专题 06　费马点最值问题

模型例题

问题的提出：

如果点 P 是锐角 ΔABC 内一动点，如何确定一个位置，使点 P 到 ΔABC 的三顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 的值为最小？

问题的转化：

把 ΔAPC 绕点 A 逆时针旋转 60 度得到$\triangle AP'C'$，连接 PP'，这样就把确定 $PA+PB+PC$ 的最小值的问题转化成确定 $BP+PP'+P'C'$ 的最小值的问题了，请你利用图 1 证明：$PA+PB+PC=BP+PP'+P'C'$．

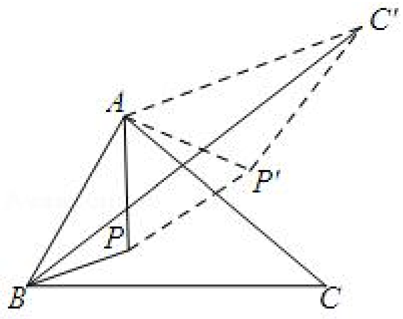


图1

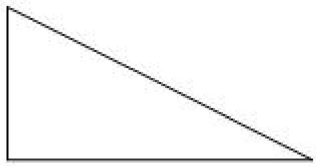


图2

问题的解决：

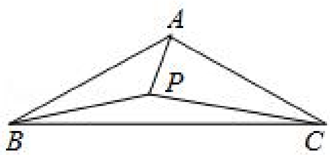
当点 P 到锐角 ΔABC 的三顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 的值为最小时，请你用一定的数量关系刻画此时的点 P 的位置_____．

问题的延伸：

如图 2 是有一个锐角为30°的直角三角形，如果斜边为 2，点 P 是这个三角形内一动点，请你利用以上方法，求点 P 到这个三角形各顶点的距离之和的最小值．

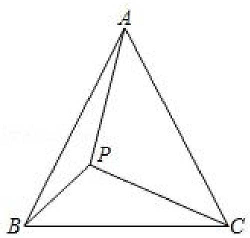
例题：

1．如图，ΔABC 中，$AB=AC$，点 P 为 ΔABC 内一点，$\angle APB=\angle BAC=120^{\circ}$．若 $AP+BP=4$，则 PC 的最小值为(　　)



A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

2．如图，已知边长为$\sqrt{2}$的等边ΔABC，平面内存在点 P，则 $PA+\sqrt{3}PB+PC$ 的取值范围为 ____．



3．问题探究

将几何图形按照某种法则或规则变换成另一种几何图形的过程叫做几何变换．旋转变换是几何变换的一种基本模型．经过旋转，往往能使图形的几何性质明白显现．题设和结论中的元素由分散变为集中，相互之间的关系清楚明了，从而将求解问题灵活转化．

问题提出：如图 1，ΔABC 是边长为 1 的等边三角形，P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA、PB、PC，求 $PA+PB+PC$ 的最小值．

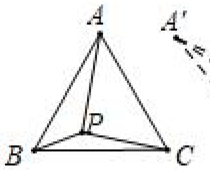


图1

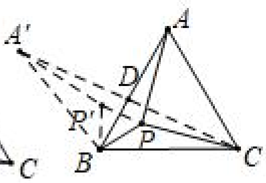


图2

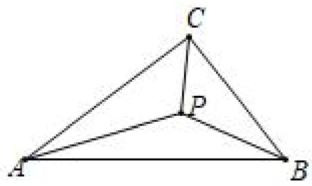


图3

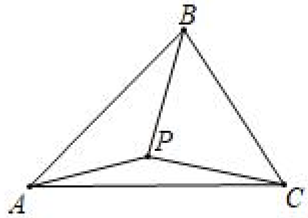


图4

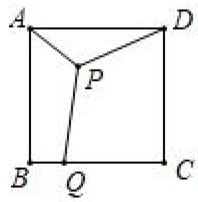


图5

方法分析：通过转化，把由三角形内一点发出的三条线段（星型线）转化为两定点之间的折线（化星为折），再利用“两点之间线段最短”求最小值（化折为直）．

问题解决：如图 2，将 ΔBPA 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 至△ $BP'A'$，连接 PP'、$A'C$，记 $A'C$ 与 AB 交于点 D，易知 $BA'=BA=BC=1$，$\angle A'BC=\angle A'BA+\angle ABC=120°$．由 $BP'=BP$，$\angle P'BP=60°$，可知△ $P'BP$ 为正三角形，有 $PB=P'P$．

故 $PA+PB+PC=P'A+P'P+PC\geq A'C=\sqrt{3}$．因此，当 A'、P'、P、C 共线时，$PA+PB+PC$ 有最小值是 $\sqrt{3}$．

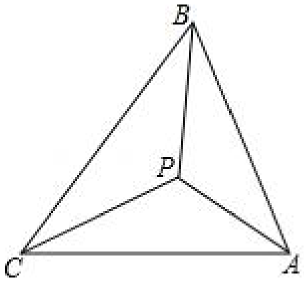
学以致用：（1）如图 3，在 ΔABC 中，$\angle BAC=30°$，$AB=4$，$CA=3$，P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA、PB、PC，则 $PA+PB+PC$ 的最小值是____．

（2）如图 4，在 ΔABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=2\sqrt{2},CA=3$，P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA、PB、PC，求 $\sqrt{2}PA+PB+PC$ 的最小值．

（3）如图 5，P 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内一点，Q 为边 BC 上一点，连接 PA、PD、PQ，求 $PA+PD+PQ$ 的最小值。

专题六 练习

1．法国数学家费马提出：在ΔABC内存在一点P，使它到三角形顶点的距离之和最小．人们称这个点为费马点，此时$PA+PB+PC$的值为费马距离．经研究发现：在锐角ΔABC中，费马点P满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^{\circ}$，如图，点$P$为锐角$\Delta ABC$的费马点，且$PA=3$，$PC=4$，$\angle ABC=60^{\circ}$，则费马距离为____．



2．在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点P为ΔABC内一点．

（1）如图1，连接PB，PC，将ΔBCP沿射线CA方向平移，得到ΔDAE，点B，C，P的对应点分别为点D，A，E，连接CE．如果$BP\perp CE$，$BP=3$，$AB=6$，则$CE=$____．

（2）如图2，连接PA，PB，PC，当$AC=BC=8$时，求$PA+PB+PC$的最小值．

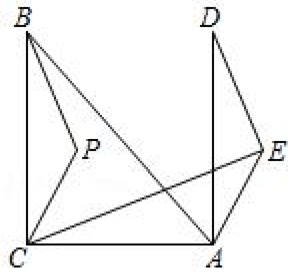


图1

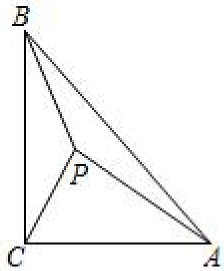
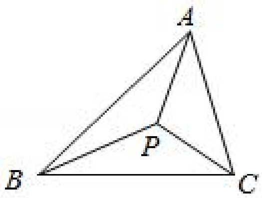
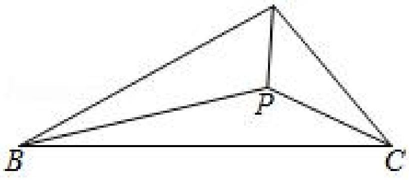


图2

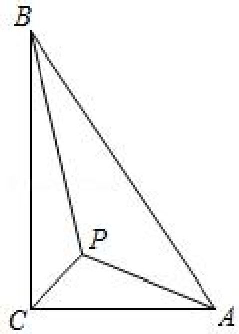
3．如图，在ΔABC中，$AB=3$，$AC=2$，$\angle BAC=60^{\circ}$，P为ΔABC内一点，则$PA+PB+PC$的最小值为____．



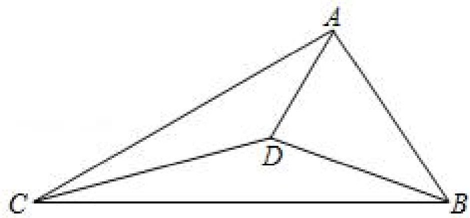
4．如图，ΔABC中，$\angle ABC=30^{\circ}$，$AB=5$，$BC=6$，P是ΔABC内部的任意一点，连接PA、PB、PC，则$PA+PB+PC$的最小值为____．



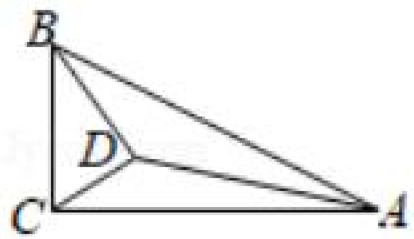
5．如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^\circ$，点P为ΔABC内一点，连接PA、PB、PC，当$AC=3$，$AB=6$时，则$PA+PB+PC$的最小值是____．



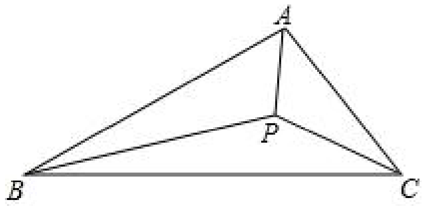
6．已知，如图在ΔABC中，$\angle ACB=30^\circ$，$BC=5$，$AC=6$，在ΔABC内部有一点D，连接DA、DB、DC，则$DA+DB+\sqrt{2}DC$的最小值是____．



