昆山市2025-2026学年第一学期高一数学期末考试模拟试题

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5分）命题“$\exists x>0$，$x^2-3x>0$”的否定是（　　）

A．$\exists x\leqslant 0$，$x^2-3x>0$　　B．$\exists x>0$，$x^2-3x\leqslant 0$

C．$\forall x>0$，$x^2-3x\leqslant 0$　　D．$\forall x\leqslant 0$，$x^2-3x>0$

2．（5分）已知圆心角为72°的扇形的弧长为$\frac{2\pi}{5}$，则该扇形的面积为（　　）

A．$\frac{\pi}{5}$　　B．$\frac{2\pi}{5}$　　C．$\frac{3\pi}{5}$　　D．$\frac{4\pi}{5}$

3．（5分）关于x的不等式$x^2-ax-b+5\leqslant 0$的解集是$[-1,3]$，那么$\log_a b$=（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

4．（5分）已知函数$f(x)=\begin{cases} cosx，x<0 \\ x^2，x\geq 0 \end{cases}$，则$f(f(-\frac{\pi}{3}))$的值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．4

5．（5分）若正数a，b满足$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=\sqrt{ab}$，则$ab$的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．2

6．（5分）函数$f(x)=3^x+2x-3$的零点所在的区间是（　　）

A．（0，1）　　B．（1，2）　　C．（2，3）　　D．（3，4）

7．（5分）已知$\tan\theta=2$，则$\frac{sin^3\theta+sin\theta}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=$（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{16}{3}$　　C．6　　D．8

8．（5分）酒驾是严重危害交通安全的违法行为，为了保障交通安全，根据国家有关规定：100mL血液中酒精含量达到20～79mg的驾驶员即为酒后驾车，80mg及以上认定为醉酒驾车．假设某驾驶员喝了一定量的酒后，其血液中的酒精含量上升到了0.9mg/mL．如果停止喝酒以后，他血液中酒精含量会以每小时20%的速度减少，那么他至少经过几个小时才能驾驶？（　　）

（结果取整数，参考数据：$lg2\approx 0.30$，$lg3\approx 0.48$）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（6 分）当$\alpha\in\{-1，\frac{1}{2}，3\}$时，幂函数$y=x^{\alpha}$的图象不可能经过的象限是（　　）

A．第二象限

B．第三象限

C．第四象限

D．第二、四象限

（多选）10．（6 分）已知函数$f(x)=sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，若$x_1$、$x_2$是关于$x$的方程$f(x)=0$的两个不同的解，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，则下列说法中正确的有（　　）

A．$\omega=2$

B．若$x=\frac{\pi}{6}$是$f(x)$图象的一条对称轴，则$\varphi=\frac{\pi}{6}$

C．若$f(x)$在区间$(0，\frac{\pi}{3})$内无最大值，则$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{6}$

D．若$\varphi\neq0$，则$f(x)$的图象在$(0，\frac{\pi}{2})$内有且仅有一个对称中心

（多选）11．（6 分）已知定义域为 **R** 的函数$f(x)$满足：$f(x+1)=2-f(x)$，$f(x+2)=2-f(-x)$，则（　　）

A．$f(x)$是周期为 2 的函数

B．$f(x)$是偶函数

C．$f(2)=1$

D．$f(2025)=1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．（5 分）函数$f(x)=\sqrt{x}+lg(x-1)$的定义域为______________．

13．（5 分）函数$f(x)=ax^3+b\sin x+1$，$f(1)=2$，则$f(-1)=$________．

14．（10 分）对于非空集合M，定义$\Phi_M(x)=\begin{cases}0，x\notin M\\1，x\in M\end{cases}$．若$A$，$B$是两个非空集合，且$A\subseteq B$，则$\Phi_A(x)[\Phi_A(x)-\Phi_B(x)]=$________；若$A=\{x|cosx\leq-\frac{1}{2}\}$，$B=(a，2a)$，且存在$x\in\mathbf{R}$，$\Phi_A(x)+\Phi_B(x)=2$，则实数$a$的取值范围是________________________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．已知集合 $A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|(x-m)(x-m-1)<0\}$．

