$，$\frac{2c}{a}=\sqrt{3}+1$，求△ABC 的面积 S．

17．如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$BE\parallel CD$，$BC\perp CD$，$AE=BE=2$，$BC=CD=AC=AD=4$，$AE\perp AD$，F 是 AC 的中点．

（1）求证：$BF\parallel$ 平面 ADE；

（2）求证：$AE\perp$ 平面 ACD；

（3）求二面角 $A-DE-C$ 的余弦值．



18．已知函数$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$，正实数数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$e^{a_{n+1}}=f(a_n)$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

（1）求证：$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}<a_n$；

（2）求证：$S_n\geq 2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

19．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$＞0，$b$＞0）的离心率为 2，点（2，3）是双曲线 C 上的点，A，B 是双曲线 C 的左、右顶点，点 P（不同于点 A，B）是双曲线 C 上的一个动点，直线 PA，PB 分别交直线$x=\frac{1}{2}$于点 M，N.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）求证：以线段 MN 为直径的圆 C' 被 x 轴截得的弦长为定值；

（3）当点 P 在右支上时，直线 MB 交双曲线 C 的右支于点 Q，证明：直线 PQ 过定点.

昆山市 2025-2026 学年第一学期高三数学期末考试模拟试题

参考答案与试题解析

一．选择题（共 8 小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	B	D	A	C	B	D

二．多选题（共 3 小题）

题号	9	10	11
答案	BC	ABD	BCD

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1．（5 分）已知集合 $A=\{-2, 0, 1, 3\}$，集合 $B=\{x|-x\in A$ 且 $3+x\notin A\}$，则 $B=$（　　）

A．$\{0, 3\}$　　B．$\{-2, 1\}$　　C．$\{2, -1\}$　　D．$\{0, 1, 3\}$

【分析】根据 $-x$ 为集合 A 中的元素，先求 x，再根据 $3+x\notin A$，进行验证，即可求解．

【解答】解：集合 $A=\{-2, 0, 1, 3\}$，集合 $B=\{x|-x\in A$ 且 $3+x\notin A\}$，

当 $-x=-2$，得 $x=2$，$3+2=5\notin A$，满足条件，

$-x=0$，得 $x=0$，$3+0=3\in A$，不满足条件，

$-x=1$，得 $x=-1$，$3+(-1)=2\notin A$，满足条件，

$-x=3$，得 $x=-3$，$3+(-3)=0\in A$，不满足条件，

所以 $B=\{2, -1\}$．

故选：C．

【点评】本题考查集合中元素与集合的关系，是基础题．

2．（5 分）已知复数 z 满足$z(2+i)=\overline{z}+4i$（i 为虚数单位），则$|z|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

【分析】设 $z=a+bi$，a，$b\in\mathbf{R}$，化简求出复数 z，再根据复数的模的计算公式求解$|z|$．

【解答】解：因为$z(2+i)=\overline{z}+4i$，设 $z=a+bi$，a，$b\in\mathbf{R}$，

则$\overline{z}=a-bi$，

则 $(a+bi)(2+i)=a-bi+4i$，展开得 $(2a-b)+(a+2b)i=a+(4-b)i$，

由复数相等的定义可知，$\begin{cases}2a-b=a\\a+2b=4-b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$，所以 $z=1+i$，$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．

故选：B．

【点评】本题主要考查复数的模，属于基础题．

3．（5 分）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=0$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{c}|=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$1+\sqrt{2}$

【分析】首先由条件转化为$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，再根据数量积公式求模．

【解答】解：由$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$，可得$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，即$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，

由$\vec{a}\perp\vec{b}$可知，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以$|\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{2}$．

故选：B．

【点评】本题考查向量的模，属于基础题．

4．（5 分）皖江明珠，创新之城——芜湖，正加快建设省域副中心城市．为了烘托“七一”节日氛围，需要准备 10000 盆绿植作装饰．已知栽种绿植的花盆可近似看成圆台，上底面圆直径约为 20cm，下底面圆直径约为 10cm，母线长约 10cm．假定每一个花盆装满营养土，请问需要营养土多少立方米？（参考数据：$\pi\approx3.14$，$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）（　　）

A．863.50　　B．8.64　　C．1584.39　　D．15.84

【分析】由已知求得一个花盆的容积，乘以 10000，转化单位得答案．

【解答】解：∵上底面圆直径约为 20cm，下底面圆直径约为 10cm，母线长约 10cm，

∴圆台的高 $h=\sqrt{10^2-(10-5)^2}=5\sqrt{3}cm$，

∴一个花盆的容积为 $V=\frac{1}{3}\pi\times5\sqrt{3}\times(10^2+10\times5+5^2)\approx1584.392cm^3$．