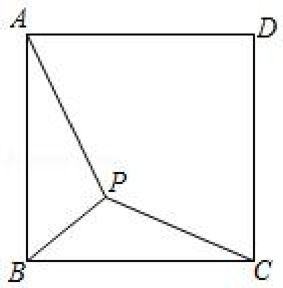
7．如图，在ΔABC中，$\angle BAC=30^\circ$，$AC=4\sqrt{3}$，$AB=8$，点D在ΔABC内，连接DA、DB、DC，则$DC+DB+\sqrt{3}AD$的最小值是____．



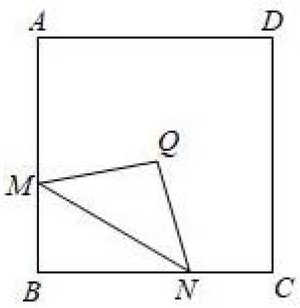
8．如图，ΔABC 中，$\angle ABC=30^{\circ}$，$AB=4$，$BC=5$，P 是 ΔABC 内部的任意一点，连接 PA，PB，PC，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为____．



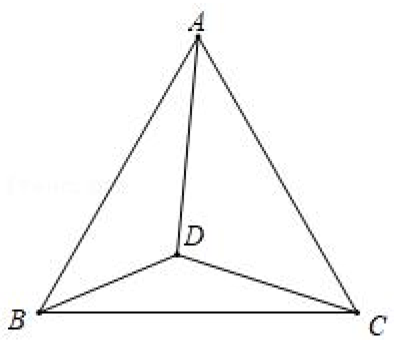
9．如图，P 为正方形 $ABCD$ 内的动点，若 $AB=2$，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为____．



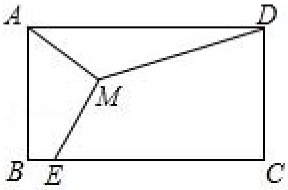
10．如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M，N 分别为 AB、BC 上的动点，且始终保持 $BM=CN$．连接 MN，以 MN 为斜边在矩形内作等腰 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{MNQ}$，若在正方形内还存在一点 P，则点 P 到点 A、点 D、点 Q 的距离之和的最小值为____．



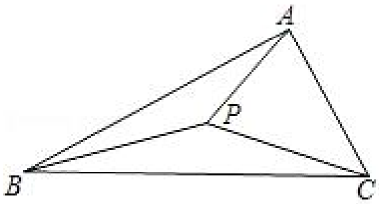
11．如图，点 D 为等边三角形 ABC 内一点，且 $\angle BDC=120^{\circ}$，则 $\dfrac{AD}{BD}$ 的最小值为____．



12．如图，已知矩形 $ABCD$ ， $AB=4$ ， $BC=6$ ，点 M 为矩形内一点，点 E 为 BC 边上任意一点，则 $MA+MD+ME$ 的最小值为____.



13．如图，在直角三角形 ΔABC 内部有一动点 P ，$\angle BAC=90^{\circ}$，连接 PA ，PB ，PC ，若 $AC=6$，$AB=8$，求 $PA+PB+PC$ 的最小值____.



14．若点 P 为 ΔABC 所在平面上一点，且 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^{\circ}$，则点 P 叫做 ΔABC 的费马点．当三角形的最大角小于 120° 时，可以证明费马点就是"到三角形的三个顶点的距离之和最小的点"．即 $PA+PB+PC$ 最小．

（1）如图 1，向 ΔABC 外作等边三角形 ΔABD ， ΔAEC ．连接 BE ， DC 相交于点 P ，连接 AP ．

①证明：点 P 就是 ΔABC 费马点；

②证明： $PA+PB+PC=BE=DC$ ；

（2）如图 2，在 ΔMNG 中，$MN=4\sqrt{2}$ ，$\angle M=75^{\circ}$ ，$MG=3$ ．点 O 是 ΔMNG 内一点，则点 O 到 ΔMNG 三个顶点的距离和的最小值是 ____.

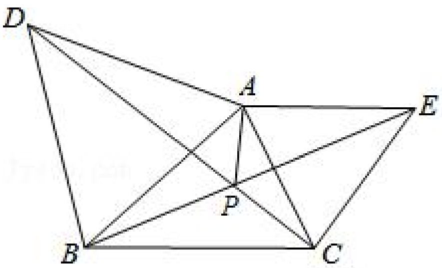


图1

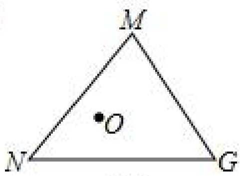


图2

15．问题提出

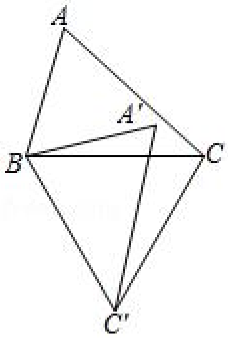
（1）如图①，在ΔABC中，$BC=2$，将ΔABC绕点B顺时针旋转60°得到△$A'B'C'$，则$CC'=$____；

问题探究

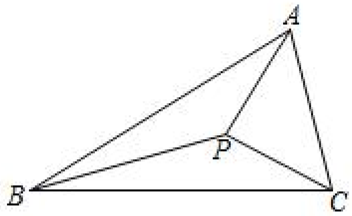
（2）如图②，在ΔABC中，$AB=BC=3$，$\angle ABC=30^{\circ}$，点P为ΔABC内一点，连接PA、PB、PC，求$PA+PB+PC$的最小值，并说明理由；

问题解决

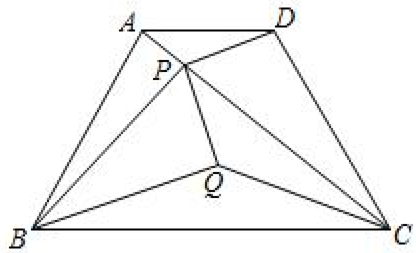
（3）如图③，在四边形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=6$，$AD=4$，$\angle ABC=\angle BCD=60^{\circ}$．在四边形$ABCD$内部有一点，满足$\angle APD=120^{\circ}$，连接$BP$、$CP$，点$Q$为$\Delta BPC$内的任意一点，是否存在一点$P$和一点$Q$，使得$PQ+BQ+CQ$有最小值？若存在，请求出这个最小值；若不存在，请说明理由．



图①



图②



图③

16．如图 1，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，点 P 为 ΔABC 内一点．

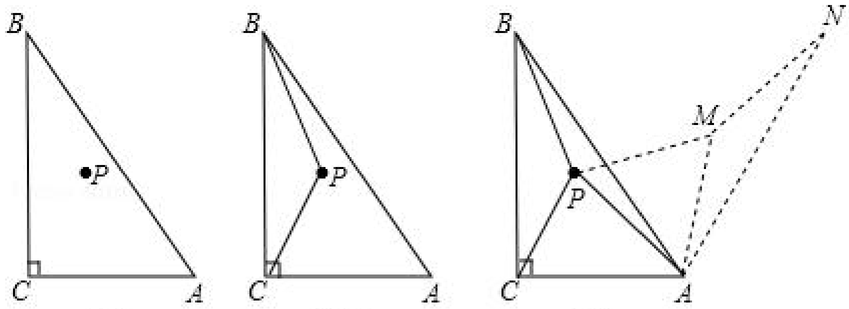


图1　　图2　　图3

（1）连接 PB，PC，将 ΔBCP 沿射线 CA 方向平移，得到 ΔDAE，点 B，C，P 的对应点分别为点 D，A，E，连接 CE．

①依题意，请在图 2 中补全图形；

②如果 $BP\perp CE$，$BP=3$，$AB=6$，求 CE 的长．

（2）如图 3，连接 PA，PB，PC，求 $PA+PB+PC$ 的最小值．

小慧的作法是：以点 A 为旋转中心，将 ΔABP 顺时针旋转 60° 得到 ΔAMN，那么就将 $PA+PB+PC$ 的值转化为 $CP+PM+MN$ 的值，连接 CN，当点 P 落在 CN 上时，此题可解．

请你参考小慧的思路，在图 3 中证明 $PA+PB+PC=CP+PM+MN$．

并直接写出当 $AC=BC=4$ 时，$PA+PB+PC$ 的最小值．

17．（1）阅读材料：如图（1），四边形 $ABCD$ 是正方形，ΔABE 是等边三角形，M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到 BN，连接 EN、AM、CM，

①求证：$\Delta AMB \cong \Delta ENB$；

②当 M 点在何处时，$AM+CM$ 的值最小；③当 M 点在何处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，并说明理由；

（2）根据阅读材料所提供的数学思想和方法，完成下面的题目：如图（2），A、B、C、D 四个城市恰好为一个正方形的四个顶点，要建立一个公路系统，使每两个城市之间都有公路相通，并使整个公路系统的总长为最短，应当如何修建？请画出你的设计图．

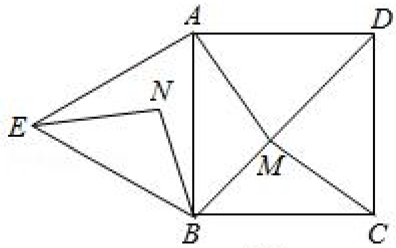


图1

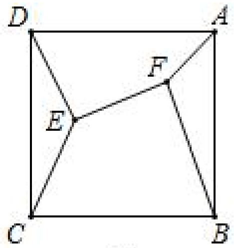


图2

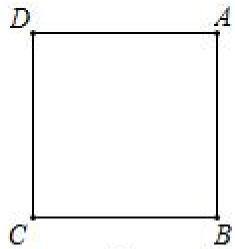


图3

18．已知，在 ΔABC 中，$\angle ACB=30°$

（1）如图 1，当 $AB=AC=2$，求 BC 的值；

（2）如图 2，当 $AB=AC$，点 P 是 ΔABC 内一点，且 $PA=2$，$PB=\sqrt{21}$，$PC=3$，求 $\angle APC$ 的度数；