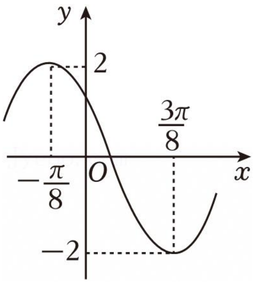
（1）若$m=\frac{3}{2}$，求集合 $A\cap B$；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围．

16．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示．

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

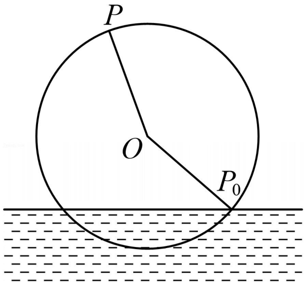
（2）将函数 $f(x)$ 的图象向右平移$\frac{5\pi}{24}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的值域．



17．一个半径为 $6m$ 的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 $3m$，已知水轮每分钟逆时针转动 4 圈，且当水轮上的点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计算时间．

（1）将点 P 距离水面的高度 y（单位：m．在水面下，则 y 为负数）表示为时间 x（单位：s）的函数；

（2）在转动的一个周期内，点 P 在水中的时间是多少？



18．已知定义在 **R** 上的函数$f(x)=log_2(2^x+1)$．

（1）若不等式 $f(x^2-mx+1)>f(0)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（2）设 $h(x)=x^2-2mx+1$，若对任意的 $x_1\in[0，3]$，存在 $x_2\in[1，3]$，使得 $f(x_1)\geqslant h(x_2)$，求实数 m 的取值范围．

19．对于函数 $f(x)$，若 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的点，则称 $f(x)$ 为定义域上的“伪奇函数”.

（1）试判断 $f(x)=\begin{cases}x-1，x\geq 0\\ -x-1，x<0\end{cases}$ 是否为“伪奇函数”，简要说明理由；

（2）若 $f(x)=\log_2(\sin x-m)+1$ 是定义在区间 $[-\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{3}]$ 上的“伪奇函数”，求实数 m 的取值范围；

（3）试讨论 $f(x)=4^x-m\cdot 2^{x+2}+4m^2-3$ 在 **R** 上是否为“伪奇函数”？并说明理由.

昆山市 2025-2026 学年第一学期高一数学期末考试模拟试题

参考答案与试题解析

一．选择题（共 8 小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	C	B	A	C	D

二．多选题（共 3 小题）

题号	9	10	11
答案	ACD	ABD	ACD

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．（5 分）命题“$\exists x>0$，$x^2-3x>0$”的否定是（　　）

A．$\exists x\leqslant 0$，$x^2-3x>0$　　B．$\exists x>0$，$x^2-3x\leqslant 0$

C．$\forall x>0$，$x^2-3x\leqslant 0$　　D．$\forall x\leqslant 0$，$x^2-3x>0$

【分析】直接根据存在量词命题的否定为全称量词命题即可得结果．

【解答】解：“$\exists x>0$，$x^2-3x>0$”的否定是$\forall x>0$，$x^2-3x\leqslant 0$．

故选：C．

【点评】本题主要考查命题的否定，属于基础题．

2．（5 分）已知圆心角为 72°的扇形的弧长为$\frac{2\pi}{5}$，则该扇形的面积为（　　）

A．$\frac{\pi}{5}$　　B．$\frac{2\pi}{5}$　　C．$\frac{3\pi}{5}$　　D．$\frac{4\pi}{5}$

【分析】将角度转换为弧度后借助扇形面积公式计算即可得．

【解答】解：因为扇形的圆心角为 72°，

设该扇形的圆心角弧度为α，则$\alpha=\frac{72\pi}{180}=\frac{2\pi}{5}$，

则$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\alpha\cdot(\frac{l}{\alpha})^2=\frac{l^2}{2\alpha}=\frac{(\frac{2\pi}{5})^2}{2\times\frac{2\pi}{5}}=\frac{\pi}{5}$.