∴每一个花盆装满营养土，需要营养土约为 $1584.392\times10000=15843920cm^3=15.84m^3$．

故选：D．

【点评】本题考查圆台体积的求法，是基础题．

5．（5 分）已知曲线 $y=e^{|x|}+a$ 与 $y=\cos x-x^2$ 只有唯一交点，则 $a=$（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【分析】利用函数的奇偶性，结合函数图象的性质来求解 a 的值．

【解答】解：函数 $y=e^{|x|}+a$ 与 $y=\cos x-x^2$，定义域均为 R，均为偶函数，图象关于 y 轴对称，

由于两曲线只有唯一交点，所以唯一交点必在 $x=0$ 处．

则有 $e^0+a=\cos 0-0^2$，即 $1+a=1$，解得 $a=0$．

故选：A．

【点评】本题主要考查函数的奇偶性，属于中档题．

6．（5 分）已知函数$f(x)=cos(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间$[0,\frac{\pi}{18}]$上不单调，且曲线 $y=f(x)$ 的一个对称中心是$(\frac{\pi}{6},0)$，则ω的最小值是（　　）

A．20　　B．16　　C．13　　D．7

【分析】根据函数的对称中心，列式求ω的集合，再利用代入法求$\omega x+\frac{\pi}{3}$的范围，结合函数的图象，列式求解．

【解答】解：因为 $y=f(x)$ 的一个对称中心是$(\frac{\pi}{6},0)$，所以$\omega\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，得$\omega=1+6k$，$k\in\mathbf{Z}$，

当$x\in[0,\frac{\pi}{18}]$时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\omega\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}]$，

由条件可知，$\omega\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}>\pi$，$k\in Z$，得$\omega>12$，

综上可知，ω的最小值为 13．

故选：C．

【点评】本题主要考查余弦函数的图象与性质，属于中档题．

7．（5 分）已知随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，若 $P(X<a)=0.8$，$P(b<X<2)=0.3$，$a>0$，$b>0$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}$的最小值是（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{6}{5}$　　D．$\frac{8}{5}$

【分析】根据正态密度曲线的对称性，得到 $a+b=4$，再利用“1”的妙用，利用基本不等式，即可求解．

【解答】解：根据题意可知，随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，则正态密度曲线关于 $x=2$ 对称，

所以 $P(2<X<a)=0.8-0.5=0.3$，且 $P(b<X<2)=0.3$，所以 $a+b=4$，

则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{5}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1})[a+(b+1)]=\frac{1}{5}(2+\frac{b+1}{a}+\frac{a}{b+1})\geq\frac{1}{5}\times(2+2\sqrt{\frac{b+1}{a}\cdot\frac{a}{b+1}})=\frac{4}{5}$，

当且仅当$\frac{b+1}{a}=\frac{a}{b+1}$，$a>0$，$b>0$，即 $a=b+1$ 时，即$a=\frac{5}{2}$，$b=\frac{3}{2}$时等号成立，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}$的最小值是$\frac{4}{5}$.

故选：B．

【点评】本题考查了正态分布的对称性、性质，属于基础题．

8．（5 分）已知实数 x，y 满足$ye^x=xe^{2y}(x>1，y>\frac{1}{2})$，则下列关系一定正确的是（　　）

A．$x<y$　　B．$2x<y$　　C．$x<2y$　　D．$x>2y$

【分析】首先条件等式变形为$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{2y}}{y}$，再通过构造函数$g(x)=\frac{e^x}{x}$，利用导数判断函数的单调性，再根据不等式$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{2y}}{y}>\frac{e^{2y}}{2y}$，比较大小．

【解答】解：由题可知，$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{2y}}{y}$，

设$g(x)=\frac{e^x}{x}$，$x>1$，$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在（1，+∞）单调递增，

因为$g(x)=\frac{e^x}{x}=\frac{e^{2y}}{y}>\frac{e^{2y}}{2y}=g(2y)$，$x>1$，$2y>1$，所以 $x>2y$．

故选：D．

【点评】本题考查利用导数求解函数的单调性和单调区间，属于中档题．

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（6 分）现有两组数据，第一组数据为 a_1，a_2，a_3，…，a_{12}，其平均数为 a，标准差为 b，极差为 m，第 80 百分位数为 n；第二组数据为 $2a_1-4$，$2a_2-4$，$2a_3-4$，…，$2a_{12}-4$．则下列说法正确的是（　　）

A．第一组数据去掉 a_1，a_{12}，其剩余数据的标准差比 b 小

B．第二组数据的平均数为 $2a-4$

C．第二组数据的第 80 百分位数为 $2n-4$

D．第二组数据的极差为 $2m-4$

【分析】本题可根据平均数、标准差、极差、百分位数的性质，逐一分析选项．

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于 A，第一组数据去掉 a_1，a_{12}，剩余数据的离散程度可能变小，也可能不变，所以不能确定其标准差一定比 b 小，故 A 错误；