（3）如图 3，当 $AC=4$，$AB=\sqrt{7}(CB>CA)$，点 P 是 ΔABC 内一动点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为____．

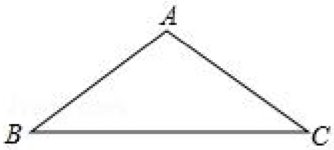


图1

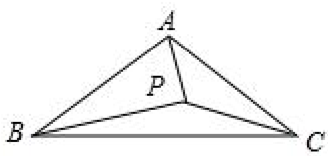


图2

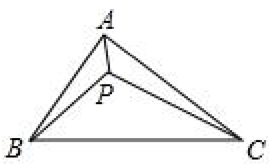


图3

19．阅读下列材料：

小华遇到这样一个问题，如图 1，ΔABC 中，$\angle ACB=30°$，$BC=6$，$AC=5$，在 ΔABC 内部有一点 P，连接 PA、PB、PC，求 $PA+PB+PC$ 的最小值．

小华是这样思考的：要解决这个问题，首先应想办法将这三条端点重合于一点的线段分离，然后再将它们连接成一条折线，并让折线的两个端点为定点，这样依据“两点之间，线段最短”，就可以求出这三条线段和的最小值了．他先后尝试了翻折、旋转、平移的方法，发现通过旋转可以解决这个问题．他的做法是，如图 2，将 ΔAPC 绕点 C 顺时针旋转 $60°$，得到 ΔEDC，连接 PD、BE，则 BE 的长即为所求．

（1）请你写出图 2 中，$PA+PB+PC$ 的最小值为____；

（2）参考小华的思考问题的方法，解决下列问题：

①如图 3，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，在菱形 $ABCD$ 内部有一点 P，请在图 3 中画出并指明长度等于 $PA+PB+PC$ 最小值的线段（保留画图痕迹，画出一条即可）；

②若①中菱形 $ABCD$ 的边长为 4，请直接写出当 $PA+PB+PC$ 值最小时 PB 的长．

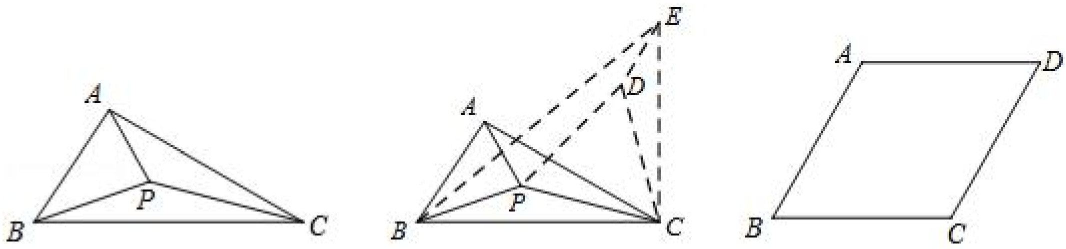


图 1　　图 2　　图 3

专题 06　费马点最值问题

模型例题

问题的提出：

如果点 P 是锐角 ΔABC 内一动点，如何确定一个位置，使点 P 到 ΔABC 的三顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 的值为最小？

问题的转化：

把 ΔAPC 绕点 A 逆时针旋转 60 度得到△ $AP'C'$，连接 PP'，这样就把确定 $PA+PB+PC$ 的最小值的问题转化成确定 $BP+PP'+P'C'$ 的最小值的问题了，请你利用图 1 证明：$PA+PB+PC=BP+PP'+P'C'$.

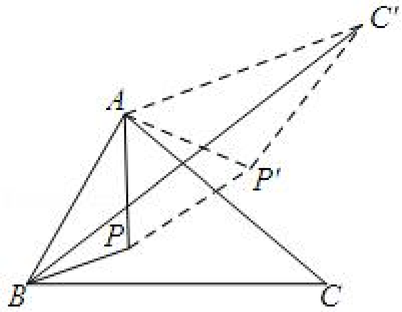


图1

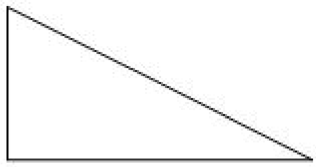


图2

问题的解决：

当点 P 到锐角 ΔABC 的三顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 的值为最小时，请你用一定的数量关系刻画此时的点 P 的位置__ $\angle APB=\angle APC=120^{\circ}$ __.

问题的延伸：

如图 2 是有一个锐角为 30° 的直角三角形，如果斜边为 2，点 P 是这个三角形内一动点，请你利用以上方法，求点 P 到这个三角形各顶点的距离之和的最小值.

【解答】解：问题的转化：

如图 1，由旋转得：$\angle PAP'=60^{\circ}$，$PA=P'A$，

$\therefore \Delta APP'$ 是等边三角形，

$\therefore PP'=PA$，

$\because PC=P'C$，

$\therefore PA+PB+PC=BP+PP'+P'C'$.

问题的解决：

满足：$\angle APB=\angle APC=120^{\circ}$ 时，$PA+PB+PC$ 的值为最小；

理由是：如图 2，把 ΔAPC 绕点 A 逆时针旋转 60 度得到△ $AP'C'$，连接 PP'，

由“问题的转化”可知：当 B、P、P'、C' 在同一直线上时，$PA+PB+PC$ 的值为最小，

$\because \angle APB = 120°$，$\angle APP' = 60°$，

$\therefore \angle APB + \angle APP' = 180°$，

$\therefore B$、P、P' 在同一直线上，

由旋转得：$\angle AP'C' = \angle APC = 120°$，

$\because \angle AP'P = 60°$，

$\therefore \angle AP'C' + \angle AP'P = 180°$，

$\therefore P$、P'、C' 在同一直线上，

$\therefore B$、P、P'、C' 在同一直线上，

$\therefore$ 此时 $PA + PB + PC$ 的值为最小，

故答案为：$\angle APB = \angle APC = 120°$；

问题的延伸：

如图 3，$\mathrm{Rt}\Delta ACB$ 中，$\because AB = 2$，$\angle ABC = 30°$，

$\therefore AC = 1$，$BC = \sqrt{3}$，

把 ΔBPC 绕点 B 逆时针旋转 60 度得到△ $BP'C'$，连接 PP'，

当 A、P、P'、C' 在同一直线上时，$PA + PB + PC$ 的值为最小，

由旋转得：$BP = BP'$，$\angle PBP' = 60°$，$PC = P'C'$，$BC = BC'$，

$\therefore \Delta BPP'$ 是等边三角形，

$\therefore PP' = PB$，

$\because \angle ABC = \angle APB + \angle CBP = \angle APB + \angle C'BP' = 30°$，

$\therefore \angle ABC' = 90°$，

由勾股定理得：$AC' = \sqrt{AB^2 + C'B^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$，

$\therefore PA + PB + PC = PA + PP' + P'C' = AC' = \sqrt{7}$，

则点 P 到这个三角形各顶点的距离之和的最小值为 $\sqrt{7}$．

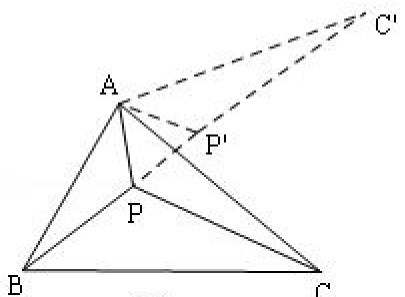
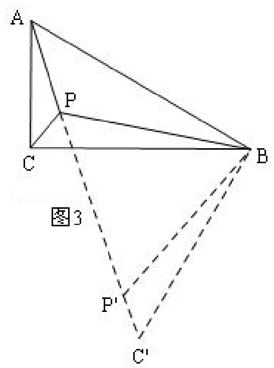
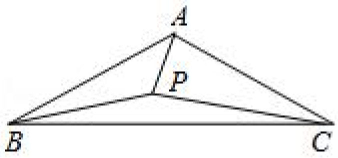


图2



例题：

1．如图，ΔABC 中，$AB=AC$，点 P 为 ΔABC 内一点，$\angle APB=\angle BAC=120^{\circ}$．若 $AP+BP=4$，则 PC 的最小值为(　　)



A．2　　　　B．$2\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{5}$　　　　D．3

【解答】解：把 ΔAPB 绕点 A 逆时针旋转 120° 得到△ $AP'C$，作 $AD\perp PP'$ 于 D，

则 $AP=AP'$，$\angle PAP'=120^{\circ}$，$\angle AP'C=\angle APB=120^{\circ}$，

$\therefore \angle AP'P=30^{\circ}$，

$\therefore PP'=\sqrt{3}AP$，$\angle PP'C=90^{\circ}$，

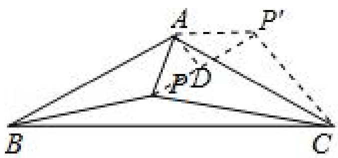
$\because AP+BP=4$，

$\therefore BP=4-PA$，

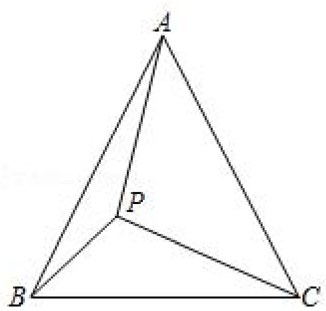
在 Rt △ $PP'C$ 中，$PC=\sqrt{P'P^{2}+P'C^{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}PA)^{2}+(4-PA)^{2}}=\sqrt{4(PA-1)^{2}+12}$，