故选：A．

【点评】本题考查了角度与弧度的互化以及扇形的面积公式的应用，属于基础题．

3．（5 分）关于 x 的不等式 $x^2-ax-b+5\leqslant 0$ 的解集是[－1，3]，那么 $\log_a b$＝（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．3　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

【分析】分析可知－1、3 为关于 x 的方程 $x^2-ax-b+5=0$ 的两根，结合韦达定理可得出 a、b 的值，结合对数的运算性质可得出 $\log_a b$ 的值．

【解答】解：由题意，－1 和 3 为方程 $x^2-ax-b+5=0$ 的两根，

则有$\begin{cases}-1+3=a\\-1\times 3=5-b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=8\end{cases}$，

故 $\log_a b=\log_2 8=3$．

故选：B．

【点评】本题考查一元二次方程根与系数的关系，考查对数运算，属基础题．

4．（5 分）已知函数$f(x)=\begin{cases}cosx，x<0\\x^2，x\geq 0\end{cases}$，则$f(f(-\frac{\pi}{3}))$的值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．4

【分析】结合诱导公式和特殊角的余弦值，根据分段函数解析式求值即可．

【解答】解：函数$f(x)=\begin{cases}cosx，x<0\\x^2，x\geq 0\end{cases}$，

则$f(f(-\frac{\pi}{3}))=f(cos(-\frac{\pi}{3}))=f(cos\frac{\pi}{3})=f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

故选：C．

【点评】本题主要考查函数值的求解，考查计算能力，属于基础题．

5．（5 分）若正数 a，b 满足$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．2

【分析】根据基本不等式$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$，从而可得出$\sqrt{ab}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$，这样即可求出 ab 的最小值．

【解答】解：∵$a>0$，$b>0$，

∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{ab}}$,

∴$\sqrt{ab}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$，∴$ab\geq 2\sqrt{3}$，当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{3}{b}$时取等号，

∴ab的最小值为$2\sqrt{3}$.

故选：B．

【点评】本题考查了基本不等式在求最小值时的应用，不等式的性质，考查了计算能力，属于基础题．

6．（5 分）函数 f（x）＝3^x+2x-3 的零点所在的区间是（　　）

A．（0，1） B．（1，2） C．（2，3） D．（3，4）

【分析】根据函数的单调性和零点存在定理即可判断．

【解答】解：因为函数 $y=3^x$，$y=2x-3$ 为 R 上的增函数，

所以 $f(x)=3^x+2x-3$ 为 R 上的增函数，

又 $f(0)=1-3=-2<0$，$f(1)=3+2-3=2>0$，

故函数 $f(x)=3^x+2x-3$ 仅有一个零点，其所在的区间是（0，1）．

故选：A．

【点评】本题考查了零点存在定理，考查了指数函数及一次函数的性质，属于基础题．

7．（5 分）已知 tanθ＝2，则 $\frac{sin^3\theta+sin\theta}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=$（　　）

A．$\frac{5}{2}$ B．$\frac{16}{3}$ C．6 D．8

【分析】由已知利用同角三角函数基本关系式化简所求即可求解．

【解答】解：因为 tanθ＝2，

所以 $\frac{sin^3\theta+sin\theta}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=\frac{sin\theta(sin^2\theta+1)}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=\frac{sin\theta(2sin^2\theta+cos^2\theta)}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=\frac{2sin^3\theta+sin\theta cos^2\theta}{cos^3\theta+sin\theta cos^2\theta}=\frac{2tan^3\theta+tan\theta}{1+tan\theta}=\frac{2\times8+2}{1+2}=6$．

故选：C．

【点评】本题主要考查了同角三角函数基本关系式在三角函数化简求值中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题．

8．（5 分）酒驾是严重危害交通安全的违法行为，为了保障交通安全，根据国家有关规定：100mL 血液中酒精含量达到 20～79mg 的驾驶员即为酒后驾车，80mg 及以上认定为醉酒驾车．假设某驾驶员喝了一定量的酒后，其血液中的酒精含量上升到了 0.9mg/mL．如果停止喝酒以后，他血液中酒精含量会以每小时 20%的速度减少，那么他至少经过几个小时才能驾驶？（　　）

（结果取整数，参考数据：$lg2\approx0.30$，$lg3\approx0.48$）

A．4 B．5 C．6 D．7

【分析】设经过 x 个小时才能驾驶，则 $0.9(1-20\%)^x<0.2$，再根据指数函数的性质及对数的运算性质计算可得．

【解答】解：设经过 x 个小时才能驾驶，则 $0.9(1-20\%)^x<0.2$，即 $0.8^x<\frac{0.2}{0.9}=\frac{2}{9}$，

所以 $x>log_{0.8}\frac{2}{9}=\frac{lg\frac{2}{9}}{lg0.8}=\frac{lg2-2lg3}{3lg2-1}\approx\frac{0.30-2\times0.48}{3\times0.30-1}=6.6$，