对于 B，第一组数据平均数为 a，第二组数据是 $2a_i-4$（$i=1$，2，…，12 ），则第二组数据平均数为 $2a-4$，故 B 正确；

对于 C，第一组数据第 80 百分位数为 n，第二组数据是 $2a_i-4$（$i=1$，2，…，12），

则第二组数据第 80 百分位数为 $2n-4$，故 C 正确；

对于 D，第一组数据极差为 m，则第二组数据极差为 $2m$，故 D 错误．

故选：BC．

【点评】本题考查数据平均数、极差和百分位数的计算，属于基础题．

（多选）10．（6 分）已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，$AA_1=BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，O 为该三棱柱的外接球球心 O，则（　　）

A．直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为$\frac{\pi}{4}$

B．球 O 的体积为$\frac{4\pi}{3}$

C．半径为$\frac{\sqrt{2}}{4}$的球可以放入该直三棱柱的内部

D．球 O 被平面 AB_1C 截得的截面圆的面积为$\frac{9\pi}{10}$

【分析】根据直三棱柱的性质，结合线面角、外接球体积、内切球半径、截面圆面积的相关公式逐一分析选项．

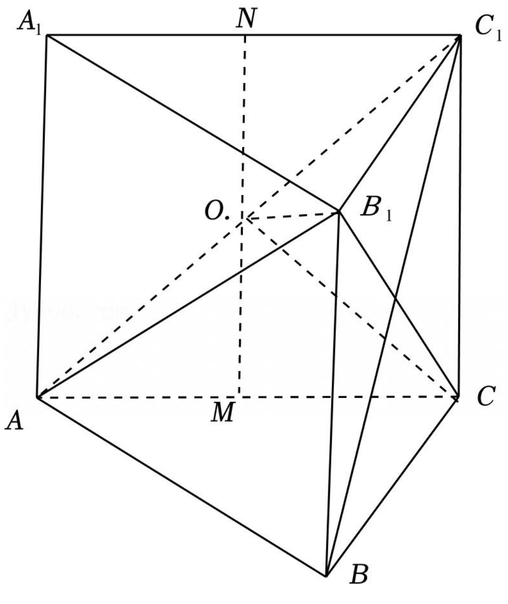
【解答】解：对于选项 A，因为 $AB\perp BB_1$，$AB\perp BC$，且 $BB_1\cap BC=B$，BB_1，$BC\subset$平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp$平面 BCC_1B_1，

则$\angle AC_1B$ 是直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成角，

在 $RtABC_1$ 中，$AB=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$，$BC_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，则$\angle AC_1B=\frac{\pi}{4}$，故选项 A 正确．

对于选项 B，如图，设 M，N 分别为 AC，A_1C_1 的中点，连接 MN，



因为点 M 是 $RtABC$ 的外心，由对称性，可知该三棱柱的外接球球心 O 为 MN 的中点，

故$OM=\frac{1}{2}$，则球 O 的半径为$R=\sqrt{OM^2+CM^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1$，

所以球 O 的体积为$\frac{4\pi}{3}$，故选项 B 正确；

对于选项 C，$\triangle ABC$ 内切圆半径$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，

因为 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}>4$，所以$r<\frac{\sqrt{2}}{4}$，

即半径为$\frac{\sqrt{2}}{4}$的球不能放入该直三棱柱的内部，故选项 C 错误；

对于选项 D，由题可得$AB_1=\sqrt{3}$，$B_1C=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle AB_1C}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$S_{\triangle OAC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

设点 O 到平面 AB_1C 的距离为 d，$\triangle ABC$ 斜边 AC 上的高为$\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由$V_{O-AB_1C}=V_{B_1-OAC}$，

得$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}$，

解得$d=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

则球 O 被平面 AB_1C 截得的截面圆半径$r_1=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{10}}{10})^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

从而所求截面圆面积为$\pi r_1^2=\frac{9\pi}{10}$，故选项 D 正确．

故选：ABD．

【点评】本题考查立体几何综合问题，属于难题．

（多选）11．（6 分）已知抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F，A，B 为抛物线上的两点，O 为坐标原点，分别过点 A，B 作抛物线 C 的切线 l_1，l_2 交于点 M，且 l_1，l_2 与 x 轴分别交于点 D，E，则（　　）

A．若$|AF|=5$，则点 A（4，5）

B．若$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-4$，则直线 AB 恒过定点（0，2）

C．若直线 AB 过点 F，则点 M 恒在直线 $y=-1$ 上

D．若直线 AB 过点 F，则$|DE|=|MF|$

【分析】根据焦半径公式求点 A 的坐标，判断 A，设直线 AB：$y=kx+b$，与抛物线方程联立，利用韦达定理表示$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-4$，即可判断 B，设直线 AB 方程为 $y=kx+1$，与抛物线方程联立，并且利用导数求切线 l_1，l_2 的方程，结合韦达定理，求交点 M 的坐标，判断 C，根据 C 的和过程，分别求点 D，E，M 的坐标，代入两点间距离公式，判断 D．