则 PC 的最小值为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

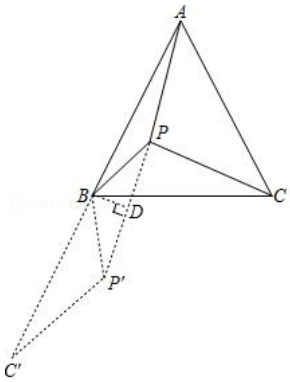
故选：B．



2．如图，已知边长为 $\sqrt{2}$ 的等边 ΔABC，平面内存在点 P，则 $PA+\sqrt{3}PB+PC$ 的取值范围为 __大于 $2\sqrt{2}$__．



【解答】解：如图，将 ΔBPC 绕点 B 顺时针旋转 120°，得△ $BP'C'$，连接 PP'，过点 B 作 $BD\perp PP'$ 于点 D，



$\because \Delta ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = 60^{\circ}$， $AB = BC = BC' = \sqrt{2}$，

$\therefore AC' = AB + BC' = 2\sqrt{2}$，

$\because \angle CBC' = \angle PBP' = 120^{\circ}$，

$\therefore \angle ABC' = \angle ABC + \angle CBC' = 180^{\circ}$，

$\therefore$ 点 A， B， C' 在同一条直线上，

$\because BP = BP'$， $\angle PBP' = 120^{\circ}$， $BD \perp PP'$，

$\therefore \angle BPP' = \angle BP'P = 30^{\circ}$，

$\therefore PD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}PB$，

$\therefore PP' = 2PD = \sqrt{3}PB$，

$\therefore PA + PP' + PC = PA + \sqrt{3}PB + PC > AC'$，

因为等边三角形的边长为 $\sqrt{2}$，

$\therefore PA + \sqrt{3}PB + PC$ 的取值范围为大于等于 $2\sqrt{2}$，

故答案为：大于等于 $2\sqrt{2}$．

3．问题探究

将几何图形按照某种法则或规则变换成另一种几何图形的过程叫做几何变换．旋转变换是几何变换的一种基本模型．经过旋转，往往能使图形的几何性质明白显现．题设和结论中的元素由分散变为集中，相互之间的关系清楚明了，从而将求解问题灵活转化．

问题提出：如图 1， ΔABC 是边长为 1 的等边三角形， P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA 、 PB 、 PC ，求 $PA + PB + PC$ 的最小值．

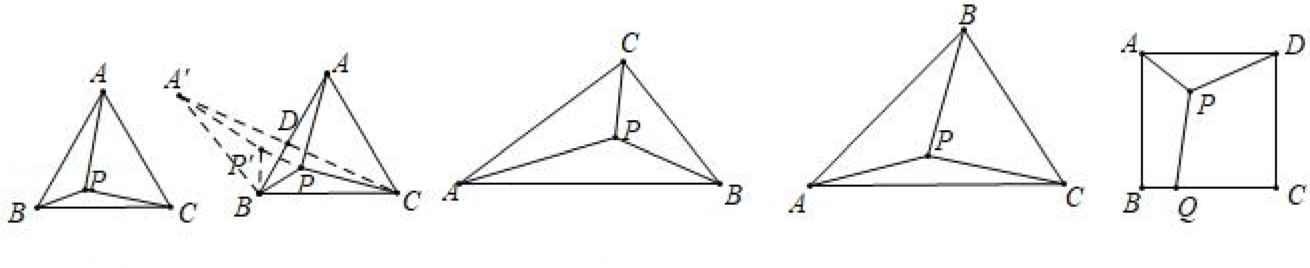


图1　　图2　　图3　　图4　　图5

方法分析：通过转化，把由三角形内一点发出的三条线段（星型线）转化为两定点之间的折线（化星为折），再利用“两点之间线段最短”求最小值（化折为直）.

问题解决：如图 2，将 ΔBPA 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 至△ $BP'A'$，连接 PP'、$A'C$，记 $A'C$ 与 AB 交于点 D，易知 $BA'=BA=BC=1$，$\angle A'BC=\angle A'BA+\angle ABC=120°$．由 $BP'=BP$，$\angle P'BP=60°$，可知△ $P'BP$ 为正三角形，有 $PB=P'P$．

故 $PA+PB+PC=P'A+P'P+PC\geq A'C=\sqrt{3}$．因此，当 A'、P'、P、C 共线时，$PA+PB+PC$ 有最小值是 $\sqrt{3}$．

学以致用：（1）如图 3，在 ΔABC 中，$\angle BAC=30°$，$AB=4$，$CA=3$，P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA、PB、PC，则 $PA+PB+PC$ 的最小值是＿5＿．

（2）如图 4，在 ΔABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=2\sqrt{2},CA=3$，P 为 ΔABC 内部一点，连接 PA、PB、PC，求 $\sqrt{2}PA+PB+PC$ 的最小值．

（3）如图 5，P 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内一点，Q 为边 BC 上一点，连接 PA、PD、PQ，求 $PA+PD+PQ$ 的最小值．

【解答】解：（1）如图 3 中，

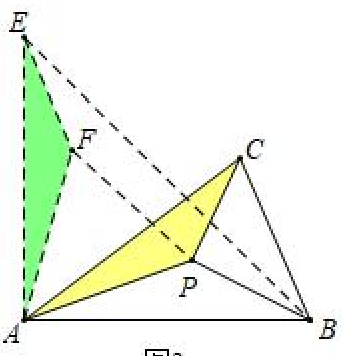


图3

将 ΔAPC 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 ΔAFE，易知 ΔAFP 是等边三角形，$\angle EAB=90°$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{EAB}$ 中，$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=5$，

$\because PA+PB+PC=EF+FP+PB\geq BE$，

$\therefore PA+PB+PC\geqslant 5$，

$\therefore PA+PB+PC$ 的最小值为 5．

故答案为 5．

（2）如图 4 中，

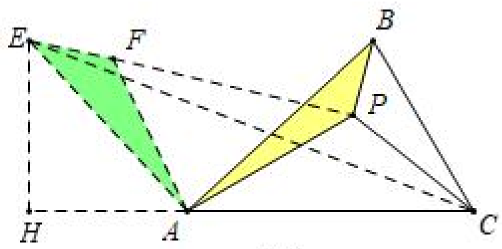


图4

将 ΔAPB 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 ΔAFE，易知 ΔAFP 是等腰直角三角形，$\angle EAB=135°$，作 $EH\perp BA$ 交 BA 的延长线于 H．

在 RtΔEAH 中，$\because \angle H=90°$，$\angle EAH=45°$，$AE=AB=2\sqrt{2}$

$\therefore EH=AH=2$，

在 RtΔEHC 中，$EC=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

$\because \sqrt{2}PA+PB+PC=FP+EF+PC\geqslant CE$，

$\therefore \sqrt{2}PA+PB+PC\geqslant\sqrt{29}$，

$\therefore \sqrt{2}PA+PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{29}$．

（3）如图 5 中，将 ΔAPD 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 ΔAFE，则易知 ΔAFP 是等边三角形，

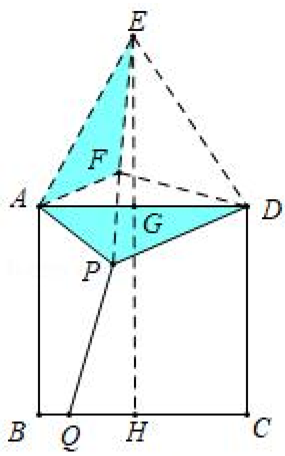


图5

作 $EH \perp BC$ 于 H，交 AD 于 G．

$\because PA + PD + PQ = EF + FP + PQ \geq EH$，

易知 $EG = AE \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$，$GH = AB = 2$，

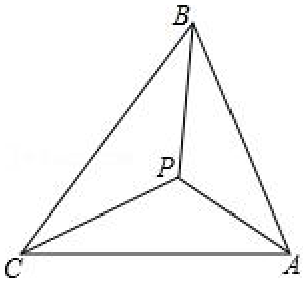
$\therefore EH = 2 + \sqrt{3}$，

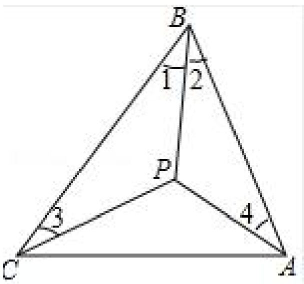
$\therefore PA + PD + PQ \geq \sqrt{3} + 2$，

$\therefore PA + PD + PQ$ 的最小值为 $\sqrt{3} + 2$．

专题六 练习

1．法国数学家费马提出：在 ΔABC 内存在一点 P，使它到三角形顶点的距离之和最小．人们称这个点为费马点，此时 $PA + PB + PC$ 的值为费马距离．经研究发现：在锐角 ΔABC 中，费马点 P 满足 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$，如图，点 P 为锐角 ΔABC 的费马点，且 $PA = 3$，$PC = 4$，$\angle ABC = 60°$，则费马距离为__ $7 + 2\sqrt{3}$ __．





【解答】解：

如图：

$\because \angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120$，$\angle ABC = 60°$，

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 60°$，$\angle 1 + \angle 2 = 60°$，$\angle 2 + \angle 4 = 60°$，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 3$，

$\therefore \Delta BPC \backsim \Delta APB$

$\therefore \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{PB}{PA}$，

即 $PB^2 = 12$

$\therefore PB=2\sqrt{3}$.