故他至少经过 7 小时才能驾驶．

故选：D．

【点评】本题主要考查对数的运算，考查计算能力，属于基础题．

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

（多选）9．（6 分）当$\alpha\in\{-1，\frac{1}{2}，3\}$时，幂函数 $y=x^{\alpha}$的图象不可能经过的象限是（　　）

A．第二象限　　B．第三象限

C．第四象限　　D．第二、四象限

【分析】分别写出α取不同值是的解析式，可得图象所过象限，进一步得结论．

【解答】解：$\alpha\in\{-1，\frac{1}{2}，3\}$，

当α＝﹣1 时，$y=x^{-1}$的图象经过第一、三象限，

当$\alpha=\frac{1}{2}$时，$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象经过第一象限，

当α＝3 时，$y=x^3$的图象经过第一、三象限．

则幂函数 $y=x^{\alpha}$的图象不可能经过的象限是第二、四或二、四象限．

故选：ACD．

【点评】本题考查幂函数的图象与性质，是基础题．

（多选）10．（6 分）已知函数$f(x)=sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，若 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $f(x)=0$ 的两个不同的解，且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，则下列说法中正确的有（　　）

A．ω＝2

B．若$x=\frac{\pi}{6}$是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，则$\varphi=\frac{\pi}{6}$

C．若 $f(x)$ 在区间$(0，\frac{\pi}{3})$内无最大值，则$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{6}$

D．若φ≠0，则 $f(x)$ 的图象在$(0，\frac{\pi}{2})$内有且仅有一个对称中心

【分析】根据函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质求出 $f(x)$ 的最小正周期，结合三角函数的周期公式判断出 A 项的正误；正弦曲线的对称性对 B、D 两项作出判断；当$x\in(0，\frac{\pi}{3})$时，求出 $2x+\varphi$的取值范围，结合正弦函数的最值建立关于φ的不等式，结合$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$求出φ的取值范围，可判断出 C 项的正误．

【解答】解：设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，

若 $f(x)=0$ 的两个不同的解 x_1、x_2，满足$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，

则$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 T=π，可得$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，所以 A 正确；

根据 f（x）=sin（2x+φ），

若$x=\frac{\pi}{6}$是 f（x）图象的一条对称轴，则 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，

可得$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，结合$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 B 正确；

当 $0<x<\frac{\pi}{3}$时，$\varphi<2x+\varphi<\frac{2\pi}{3}+\varphi$，

根据 f（x）=sin（2x+φ）在$(0，\frac{\pi}{3})$内无最大值，可得$(\varphi，\frac{2\pi}{3}+\varphi)\subseteq(2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{5\pi}{2})(k\in Z)$，

所以$\begin{cases}\varphi\geq 2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \frac{2\pi}{3}+\varphi\leq 2k\pi+\frac{5\pi}{2}\end{cases}(k\in Z)$，解得$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\varphi\leq\frac{11\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$，

令$A=(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，$B=[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{11\pi}{6}+2k\pi](k\in Z)$，则$A\cap B=(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{6}]$，

所以$-\frac{\pi}{2}<\varphi\leq-\frac{\pi}{6}$，可知 C 不正确；

若φ≠0，即$\varphi\in(-\frac{\pi}{2}，0)\cup(0，\frac{\pi}{2})$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，则φ<2x+φ<π+φ，

当$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$ 时，$\frac{\pi}{2}<\pi+\varphi<\pi$，此时函数 f（x）=sin（2x+φ）上有且只有一个对称中心；

当 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$时，$\pi<\pi+\varphi<\frac{3\pi}{2}$，此时函数 f（x）=sin（2x+φ）上有且只有一个对称中心.

综上所述，当φ≠0 时，函数 f（x）的图象在$(0，\frac{\pi}{2})$内有且仅有一个对称中心，可知 D 正确.

故选：ABD.

【点评】本题主要考查三角函数的周期公式、正弦函数的图象与性质等知识，属于基础题.