【解答】解：A 选项，设 A（x_1，y_1），$|AF|=y_1+1=5$，因此 $y_1=4$，因此 $x_1=\pm4$，即 A（±4，4），因此 A 选项错误；

B 选项，设直线 AB：$y=kx+b$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），联立抛物线方程得 $x^2-4kx-4b=0$，$\Delta=16k^2+16b>0$，即 $k^2+b>0$，

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$，

因此$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=-4b+b^2=-4$，得 $b=2$，

因此直线 AB 恒过定点（0，2），因此 B 选项正确；

C 选项，F（0，1），因此直线 AB 方程为 $y=kx+1$，联立 $x^2=4y$，得 $x^2-4kx-4=0$

得 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

$y=\frac{x^2}{4}$，因此$y'=\frac{x}{2}$，因此切线l_1：$y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即$y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，

同理切线l_2：$y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，联立 l_1，l_2，$\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，

得$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，因此焦点 M 恒在直线 $y=-1$ 上，因此 C 选项正确；

D 选项，由 C 可知，$y=0\Rightarrow D(\frac{x_1}{2}，0)$，$E(\frac{x_2}{2}，0)$，$F$（0，1），$M(\frac{x_1+x_2}{2}，-1)$

因此$|DE|=\frac{|x_1-x_2|}{2}=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{2}=2\sqrt{k^2+1}$，

$|MF|=\sqrt{(\frac{x_1+x_2}{2})^2+4}=2\sqrt{k^2+1}$，因此$|DE|=|MF|$，因此 D 选项正确．

故选：BCD．

【点评】本题考查直线与抛物线的综合，属于中档题．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．（5 分）$(x+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{12}$的展开式中的常数项是 $\underline{\frac{55}{128}}$ ．

【分析】根据二项式定理求出$(x+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{12}$展开式的通项公式，然后令 x 的指数等于 0，进而求得展开式中的常数项．

【解答】解：题中二项展开式的第 $k+1$ 项为：$T_{k+1}=C_{12}^k\cdot x^{12-k}(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^k=C_{12}^k\cdot(\frac{1}{2})^k\cdot x^{12-\frac{4k}{3}}$，

其中 $k=0$、1、2、…、12，

令 $12-\frac{4k}{3}=0$，解得 $k=9$，展开式中的常数项为 $T_{10}=C_{12}^9\cdot(\frac{1}{2})^9=\frac{55}{128}$.

故答案为：$\frac{55}{128}$.

【点评】本题主要考查二项式定理、有理数指数幂的运算法则与组合数公式等知识，属于中档题．

13．（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=3$，$S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，在 a_k 和 a_{k+1} 两项之间插入 2^k 个 2（$k\in\mathbf{N}^*$），得到新数列$\{b_n\}$，则数列$\{b_n\}$的前 100 项和为 $\underline{\quad 251 \quad}$ ．

【分析】根据前 n 项和与通项的关系，以及累乘法得到 $a_n=3n$，再根据数列的项数得出插入 2 的数量，从而求解．

【解答】解：由题意知，$S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，且 $a_1=3$，

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+1}{2}a_n - \frac{n}{2}a_{n-1}$，

整理可得：$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$，

累乘得通项公式：$a_n=3n$，

因为 $2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+6=68$，

又 $2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+6+2^6=132$，

因此数列$\{b_n\}$的前 100 项在 a_6 后还有 32 个 2，

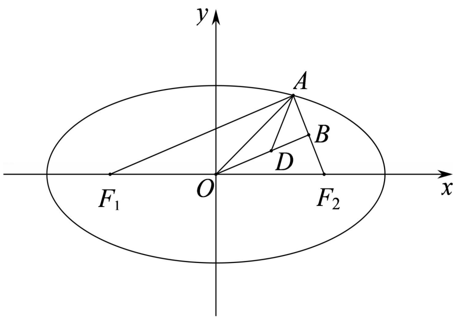
因此数列$\{b_n\}$的前 100 项和为$S_6 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 32) \times 2 = 251$．

故答案为：251．

【点评】本题考查数列求和的其他方法，属于中档题．

14．（5 分）已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a>b>0)$的左、右焦点，$C$ 上存在一点 A，使 $AF_1\perp AF_2$，点 B 满足 $2\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OF_2}$，$\angle F_1AF_2$ 的平分线交直线 OB 于点 D，$|OD| = b = \sqrt{3}$，则椭圆 C 的标准方程为 __$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$__ ．

【分析】根据椭圆中焦点三角形的性质和椭圆的定义，利用三角形中位线性质和等腰直角三角形的边长关系，求出 a 只，即得椭圆标准方程．



【解答】解：

如图，不妨设 A 在第一象限，因此$|F_1F_2|=2c$，因 $AF_1\perp AF_2$，因此$|OA| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = c$，