$\therefore PA+PB+PC=7+2\sqrt{3}$

故答案为：$7+2\sqrt{3}$.

2．在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点P为ΔABC内一点．

（1）如图1，连接PB，PC，将ΔBCP沿射线CA方向平移，得到ΔDAE，点B，C，P的对应点分别为点D，A，E，连接CE．如果$BP\perp CE$，$BP=3$，$AB=6$，则$CE=$__$3\sqrt{3}$__．

（2）如图2，连接PA，PB，PC，当$AC=BC=8$时，求$PA+PB+PC$的最小值．

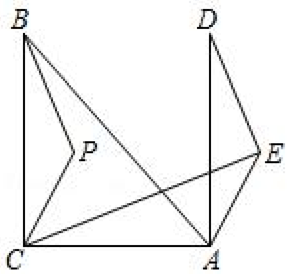


图1

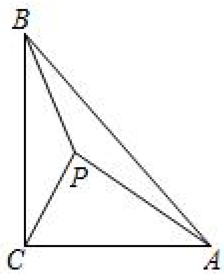


图2

【解答】解：（1）如图1，连接BD、CD，

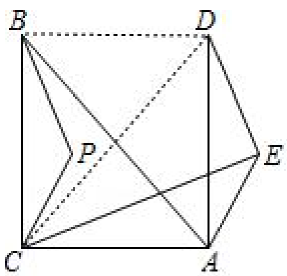


图1

$\because \Delta BCP$沿射线CA方向平移，得到ΔDAE，

$\therefore BC//AD$且$BC=AD$，

$\because \angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore$四边形$BCAD$是矩形，

$\therefore CD=AB=6$，

$\because BP=3$，

$\therefore DE=BP=3$，

$\because BP\perp CE$，$BP//DE$，

$\therefore DE\perp CE$，

$\therefore$ 在 RtΔDCE 中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$；

故答案为：$3\sqrt{3}$．

（2）如图 2 所示，以点 A 为旋转中心，将 ΔABP 顺时针旋转 $60°$ 得到 ΔAMN，连接 BN．

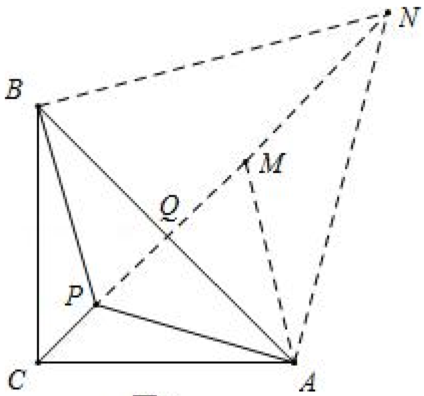


图2

由旋转可得，$\Delta AMN\cong\Delta ABP$，

$\therefore MN=BP$，$PA=AM$，$\angle PAM=60°=\angle BAN$，$AB=AN$，

$\therefore \Delta PAM$、ΔABN 都是等边三角形，

$\therefore PA=PM$，

$\therefore PA+PB+PC=CP+PM+MN$，

当 $AC=BC=8$ 时，$AB=8\sqrt{2}$，

当 C、P、M、N 四点共线时，

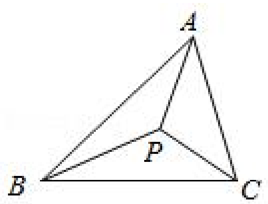
由 $CA=CB$，$NA=NB$ 可得 CN 垂直平分 AB，

$\therefore AQ=\dfrac{1}{2}AB=4\sqrt{2}=CQ$，$NQ=\sqrt{3}AQ=4\sqrt{6}$，

$\therefore$ 此时 $CN=CP+PM+MN=PA+PB+PC=4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$．

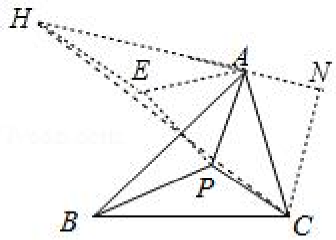
即 $PA+PB+PC$ 的最小值为 $4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$．

3．如图，在 ΔABC 中，$AB=3$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，P 为 ΔABC 内一点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为__$\sqrt{19}$__．



【解答】解：如图，将 ΔABP 绕着点 A 逆时针旋转 $60°$，得到 ΔAEH，连接 EP，CH，过点 C 作 $CN\perp AH$，

交 HA 的延长线于 N，



$\therefore \Delta ABP \cong \Delta AHE$，

$\therefore \angle BAP = \angle HAE$， $AE = AP$， $AH = AB = 3$， $\angle BAH = 60^\circ$，

$\therefore \angle HAB = \angle EAP = 60^\circ$，

$\therefore \Delta AEP$ 是等边三角形，

$\therefore AE = AP = EP$，

$\therefore AP + BP + PC = PC + EP + EH$，

$\therefore$ 当点 H，点 E，点 P，点 C 共线时，$PA + PB + PC$ 有最小值 HC，

$\because \angle CAN = 180^\circ - \angle BAH - \angle BAC = 60^\circ$， $CN \perp AN$，

$\therefore \angle ACN = 30^\circ$，

$\therefore AN = \dfrac{1}{2}AC = 1$， $CN = \sqrt{3}AN = \sqrt{3}$，

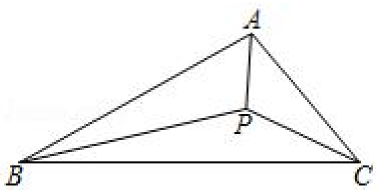
$\therefore HN = AH + AN = 4$，

$\therefore HC = \sqrt{HN^2 + CN^2} = \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$，

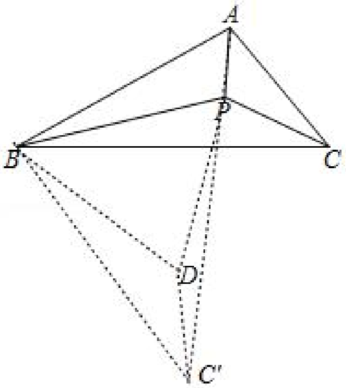
$\therefore PA + PB + PC$ 的最小值为 $\sqrt{19}$，

故答案为 $\sqrt{19}$．

4．如图，ΔABC 中，$\angle ABC = 30^\circ$，$AB = 5$，$BC = 6$，P 是 ΔABC 内部的任意一点，连接 PA、PB、PC，则 $PA + PB + PC$ 的最小值为__$\sqrt{61}$__．



【解答】解：如图，以 BP 为边作等边三角形 BPD，将 ΔBPC 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到 $\Delta BDC'$，连接 AC'，



$\because \Delta BPD$ 是等边三角形，

$\therefore BP = BD = DP$， $\angle PBD = 60°$，

$\because$ 将 ΔBPC 绕点 B 顺时针旋转 $60°$，

$\therefore PC = C'D$， $\angle PBC = \angle DBC'$， $BC = BC' = 6$，

$\therefore \angle ABC' = \angle ABP + \angle PBD + \angle DBC' = \angle PBD + \angle ABC + \angle PBC = 60° + 30° = 90°$，

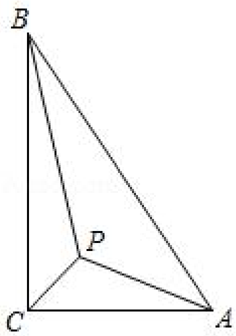
$\because PA + PB + PC = PA + PD + DC'$，

$\therefore$ 当点 A， 点 P， 点 D， 点 C' 共线时， $PA + PB + PC$ 有最小值为 PC'，

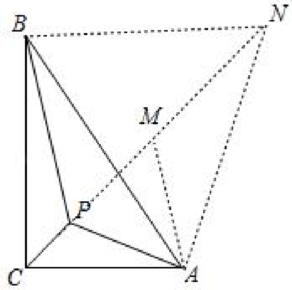
$\therefore PC' = \sqrt{AB^2 + C'B^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$，

故答案为： $\sqrt{61}$．

5．如图，在 ΔABC 中， $\angle ACB = 90°$，点 P 为 ΔABC 内一点，连接 PA 、 PB 、 PC，当 $AC = 3$， $AB = 6$ 时，则 $PA + PB + PC$ 的最小值是__ $3\sqrt{7}$ __．



【解答】解：如图所示，以点 A 为旋转中心，将 ΔABP 顺时针旋转 $60°$ 得到 ΔANM， 连接 BN．



由旋转可得，$\Delta AMN \cong \Delta APB$，

$\therefore MN = BP$， $PA = AM$， $\angle PAM = 60^\circ = \angle BAN$， $AB = AN$，

$\therefore \Delta PAM$ 、 ΔABN 都是等边三角形，

$\therefore PA = PM$，

$\therefore PA + PB + PC = CP + PM + MN$，

当 $AC = 3$， $AB = 6$ 时， $BC = 3\sqrt{3}$，

$\therefore \sin\angle ABC = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle ABC = 30^\circ$，