（多选）11.（6 分）已知定义域为 **R** 的函数 f（x）满足：f（x+1）=2 - f（x），f（x+2）=2 - f（ - x），则（　　）

A．f（x）是周期为 2 的函数

B．f（x）是偶函数

C．f（2）=1

D．f（2025）=1

【分析】由 f（x+1）=2 - f（x）可得 f（x+2）=2 - f（x+1）=f（x），进而判断 A；根据题设赋值结合周期性即可判断 CD；取特例 f（x）= - sin（πx）+1 即可判断 B.

【解答】解：A 选项，由 f（x+1）=2 - f（x），

因此 f（x+2）=2 - f（x+1）=f（x），

因此函数 f（x）是周期为 2 的函数，因此 A 选项正确；

C 选项，由 $f(x+2)=2-f(-x)$，取 $x=0$，得 $f(2)=2-f(0)$，

而 $f(2)=f(0)$，因此 $f(2)=f(0)=1$，因此 C 选项正确；

D 选项，由 $f(x+1)=2-f(x)$，取 $x=0$，得 $f(1)=2-f(0)=2-1=1$，

因此 $f(2025)=f(1012\times2+1)=f(1)=1$，因此 D 选项正确；

B 选项，取 $f(x)=-\sin(\pi x)+1$，

因此 $f(x+1)=-\sin[\pi(x+1)]+1=\sin(\pi x)+1=2-f(x)$，

$f(x+2)=-\sin[\pi(x+2)]+1=-\sin(\pi x)+1=2-[-\sin(-\pi x)+1]=2-f(-x)$，满足题意，

而函数 $f(x)=-\sin(\pi x)+1$ 不为偶函数，因此 B 选项错误.

故选：ACD.

【点评】本题考查抽象函数的奇偶性与奇偶性，属于中档题.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.（5 分）函数 $f(x)=\sqrt{x}+lg(x-1)$ 的定义域为__（1，+∞）__ .

【分析】根据二次根式的性质以及对数函数的性质，求出函数的定义域即可.

【解答】解：由题意，得 $\begin{cases}x\geq0\\x-1>0\end{cases}$，解得 $x>1$，

故函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$，

故答案为：$(1,+\infty)$.

【点评】本题考查了求函数的定义域问题，考查对数函数以及二次根式的性质，是基础题.

13.（5 分）函数 $f(x)=ax^3+b\sin x+1$，$f(1)=2$，则 $f(-1)=$__0__ .

【分析】由 $f(1)=2$ 推得 $a+b\sin1=1$，将其看成整体，代入 $f(-1)$ 的表达式中，即可求得.

【解答】解：由 $f(x)=ax^3+b\sin x+1$ 可得 $f(1)=a+b\sin1+1=2$，即 $a+b\sin1=1$，

则 $f(-1)=-a-b\sin1+1=-(a+b\sin1)+1=-1+1=0$.

故答案为：0.

【点评】本题主要考查了函数奇偶性在函数求值中的应用，属于基础题.

14.（10 分）对于非空集合 M，定义 $\Phi_M(x)=\begin{cases}0,\ x\notin M\\1,\ x\in M\end{cases}$. 若 A，B 是两个非空集合，且 $A\subseteq B$，则 $\Phi_A(x)$

$[\Phi_A(x)-\Phi_B(x)]=$__0__ ；若 $A=\{x|\cos x\leq-\frac{1}{2}\}$，$B=(a,2a)$，且存在 $x\in\mathbf{R}$，$\Phi_A(x)+\Phi_B(x)$

$=2$，则实数 a 的取值范围是__$(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},+\infty)$__ .

【分析】根据题目中的集合新定义以及三角函数的知识进行求解即可.

【解答】解：因 $A\subseteq B$，若 $x\in A$，则 $x\in B$，故 $\Phi_A(x)=1$ 时 $\Phi_B(x)=1$，

此时$\Phi_A(x)[\Phi_A(x)-\Phi_B(x)]=1\times(1-1)=0$；

若$x\notin A$，则$\Phi_A(x)=0$，

此时$\Phi_A(x)[\Phi_A(x)-\Phi_B(x)]=0\times(0-\Phi_B(x))=0$.