在$\triangle OAF_2$ 中，因$|OF_2|=|OA|=c$，且由 $2\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OF_2}$，可知点 B 是 AF_2 的中点，

因此得 $OB\perp AF_2$，且$|F_1A|=2|OB|$，

因为 $AF_1\perp AF_2$，AD 平分$\angle F_1AF_2$，因此$\angle DAB = \frac{\pi}{4}$，

因此$\triangle DBA$ 为等腰直角三角形，$|DB| = |BA| = \frac{1}{2}|AF_2|$，

$|OB| = \sqrt{3} + |DB|$，因此$|AF_1| = 2|OB| = 2\sqrt{3} + |AF_2|$，即$|AF_1| - |AF_2| = 2\sqrt{3}$，

根据椭圆的定义可得$|AF_1|+|AF_2|=2a$，

联立$\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2\sqrt{3}\\|AF_1|+|AF_2|=2a\end{cases}$，解得$\begin{cases}|AF_1|=a+\sqrt{3}\\|AF_2|=a-\sqrt{3}\end{cases}$，

在直角△AF_1F_2中$(a+\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^2=4c^2$，

化简得 $a^2-2c^2=-3$，又因 $a^2=3+c^2$，两者联立解得 $a^2=9$，

因此椭圆标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

【点评】本题考查直线与椭圆的综合，属于中档题.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知某单位质检科有 4 个办公室，每个办公室有 4 名员工，第 k 号（$k=1$，2，3，4）办公室有 k 名男员工，$4-k$ 名女员工．现不按办公室编号顺序选取部分员工去参加活动，任意选定其中一个办公室，且从中随机连续三次选出 3 名员工．

（1）若选中的恰为 2 号办公室，求第三次选出的员工为女员工的概率；

（2）设选出的 3 名员工中女员工人数为 X，求 E（X）．

【分析】（1）由题知 2 号办公室有 2 名男员工，2 名女员工，先求出第三次选出的员工为女员工的所有情况，由独立事件的乘法公式求解即可．

（2）求出 X 的可能取值及其对应的概率，由期望公式求解即可．

【解答】解：（1）由题意，2 号办公室有 2 名男员工，2 名女员工，

第三次选出的员工为女员工的情况有：男男女，男女女，女男女，

所以所求概率$P=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

（2）由题意可知 X 的可能取值为 0，1，2，3，

则$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{C_3^3}{C_4^3}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$,

$P(X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^3}+\frac{1}{4}\times\frac{C_3^2C_1^1}{C_4^3}=\frac{5}{16}$,

$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^3}+\frac{1}{4}\times\frac{C_3^2C_1^1}{C_4^3}=\frac{5}{16}$,

$P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{C_3^3}{C_4^3}=\frac{1}{16}$,

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

所以$E(X)=0\times\frac{5}{16}+1\times\frac{5}{16}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{1}{16}=\frac{9}{8}$.

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列与数学期望，相互独立事件的概率乘法公式等，属于中档题.

16. 已知在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且$cos^2B-cos^2C=sinA(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot sinB\cdot sinC-sinA)$.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=3$，$\frac{2c}{a}=\sqrt{3}+1$，求△ABC 的面积 S.

【分析】（1）根据正弦定理角换边得$a^2+c^2-b^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}acsinB$，再利用余弦定理即可得到答案；

（2）利用正弦定理进行边换角，再根据三角恒等变换得 $\tan A=1$，则$A=\frac{\pi}{4}$，再利用正弦定理得 $b=3$，

再利用两角和的正弦公式求得$sinC=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，最后再根据三角形面积公式即可.

【解答】解：（1）因为$cos^2B-cos^2C=sinA(\frac{2\sqrt{3}}{3}sinBsinC-sinA)$，

可得 $1-\sin^2B-(1-\sin^2C)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C-\sin^2A$，

整理可得$sin^2A+sin^2C-sin^2B=\frac{2\sqrt{3}}{3}sinAsinBsinC$，

由正弦定理可得$a^2+c^2-b^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}acsinB$，

由余弦定理可得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

可得$tanB=\sqrt{3}$，

又 $B\in(0,\pi)$，

所以$B=\frac{\pi}{3}$；

（2）由$\frac{2c}{a}=\sqrt{3}+1$，得$\frac{2sinC}{sinA}=\sqrt{3}+1$，

即 $2\sin(\frac{\pi}{3}+A)=(\sqrt{3}+1)\sin A$，

即 $2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)=(\sqrt{3}+1)\sin A$，

整理可得 $\tan A=1$，因为 $A\in(0,\pi)$，

所以$A=\frac{\pi}{4}$，

又$\frac{a}{b}=\frac{sinA}{sinB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$b=3$，

所以$a=\sqrt{6}$，

且 $\sin C=\sin(A+B)=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times3\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{9+3\sqrt{3}}{4}$.