$\because \angle ABN = 60^\circ$，

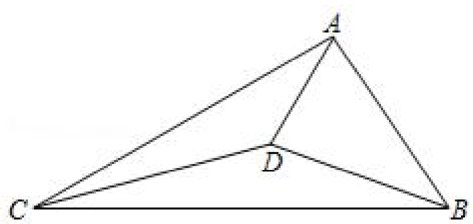
$\therefore \angle CBN = 90^\circ$

当 C 、 P 、 M 、 N 四点共线时， $PA + PB + PC$ 的值最小，

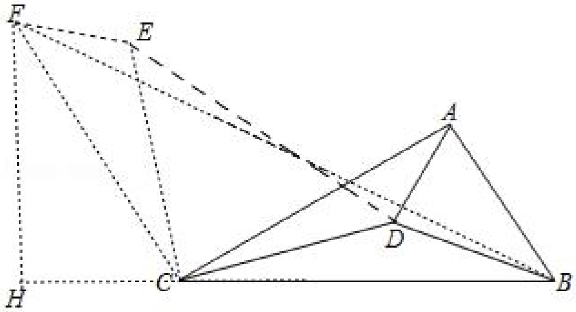
最小值 $= CN = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{27 + 36} = 3\sqrt{7}$，

故答案为： $3\sqrt{7}$．

6．已知，如图在 ΔABC 中，$\angle ACB = 30^\circ$，$BC = 5$，$AC = 6$，在 ΔABC 内部有一点 D，连接 DA 、DB 、DC，则 $DA + DB + \sqrt{2}DC$ 的最小值是__ $\sqrt{91}$ __．



【解答】解：如图，过点 C 作 $CE \perp CD$，且 $CE = CD$，连接 DE，将 ΔADC 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 ΔFEC，连接 FB， 过点 F 作 $FH \perp BC$， 交 BC 的延长线于 H，



$\because CE \perp CD$，$CE = CD$，

$\therefore DE = \sqrt{2}CD$，

$\because$将ΔADC绕点C逆时针旋转$90°$得到ΔFEC，

$\therefore EF = AD$，$\angle ACF = 90°$，$CF = AC = 6$，

$\therefore DA + DB + \sqrt{2}DC = DB + EF + DE$，

$\therefore$当点F，点E，点D，点B共线时，$DA + DB + \sqrt{2}DC$有最小值为FB，

$\because \angle FCH = 180° - \angle ACF - \angle ACB = 60°$，

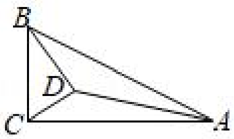
$\therefore \angle CFH = 30°$，

$\therefore CH = \frac{1}{2}CF = 3$，$FH = \sqrt{3}CH = 3\sqrt{3}$，

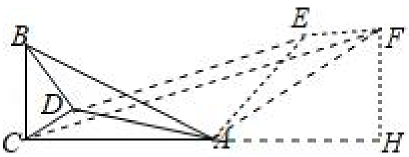
$\therefore BF = \sqrt{FH^2 + BH^2} = \sqrt{27 + 64} = \sqrt{91}$，

故答案为：$\sqrt{91}$．

7．如图，在ΔABC中，$\angle BAC = 30°$，$AC = 4\sqrt{3}$，$AB = 8$，点D在ΔABC内，连接DA、DB、DC，则$DC + DB + \sqrt{3}AD$的最小值是__$4\sqrt{13}$__．



【解答】解：如图，将ΔADB绕点A顺时针旋转$120°$得到ΔAEF，连接DE，CF，过点F作$FH \perp CA$交CA的延长线于H．



$\because AD = AE$，$\angle DAE = 120°$，$BD = EF$，

$\therefore DE = \sqrt{3}AD$，

$\therefore DC+DB+DA=DC+DE+EF$，

$\because CD+DE+EF\geq CF$，

在 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AB=8$，$\angle BAC=30^{\circ}$，

$\therefore AB=AB\cdot\cos 30^{\circ}=4\sqrt{3}$，

在 RtΔAFH 中，$\angle H=90^{\circ}$，$AF=AB=8$，$\angle FAH=30^{\circ}$，

$\therefore FH=\dfrac{1}{2}AF=4$，$AH=\sqrt{3}FH=4\sqrt{3}$，

$\therefore CH=AC+AH=8\sqrt{3}$，

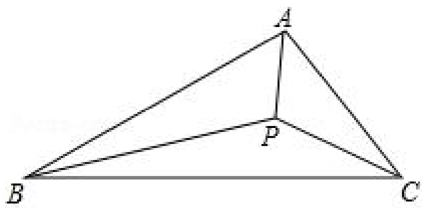
$\therefore CF=\sqrt{CH^{2}+FH^{2}}=\sqrt{(8\sqrt{3})^{2}+4^{2}}=4\sqrt{13}$，

$\therefore CD+DB+\sqrt{3}AD\geq 4\sqrt{13}$，

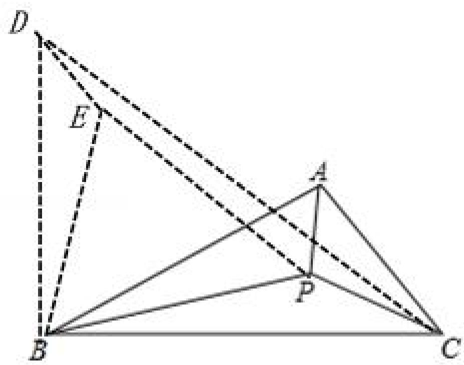
$\therefore CF$ 的最小值为 $4\sqrt{13}$．

故答案为：$4\sqrt{13}$．

8．如图，ΔABC 中，$\angle ABC=30^{\circ}$，$AB=4$，$BC=5$，P 是 ΔABC 内部的任意一点，连接 PA，PB，PC，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为__$\sqrt{41}$__．



【解答】解：如图，将 ΔABP 绕着点 B 逆时针旋转 60°，得到 ΔDBE，连接 EP，CD，



$\therefore \Delta ABP\cong\Delta DBE$

$\therefore \angle ABP=\angle DBE$，$BD=AB=4$，$\angle PBE=60^{\circ}$，$BE=PE$，$AP=DE$，

$\therefore \Delta BPE$ 是等边三角形

$\therefore EP=BP$

$\therefore AP+BP+PC=PC+EP+DE$

$\therefore$ 当点 D，点 E，点 P，点 C 共线时，$PA+PB+PC$ 有最小值 CD

$\because \angle ABC=30^{\circ}=\angle ABP+\angle PBC$

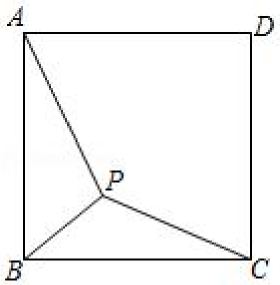
$\therefore \angle DBE+\angle PBC=30^{\circ}$

$\therefore \angle DBC=90^{\circ}$

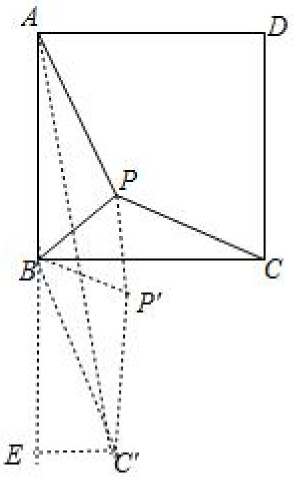
$\therefore CD=\sqrt{BD^{2}+BC^{2}}=\sqrt{41}$，

故答案为：$\sqrt{41}$．

9．如图，P 为正方形 $ABCD$ 内的动点，若 $AB=2$，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为__$\sqrt{2}+\sqrt{6}$__．



【解答】解：将 ΔBPC 绕点 B 顺时针旋转 60°，得到△ $BP'C'$，



$\therefore BP=BP'$，$\angle PBP'=60^{\circ}$，$\Delta BPC\cong\triangle BP'C'$，

$\therefore \Delta BPP'$ 是等边三角形，$PC=P'C'$，$\angle PBC=\angle P'BC'$，$BC=BC'=2$，

$\therefore BP=PP'$，

$\therefore PA+PB+PC=AP+PP'+P'C'$，

$\therefore$ 当 AP，PP'，$P'C'$ 在一条直线上，$PA+PB+PC$ 有最小值，最小值是 AC' 的长，

$\because \angle ABP+\angle PBP'+\angle P'BC'=60^{\circ}+\angle ABP+\angle PBC=150^{\circ}$，

$\therefore \angle EBC=30^{\circ}$，

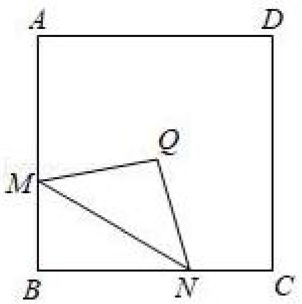
$\therefore EC'=1$， $BE=\sqrt{3}EC'=\sqrt{3}$，

$\therefore AE=2+\sqrt{3}$，

$\therefore AF=\sqrt{AE^2+C'E^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

故答案为： $\sqrt{2}+\sqrt{6}$．

10．如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M ， N 分别为 AB 、BC 上的动点，且始终保持 $BM=CN$.连接 MN ，以 MN 为斜边在矩形内作等腰 RtΔMNQ，若在正方形内还存在一点 P，则点 P 到点 A 、点 D 、点 Q 的距离之和的最小值为__ $3+3\sqrt{3}$ __.