因为集合$A=\{x|cosx\le-\frac{1}{2}\}=\{x|\frac{2}{3}\pi+2k\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi+2k\pi，k\in Z\}$，

因为$\Phi_A(x)+\Phi_B(x)=2$，所以$\Phi_A(x)=\Phi_B(x)=1$，所以$x\in A$，$x\in B$.

因为$B=(a，2a)$，所以要满足题意则有$A\cap B\neq\emptyset$.

所以$\begin{cases}a<\frac{4\pi}{3}\\2a>\frac{2\pi}{3}\end{cases}$或$a>\frac{4}{3}\pi$.

所以a的取值范围是$(\frac{\pi}{3}，\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3}，+\infty)$.

故答案为：0；$(\frac{\pi}{3}，\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3}，+\infty)$.

【点评】本题主要考查集合的新定义运算、三角函数的解区间、集合交集的非空条件，属于中档题.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．已知集合$A=\{x|2^x<4\}$，$B=\{x|(x-m)(x-m-1)<0\}$.

（1）若$m=\frac{3}{2}$，求集合$A\cap B$；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，求实数m的取值范围.

【分析】（1）分别求解指数不等式和一元二次不等式，得到集合A，B，再由交集定义即得；

（2）由条件判断集合B是集合A的真子集，进而得到关于参数m的不等式，求解即得.

【解答】解：（1）由$2^x<4$可得$x<2$，故$A=(-\infty，2)$，

当$m=\frac{3}{2}$时，$(x-m)(x-m-1)<0$，即$(x-\frac{3}{2})(x-\frac{5}{2})<0$，解得$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，即$B=(\frac{3}{2}，\frac{5}{2})$，

所以$A\cap B=(\frac{3}{2}，2)$；

（2）因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，故集合$B\subsetneq A$，

$A=(-\infty，2)$，$B=(m，m+1)$，则$m+1\le 2$，解得$m\le 1$，

故实数m的取值范围为$(-\infty，1]$.

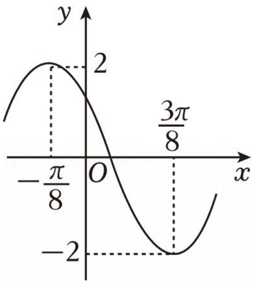
【点评】本题主要考查了指数函数单调性在不等式求解中的应用，还考查了充分必要条件与集合包含关系的应用，属于基础题.

16．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{5\pi}{24}$个单位长度，再将所得图象上所有点的横坐标变为原来的2倍，

纵坐标不变，得到函数 g（x）的图象，求函数 g（x）在区间（0，π）内的值域.



【分析】（1）由图可求 A，T 的值，利用周期公式可求ω，将$(\frac{3\pi}{8}，-2)$代入，由五点法作图可得φ的值，即可得解函数 f（x）解析式；

（2）由题意利用函数 $y=A\sin$（$\omega x+\varphi$）的图象变换可求$g(x)=2sin(x+\frac{\pi}{3})$，进而利用正弦函数的性质即可求解.

【解答】解：（1）由图可知，$A=2$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

所以ω＝2，此时 f（x）＝2sin（$2x+\varphi$），

将$(\frac{3\pi}{8}，-2)$代入，可得 f（$\frac{3\pi}{8}$）＝2sin（$2\times\frac{3\pi}{8}+\varphi$）＝－2，

所以由五点法作图可得 $2\times\frac{3\pi}{8}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，解得$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，

所以$f(x)=2sin(2x+\frac{3\pi}{4})$；

（2）将函数 f（x）的图象向右平移$\frac{5\pi}{24}$个单位长度，横坐标变为原来的 2 倍，得$g(x)=2sin(x+\frac{\pi}{3})$，

令$x+\frac{\pi}{3}\in[2k\pi-\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

则$x\in[2k\pi-\frac{5\pi}{6}，2k\pi+\frac{\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

令$x+\frac{\pi}{3}\in[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

则$x\in[2k\pi+\frac{\pi}{6}，2k\pi+\frac{7\pi}{6}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，函数 g（x）在区间$(0，\frac{\pi}{6}]$内单调递增，在区间$[\frac{\pi}{6}，\pi)$内单调递减，

又$g(\frac{\pi}{6})=2$，$g(0)=\sqrt{3}$，$g(\pi)=-2sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$，

所以函数 g（x）在区间（0，π）内的值域为$(-\sqrt{3}，2]$.