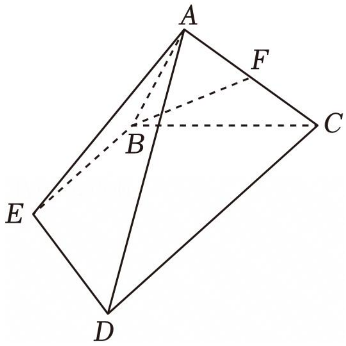
【点评】本题考查正弦定理，余弦定理的应用，两解和的正弦公式的应用，三角形面积公式的应用，属于中档题．

17．如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$BE\parallel CD$，$BC\perp CD$，$AE=BE=2$，$BC=CD=AC=AD=4$，$AE\perp AD$，F 是 AC 的中点．

（1）求证：$BF\parallel$ 平面 ADE；

（2）求证：$AE\perp$ 平面 ACD；

（3）求二面角 $A-DE-C$ 的余弦值．

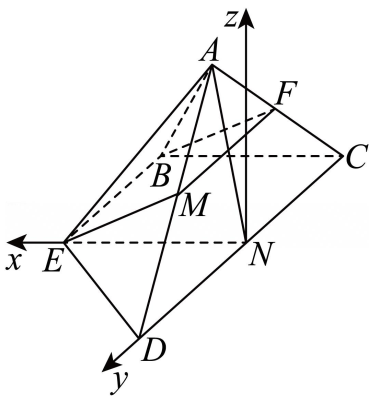


【分析】（1）先证明 $BF\parallel EM$，再由线面平行的性质定理证明即可．

（2）由题意证得 $AN\perp CD$，$EN\perp CD$，再由线面垂直的判定定理证得 $CD\perp$ 平面 AEN，即可证得 $AE\perp CD$，由 $AE\perp AD$，即可证得 $AE\perp$ 平面 ACD；

（3）先证得平面 $AEN\perp$ 平面 $BCDE$，再以 N 为坐标原点，过点 N 且垂直于平面 $BCDE$ 的直线为 z 轴建立坐标系，分别求出平面 $BCDE$ 和平面 ADE 的法向量，由二面角的向量公式求解即可．

【解答】解：（1）证明：如图：



分别取 AD，CD 的中点 M，N，连接 FM，EM，

在△ACD 中，F 是 AC 的中点，因此 $FM\parallel CN$，$FM=CN$，

又 $BE\parallel CD$，$BE=EN$，因此 $FM\parallel BE$，$FM=BE$，

因此四边形 $BEMF$ 是平行四边形，因此 $BF\parallel EM$．

又 $EM\subset$ 平面 ADE，$BF\not\subset$ 平面 ADE，因此 $BF\parallel$ 平面 ADE；

（2）证明：连接 AN，EN，因为△ACD 是等边三角形，因此 $AN\perp CD$，

由（1）知 $BCNE$ 为平行四边形，因此 $BC/\!/EN$，又 $BC\perp CD$，因此 $EN\perp CD$，

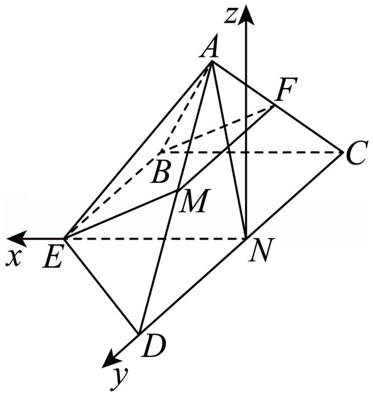
又 $AN\cap EN=N$，AN，$EN\subset$平面 AEN，因此 $CD\perp$平面 AEN，

又 $AE\subset$平面 AEN，因此 $AE\perp CD$，又 $AE\perp AD$，

$AD\cap CD=D$，AD，$CD\subset$平面 ACD，因此 $AE\perp$平面 ACD；

（3）由（2）知 $CD\perp$平面 AEN，因为 $CD\subset$平面 $BCDE$，因此平面 $AEN\perp$平面 $BCDE$，

以 N 为坐标原点，直线 NE，ND 分别为 x，y 轴，过点 N 且垂直于平面 $BCDE$ 的直线为 z 轴，



可知$N(0，0，0)$，$A(3，0，\sqrt{3})$，D（0，2，0），E（4，0，0），

因此$\overrightarrow{AE}=(1，0，-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=(4，-2，0)$，

设平面 ADE 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x，y，z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ 2x-y=0\end{cases}$，

令$z=\sqrt{3}$，得 $x=3$，$y=6$，因此$\overrightarrow{n_1}=(3，6，\sqrt{3})$，

又因为平面 $BCDE$ 的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0，0，1)$，

设二面角 $A-DE-C$ 的平面角为θ，

因此 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1}，\overrightarrow{n_2}>|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+6^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{4}$，

因此二面角 $A-DE-C$ 的余弦值为$\frac{1}{4}$.