【解答】解：设 $BM=x$， 则 $BN=6-x$，

$\because MN^2=BM^2+BN^2$，

$\therefore MN^2=x^2+(6-x)^2=2(x-3)^2+18$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时， MN 最小，

此时 Q 点离 AD 最近，

$\because BM=BN=3$，

$\therefore Q$ 点是 AC 和 BD 的交点，

$\therefore AQ=DQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD=3\sqrt{2}$，

过点 Q 作 $QM'\perp AD$ 于点 M' ，在 ΔADQ 内部过 A 、 D 分别作 $\angle M'DP=\angle M'AP=30^\circ$ ，则 $\angle APD=\angle APQ=\angle DPQ=120^\circ$，点 P 就是费马点，此时 $PA+PD+PQ$ 最小，

在等腰 RtΔAQD 中， $AQ=DQ=3\sqrt{2}$， $QM'\perp AD$，

$\therefore AM=QM'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AQ=3$，

故 $\cos 30^\circ=\dfrac{AM'}{PA}$，

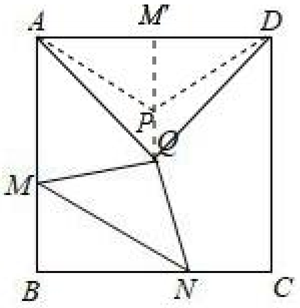
解得： $PA=2\sqrt{3}$，则 $PM'=\sqrt{3}$，

故 $QP=3-\sqrt{3}$，同法可得 $PD=2\sqrt{3}$，

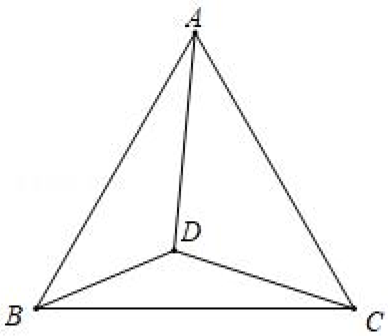
则 $PA+PD+PQ=2\times 2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=3+3\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 P 到点 A 、点 D 、点 Q 的距离之和的最小值为 $3+3\sqrt{3}$，

故答案为 $3+3\sqrt{3}$．



11．如图，点 D 为等边三角形 ABC 内一点，且 $\angle BDC=120^{\circ}$，则 $\dfrac{AD}{BD}$ 的最小值为__ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ __．



【解答】解：如图，将 ΔBCD 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 ΔACE，连接 DE，过点 A 作 $AH\perp DE$ 于 H．

$\because CD=CE$，$\angle DCE=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta DCE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle EDC=\angle DEC=60^{\circ}$，

$\because \angle BDC=\angle AEC=120^{\circ}$，

$\therefore \angle AED=60^{\circ}$，

$\because BD=AE$，

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AD}{AE}$，

$\because AH\perp DE$，

$\therefore AD$开AH，

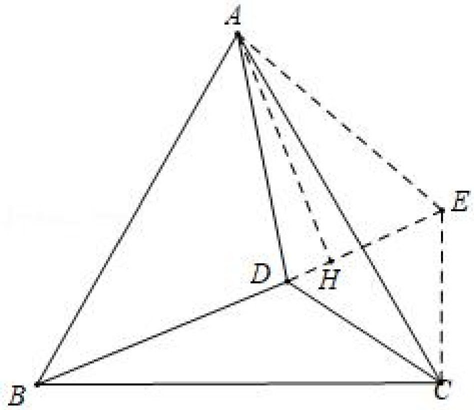
$\therefore \dfrac{AD}{BD}$开$\dfrac{AH}{AE}$，

$\because \angle AHE=90^{\circ}$，$\angle AEB=60^{\circ}$，

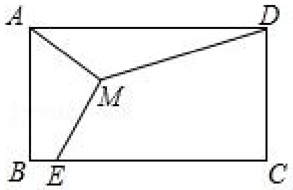
$\therefore \frac{AH}{AE}=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \frac{AD}{BD}$开$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \frac{AD}{BD}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



12．如图，已知矩形 $ABCD$ ， $AB=4$ ， $BC=6$ ，点 M 为矩形内一点，点 E 为 BC 边上任意一点，则 $MA+MD+ME$ 的最小值为__ $4+3\sqrt{3}$ __.



【解答】解：将 ΔAMD 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到△ $AM'D'$ ，

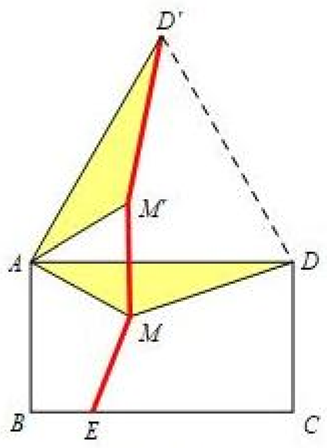


图1

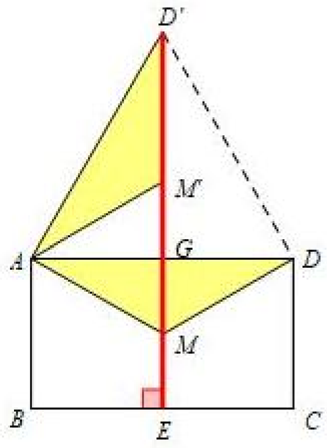


图2

由性质的性质可知： $MD=M'D'$ ， $\Delta ADD'$ 和 $\Delta AMM'$ 均为等边三角形，

$\therefore AM=MM'$ ，

$\therefore MA+MD+ME=D'M+MM'+ME$ ，

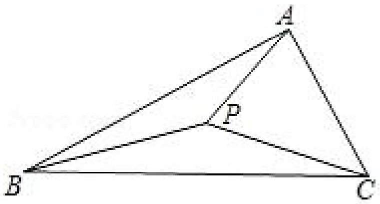
$\therefore D'M$ 、 MM' 、 ME 共线时最短，

由于点 E 也为动点，

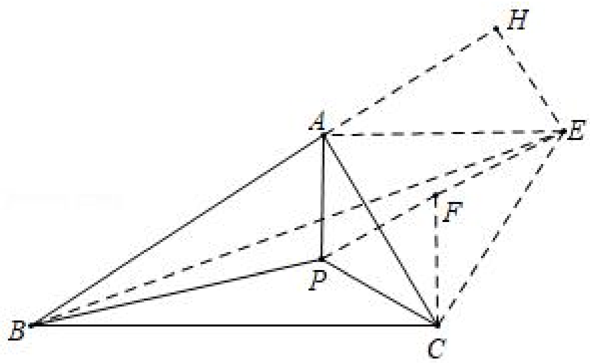
$\therefore$ 当 $D'E \perp BC$ 时最短，此时易求得 $D'E = D'G + GE = 4 + 3\sqrt{3}$，

$\therefore MA + MD + ME$ 的最小值为 $4 + 3\sqrt{3}$．

13．如图，在直角三角形 ΔABC 内部有一动点 P，$\angle BAC = 90^\circ$，连接 PA，PB，PC，若 $AC = 6$，$AB = 8$，求 $PA + PB + PC$ 的最小值__$2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$__．



【解答】解：如图，将 ΔACP 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 ΔECF，连接 PF，BE，作 $EH \perp BA$ 交 BA 的延长线于 H．



由旋转的旋转可知：$PA = EF$，ΔPCF，ΔACE 是等边三角形，

$\therefore PF = PC$，

$\therefore PA + PB + PC = EF + FP + PB$，

$\because EF + FP + PB \geqslant BE$，

$\therefore$ 当 B，P，F，E 共线时，$PA + PB + PC$ 的值最小，

$\because \angle BAC = 90^\circ$，$\angle CAE = 60^\circ$，

$\therefore \angle HAE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$，

$\because EH \perp AH$，$AE = AC = 6$，

$\therefore EH = \dfrac{1}{2}AE = 3$．$AH = \sqrt{3}EH = 3\sqrt{3}$，

$\therefore BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{(8+3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$，

$\therefore PA + PB + PC$ 的最小值为 $2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$．

故答案为 $2\sqrt{25+12\sqrt{3}}$．

14．若点 P 为 ΔABC 所在平面上一点，且 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$，则点 P 叫做 ΔABC 的费马点．当三角形的最大角小于 120° 时，可以证明费马点就是“到三角形的三个顶点的距离之和最小的点”．即 $PA+PB+PC$ 最小．

（1）如图 1，向 ΔABC 外作等边三角形 ΔABD，ΔAEC．连接 BE，DC 相交于点 P，连接 AP．

①证明：点 P 就是 ΔABC 费马点；

②证明：$PA+PB+PC=BE=DC$；

（2）如图 2，在 ΔMNG 中，$MN=4\sqrt{2}$，$\angle M=75^\circ$，$MG=3$．点 O 是 ΔMNG 内一点，则点 O 到 ΔMNG 三个顶点的距离和的最小值是 __$\sqrt{65}$__．

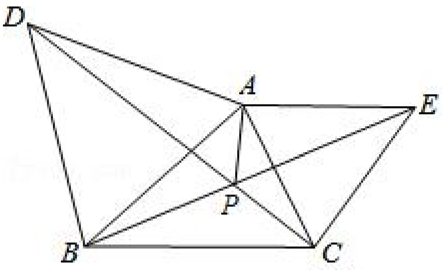


图1

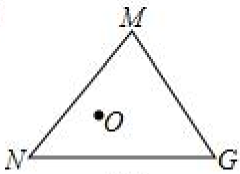


图2

【解答】（1）证明：①如图$1-1$中，作 $AM\perp CD$ 于 M，$AN\perp BE$ 于 N 设 AB 交 CD 于 O．

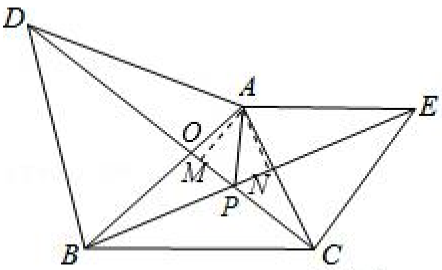


图1-1

$\because \Delta ADB$，ΔACE 都是等边三角形，

$\therefore AD=AB$，$AC=AE$，$\angle DAB=\angle CAE=60^\circ$，

$\therefore \angle DAC=\angle BAE$，

$\therefore \Delta ADC\cong\Delta ABE(SAS)$，

$\therefore CD=BE$，$S_{\Delta DAC}=S_{\Delta ABE}$，$\angle ADC=\angle ABE$，

$\because AM\perp CD$，$AN\perp BE$，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot CD\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot AN$，