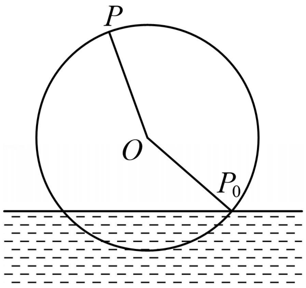
【点评】本题主要考查了函数 $y=A\sin$（$\omega x+\varphi$）的图象变换，由 $y=A\sin$（$\omega x+\varphi$）的部分图象确定其解析式以及正弦函数的性质的应用，考查了函数思想和数形结合思想，属于中档题.

17．一个半径为 $6m$ 的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 $3m$，已知水轮每分钟逆时针转动 4 圈，且当

水轮上的点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计算时间．

（1）将点 P 距离水面的高度 y（单位：m．在水面下，则 y 为负数）表示为时间 x（单位：s）的函数；

（2）在转动的一个周期内，点 P 在水中的时间是多少？



【分析】（1）建立如图所示的平面直角坐标系，设角$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$是以 Ox 为始边，OP_0 为终边的角，根据题意得点 P 的纵坐标为 $6sin(\frac{2\pi}{15}x+\varphi)$，求得$y=6sin(\frac{2\pi}{15}x+\varphi)+3$，再结合 P_0 的位置为初始位置即可求解；

（2）先得到在转动的一个周期内，点 P 在水中转动$\frac{2\pi}{3}$，进而结合周期求解即可．

【解答】解：（1）建立平面直角坐标系，如图所示：

设角φ（$-\frac{\pi}{2}$，0）是以 Ox 为始边，OP_0 为终边的角，易知 OP 在 xs 内所转过的角为$\frac{4\times 2\pi}{60}x=\frac{2\pi}{15}x$，

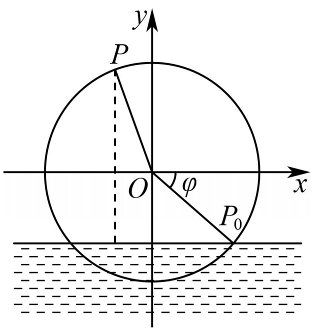
所以点 P 的纵坐标为 6sin（$\frac{2\pi}{15}x+\varphi$），则 $y=6\sin(\frac{2\pi}{15}x+\varphi)+3$，

当 $x=0$ 时，$y=0$，即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

则 $y=6\sin(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{6})+3$，$x\geqslant 0$．

（2）在转动的一个周期 T 内，点 P 在水中转动$\frac{2\pi}{3}$，则 $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{15}}=15$，

所以点 P 在水中的时间是$\frac{T}{3}=5s$．



【点评】本题考查了三角函数模型的应用，是中档题．

18．已知定义在 **R** 上的函数$f(x)=log_2(2^x+1)$．

（1）若不等式 $f(x^2-mx+1)>f(0)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（2）设 $h(x)=x^2-2mx+1$，若对任意的 $x_1\in[0,3]$，存在 $x_2\in[1,3]$，使得 $f(x_1)\geqslant h(x_2)$，求实数 m 的取值范围.

【分析】（1）利用复合函数的单调性判断函数 $f(x)$ 的单调性，由 $f(x^2-mx+1)>f(0)$ 得出 $x^2-mx+1>0$，可得出 $\Delta<0$，即可解得实数 m 的取值范围；

（2）分析可知 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最小值不小于 $h(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值，求出函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最小值，对实数 m 的取值进行分类讨论，求出函数 $h(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值，结合题意可得出关于实数 m 的不等式，综合求出实数 m 的取值范围.