【点评】本题考查空间向量法求解二面角，属于中档题．

18．已知函数$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$，正实数数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$e^{a_{n+1}}=f(a_n)$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．

（1）求证：$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}<a_n$；

（2）求证：$S_n \geq 2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

【分析】（1）问通过对 $a_{n+1}<a_n$ 和$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}$分别构造函数，利用导数研究函数单调性来证明不等式.

（2）问依据（1）的结论得到数列项的不等关系，结合累乘法和等比数列求和公式证明和的不等式.

【解答】证明：（1）由$e^{a_{n+1}}=f(a_n)=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$，可得$a_{n+1}=ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$.

①证 $a_{n+1}<a_n$：

即证$ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}<a_n$，等价于$\frac{e^{a_n}-1}{a_n}<e^{a_n}$，进一步等价于$e^{a_n}-1<a_ne^{a_n}$，即$a_ne^{a_n}-e^{a_n}+1>0$，

令 $g(x)=xe^x-e^x+1$（$x>0$），求导得 $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$（$x>0$ 时），

所以 $g(x)$ 在（0，+∞）单调递增，$g(x)>g(0)=0$，故$a_ne^{a_n}-e^{a_n}+1>0$，$a_{n+1}<a_n$ 成立.

②证$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}$：

即证$ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}>\frac{1}{2}a_n$，等价于$\frac{e^{a_n}-1}{a_n}>e^{\frac{1}{2}a_n}$，进一步等价于$e^{a_n}-1>a_ne^{\frac{1}{2}a_n}$，即$e^{a_n}-a_ne^{\frac{1}{2}a_n}-1>0$，

令$t=\frac{1}{2}a_n$（$t>0$，因 $a_n>0$），则需证 $e^{2t}-2te^t-1>0$，令$\varphi(t)=e^{2t}-2te^t-1$（$t>0$），

求导得$\varphi'(t)=2e^{2t}-2e^t-2te^t=2e^t(e^t-t-1)$，

再令 $h(t)=e^t-t-1$（$t>0$），求导 $h'(t)=e^t-1>0$（$t>0$ 时），所以 $h(t)$ 在（0，+∞）单调递增，$h(t)>h(0)=0$，

则$\varphi'(t)=2e^t(e^t-t-1)>0$，$\varphi(t)$ 在（0，+∞）单调递增，$\varphi(t)>\varphi(0)=0$，即$e^{a_n}-a_ne^{\frac{1}{2}a_n}-1>0$，

$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}$成立.

综上，$\frac{1}{2}a_n<a_{n+1}<a_n$得证.

证明：（2）由（1）知$a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{1}{2}$，

因为 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时：$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}>1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}$（共 $n-1$ 个$\frac{1}{2}$相乘），

即$a_n>\frac{1}{2^{n-1}}$（$n\geqslant2$）.

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$，而 $2-\frac{1}{2^{1-1}}=1$，此时$S_1=2-\frac{1}{2^{1-1}}$.

当 $n\geqslant2$ 时：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

综上，$S_n\geq 2-\frac{1}{2^{n-1}}$得证.

【点评】本题主要考查导数在函数单调性证明中的应用，数列累乘法、等比数列求和公式与数列不等式

证明的综合，涉及函数构造、数列递推关系及不等式放缩思想，属于难题．

19．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为 2，点（2，3）是双曲线 C 上的点，A，B 是双曲线 C 的左、右顶点，点 P（不同于点 A，B）是双曲线 C 上的一个动点，直线 PA，PB 分别交直线$x=\frac{1}{2}$于点 M，N．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）求证：以线段 MN 为直径的圆 C' 被 x 轴截得的弦长为定值；

（3）当点 P 在右支上时，直线 MB 交双曲线 C 的右支于点 Q，证明：直线 PQ 过定点．

【分析】（1）因为离心率$e=\frac{c}{a}=2$，将点（2，3）代入双曲线方程得$\frac{2^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$，又 $c^2=a^2+b^2$，解得 a，b，即可得出答案；

（2）由（1）可知 A（﹣1，0），B（1，0），设 P（x_0，y_0），即 $x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$.根据直线 PA 的方程求得 y_M，根据直线 PB 的方程求得 y_N，写出圆 C' 的方程，把 $y=0$ 代入圆 C' 中得出$y_My_N=-\frac{3y_0^2}{4(x_0^2-1)}$，结合$x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$ 计算出结果即可；

（3）设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），直线 PQ 的方程为 $x=my+n$，联立双曲线的方程，结合韦达定理可得 y_1+y_2，y_1y_2，写出直线 AP 的方程，进而可得 M 点的坐标，又 M，B，Q 三点共线，则 $k_{BQ}=k_{MB}$，又 M，A，P 三点共线，则 $k_{AP}=k_{MA}$，解出 n，即可得出答案．