【解答】解：（1）因为 $f(x)=log_2(2^x+1)$，令 $u=2^x+1$，$y=\log_2u$，

对任意的 $x\in\mathbf{R}$，则 $u=2^x+1>1$，

而 $y=\log_2u$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$u=2^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

又 $f(x^2-mx+1)>f(0)$ 恒成立，

即 $x^2-mx+1>0$ 恒成立，

所以 $\Delta=m^2-4<0$，解得：$-2<m<2$，

所以实数 m 的取值范围是 $(-2,2)$；

（2）题意即 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最小值不小于 $h(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值，

因为 $f(x)=log_2(2^x+1)$ 在 $[0,3]$ 上单调递增，

所以当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)_{min}=f(0)=1$，

又 $h(x)=x^2-2mx+1$ 的对称轴为直线 $x=m$，$x\in[1,3]$，

当 $m\geqslant3$ 时，$h(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，

则 $h(x)_{min}=h(3)=10-6m\leqslant1$，

解得：$m\geq\frac{3}{2}$，所以 $m\geqslant3$；

当 $1<m<3$ 时，$h(x)$ 在 $[1,m)$ 上单调递减，在 $[m,3]$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{min}=h(m)=1-m^2\leq1$，

解得 $m\in\mathbf{R}$，所以 $1<m<3$；

当 $m\leqslant1$ 时，$h(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{min}=h(1)=2-2m\leqslant1$，

解得 $m\geq\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\leq m\leq1$，

综上，实数 m 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

【点评】本题考查了函数的单调性的应用，函数与不等式的综合应用，属于中档题.

19．对于函数 $f(x)$，若 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的点，则称 $f(x)$ 为定义域上的“伪奇函数”.

（1）试判断$f(x)=\begin{cases}x-1,& x\geq 0\\ -x-1,& x<0\end{cases}$是否为“伪奇函数”，简要说明理由；

（2）若 $f(x)=\log_2(\sin x-m)+1$ 是定义在区间$[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$上的“伪奇函数”，求实数 m 的取值范围；

（3）试讨论 $f(x)=4^x-m\cdot 2^{x+2}+4m^2-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否为“伪奇函数”？并说明理由.

【分析】（1）由“伪奇函数”的定义判断即可；

（2）由题意可得$m^2-sin^2x=\frac{1}{4}$在$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$有解，进而结合正弦函数的性质即可求解；

（3）由题意可知 $4^x+4^{-x}-4m(2^x+2^{-x})+8m^2-6=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，令 $t=2^x+2^{-x}$，$t\geqslant 2$，可得 $t^2-4mt+8m^2-8=0$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 有解，进而分情况讨论求解即可.

【解答】解：（1）因为 $f(-1)=0=f(1)$，所以 $f(-1)+f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 是“伪奇函数”；

（2）令 $f(x)+f(-x)=0$，

所以 $\log_2(\sin x-m)+1+\log_2(-\sin x-m)+1=0$，

即$m^2-sin^2x=\frac{1}{4}$在$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$有解，

而$sinx\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，所以$sin^2x\in[0,\frac{3}{4}]$，所以$m^2=sin^2x+\frac{1}{4}\in[\frac{1}{4},1]$，

所以$m\in[-1,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]$，

又因为 $\sin x-m>0$ 在$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$时恒成立，

所以$m<(sinx)_{min}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以实数 m 的取值范围为$[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$；

（3）当 $f(x)=4^x-m\cdot 2^{x+2}+4m^2-3$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的“伪奇函数”时，

所以 $f(-x)+f(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，可化为 $4^x+4^{-x}-4m(2^x+2^{-x})+8m^2-6=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，

令 $t=2^x+2^{-x}$，所以$t\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

而 $4^x+4^{-x}=t^2-2$，

所以 $t^2-4mt+8m^2-8=0$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 有解，即可保证 $f(x)$ 为“伪奇函数”，

令 $F(t)=t^2-4mt+8m^2-8$，$t\in[2,+\infty)$，

①当 $F(2)=8m^2-8m-4\leqslant 0$，即$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leq m\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}$时，

$t^2-4mt+8m^2-8=0$ 在$[2, +\infty)$一定有解，满足题意；

②当 $F(2)=8m^2-8m-4>0$，即$m<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$或$m>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$时，

$t^2-4mt+8m^2-8=0$ 在$[2, +\infty)$有解等价于$\begin{cases}\Delta=16m^2-4(8m^2-8)\geq 0\\ 2m>2\end{cases}$，

解得$\frac{1+\sqrt{3}}{2}<m\leq\sqrt{2}$.

综上所述，当$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leq m\leq\sqrt{2}$时，$f(x)$为定义域 **R** 上的“伪奇函数”，否则不是.

【点评】本题考查函数与方程的综合运用，属于中档题