【解答】解：（1）因为双曲线 C 的离心率为 2，因此$e=\frac{c}{a}=2$，因此 $c=2a$，

又 $c^2=a^2+b^2$，因此（$2a$）$^2=a^2+b^2$，化简得 $b^2=3a^2$，

因为点（2，3）在双曲线 C 上，因此代入得$\frac{2^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1$，

结合 $b^2=3a^2$，解得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，

故双曲线 C 的方程$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

（2）证明：由（1）可知 A（﹣1，0），B（1，0），设 P（x_0，y_0），

点 P 是双曲线 C 上的一个点，因此$x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$，

直线 PA 的方程为$y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，令$x=\frac{1}{2}$，得$y_M=\frac{3y_0}{2(x_0+1)}$，

直线 PB 的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，令$x=\frac{1}{2}$，得$y_N=-\frac{y_0}{2(x_0-1)}$，

设以线段 MN 为直径的圆的圆心为 C'（$\frac{1}{2}$，$\frac{y_M+y_N}{2}$），半径$r=\frac{|y_M-y_N|}{2}$，

故圆 C' 的方程：$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{y_M+y_N}{2})^2=\frac{(y_M-y_N)^2}{4}$，$y_My_N=-\frac{3y_0^2}{4(x_0^2-1)}$，

设圆 C' 与 x 轴的两个交点坐标分别为（x_1，0），（x_2，0），

把 $y=0$ 代入圆 C' 中得$(x-\frac{1}{2})^2=\frac{(y_M+y_N)^2}{4}-\frac{(y_M-y_N)^2}{4}=-y_My_N$，

结合$x_0^2-\frac{y_0^2}{3}=1$ 得$y_My_N=-\frac{9}{4}$，故$(x-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$，

解得 $x_1=2$，$x_1=-1$，故$|x_1-x_2|=3$，

因此以线段 MN 为直径的圆 C' 被 x 轴截得的弦长是 3，是定值；

（3）证明：直线 PQ 过定点（2，0），理由如下：

设直线 PQ 的斜率方程为 $x=my+n$，

联立$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1\\x=my+n\end{cases}$，

整理得$(m^2-\frac{1}{3})y^2+2mny+n^2-1=0$，

则$\Delta>0$，$y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2-\frac{1}{3}}$，$y_1y_2=\frac{n^2-1}{m^2-\frac{1}{3}}$，由（1）可知 A（﹣1，0），B（1，0），

直线AP：$y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，

因为直线$x=\frac{1}{2}$上有动点 M，点 M 直线 AP 上，因此$M(\frac{1}{2}，\frac{3y_1}{2(x_1+1)})$，

又 M，B，Q 三点共线，

因此 $k_{BQ}=k_{MB}$，因此$\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{1-\frac{1}{2}}{0-\frac{3y_1}{2(x_1+1)}}=-\frac{x_1+1}{3y_1}$①，

又 M，A，P 三点共线，

因此 $k_{AP}=k_{MA}$，因此$\frac{y_1}{x_1-1}=\frac{-1-\frac{1}{2}}{0-\frac{3y_1}{2(x_1+1)}}=\frac{x_1+1}{y_1}$②，

联立①②得：$\frac{y_2}{x_2-1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y_1}{x_1-1}$，

整理得 $3y_2(x_1-1)+y_1(x_2-1)=0$，

因此 $y_2(my_1+n+1)+3y_1(my_2+n-1)=0$.

化简得 $4my_1y_2+y_2(n+1)+3y_1(n-1)=0$，

因为$y_1+y_2=-\frac{2mn}{m^2-\frac{1}{3}}$，$y_1y_2=\frac{n^2-1}{m^2-\frac{1}{3}}$，

因此$my_1y_2=\frac{(n^2-1)(y_1+y_2)}{-2n}$，

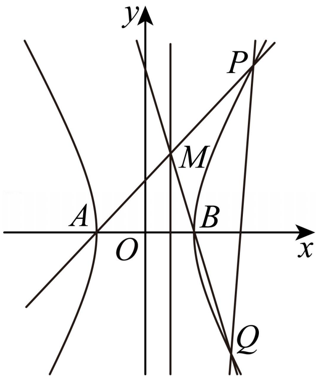
代入 $4my_1y_2+y_2(n+1)+3y_1(n-1)=0$，得$\frac{(n^2-1)(y_1+y_2)}{-2n}=-\frac{1}{4}[y_2(n+1)+3y_1(n-1)]$，

得 $(n-2)(-n+1)y_1+(n-2)(n+1)y_2=0$，

因此 $(n-2)[(-n+1)y_1+(n+1)y_2]=0$，

因此 $n=2$ 时．直线 PQ 的方程为 $x=my+2$，

因此 PQ 过定点（2，0）．



【点评】本题考查双曲线的定点及定值问题，属于难题