$\therefore AM=AN$，

$\therefore \angle APM=\angle APN$，

$\because \angle AOD=\angle POB$，

$\therefore \angle OPB=\angle DAO=60^\circ$，

$\therefore \angle APN=\angle APM=60^\circ$，

$\therefore \angle APC=\angle BPC=\angle APC=120^\circ$，

$\therefore$ 点 P 是就是 ΔABC 费马点．

②在线段 PD 上取一点 T，使得 $PT=PA$，连接 AT．

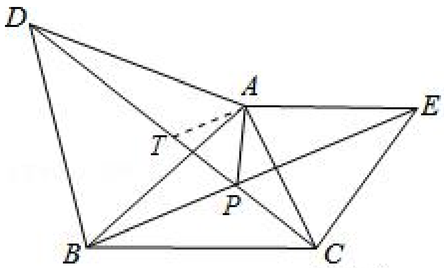


图1-2

$\because \angle APT=60^\circ$， $PT=PA$，

$\therefore \Delta APT$ 是等边三角形，

$\therefore \angle PAT=60^\circ$， $AT=AP$，

$\because \angle DAB=\angle TAP=60^\circ$，

$\therefore \angle DAT=\angle BAP$，$\because AD=AB$，

$\therefore \Delta DAT\cong\Delta BAP(SAS)$，

$\therefore PB=DT$，

$\therefore PD=DT+PT=PA+PB$，

$\therefore PA+PB+PC=PD+PC=CD=BE$．

（2）解：如图 2：以 MG 为边作等边三角形 ΔMGD，以 OM 为边作等边 ΔOME．连接 ND，作 $DF\perp NM$，交 NM 的延长线于 F．

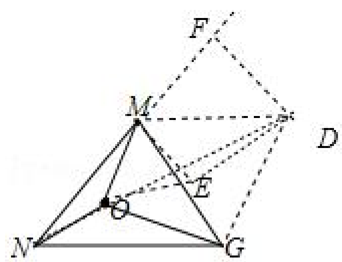


图2

$\because \Delta MGD$ 和 ΔOME 是等边三角形

$\therefore OE = OM = ME$， $\angle DMG = \angle OME = 60^\circ$， $MG = MD$，

$\therefore \angle GMO = \angle DME$

在 ΔGMO 和 ΔDME 中，

$$\begin{cases} OM = ME \\ \angle GMO = \angle DME \\ MG = MD \end{cases}，$$

$\therefore \Delta GMO \cong \Delta DME(SAS)$，

$\therefore OG = DE$

$\therefore NO + GO + MO = DE + OE + NO$

$\therefore$ 当 D 、 E 、 O 、 N 四点共线时， $NO + GO + MO$ 值最小，

$\because \angle NMG = 75^\circ$， $\angle GMD = 60^\circ$，

$\therefore \angle NMD = 135^\circ$，

$\therefore \angle DMF = 45^\circ$，

$\because MG = 3$

$\therefore MF = DF = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore NF = MN + MF = 4\sqrt{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = \dfrac{11\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore ND = \sqrt{NF^2 + DF^2} = \sqrt{(\dfrac{11\sqrt{2}}{2})^2 + (\dfrac{3\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{65}$，

$\therefore MO + NO + GO$ 最小值为 $\sqrt{65}$，

故答案为 $\sqrt{65}$，

15．问题提出

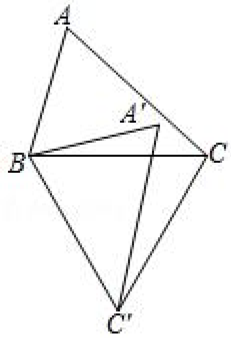
（1）如图①，在 ΔABC 中， $BC = 2$，将 ΔABC 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到△ $A'B'C'$，则 $CC' =$ __2__；

问题探究

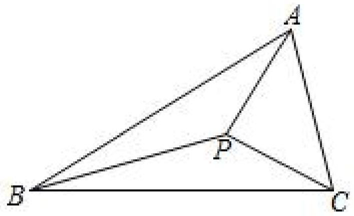
（2）如图②，在 ΔABC 中， $AB = BC = 3$， $\angle ABC = 30^\circ$，点 P 为 ΔABC 内一点，连接 PA 、 PB 、 PC，求 $PA + PB + PC$ 的最小值，并说明理由；

问题解决

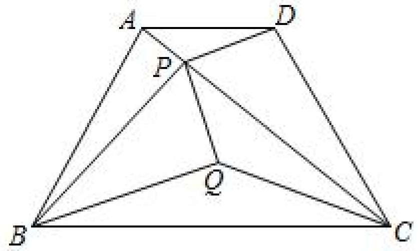
（3）如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $AD // BC$， $AB = 6$， $AD = 4$， $\angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$．在四边形 $ABCD$ 内部有一点，满足 $\angle APD = 120^\circ$，连接 BP 、CP，点 Q 为 ΔBPC 内的任意一点，是否存在一点 P 和一点 Q，使得 $PQ + BQ + CQ$ 有最小值？若存在，请求出这个最小值；若不存在，请说明理由．



图①

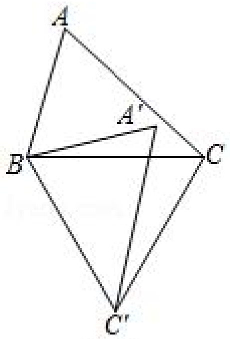


图②



图③

【解答】解：（1）如图①，



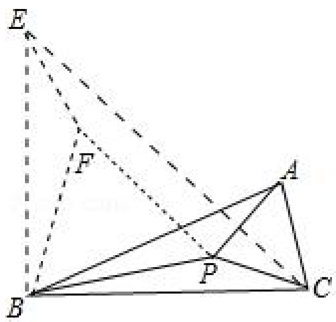
图①

由旋转的性质可知：$\Delta BCC'$ 是等边三角形，

$\therefore CC'=BC=2$，

故答案为 2．

（2）如图②，将 ΔABP 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 ΔBFE，连接 PF， EC．



图②

由旋转的性质可知：ΔPBF 是等边三角形，

$\therefore PB=PF$，

$\because PA=EF$，

$\therefore PA+PB+PC=PC+PF+EF$，

$\because PC+PF+EF\geqslant EC$，

$\therefore$ 当 P， F 在直线 EC 上时， $PA+PB+PC$ 的值最小，

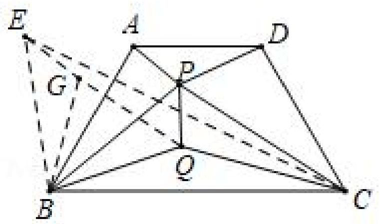
易证 $BC=BE=BA=3$， $\angle CBE=90°$，

$\because EB\perp BC$，

$\therefore EC=\sqrt{2}BC=3\sqrt{2}$，

$\therefore PA+PB+PC$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$．

（3）（3）如图③ -1 中，将 ΔPBQ 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到 ΔEBG，则 $PQ=EG$， ΔBQG 是等边三角形，



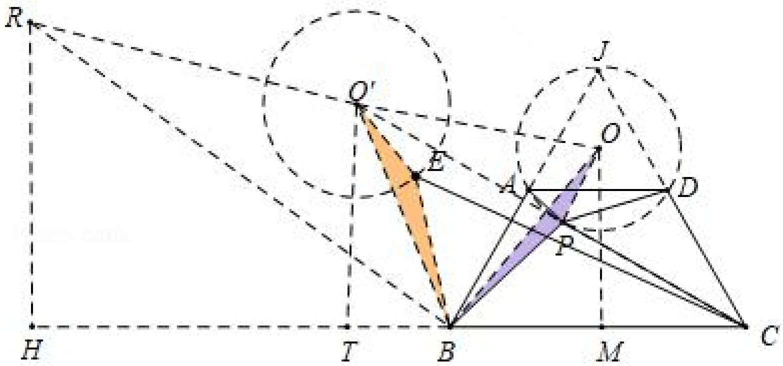
图③-1

$\therefore BQ=QG$， $PQ=EG$，

$\therefore PQ+BQ+CQ=EG+GQ+QC\geqslant EC$，

$\therefore EC$ 的值最小时， $QP+QB+QC$ 的值最小，

如图③ -2 中，延长 BA 交 CD 的延长线于 J，作 ΔADJ 的外接圆 $\odot O$，将线段 BO， BP 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到线段 BO'， BE，连接 EO'， OB， OP．



图③-2

易证 $\Delta BEO'\cong\Delta BPO(SAS)$，

$\therefore EO'=OP$，

$\because\angle APD+\angle AJD=180°$，

$\therefore A$， P， D， J 四点共圆，

$\therefore OP=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore EO'=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$点 E 的运动轨迹是以 O' 为圆心，$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆，$\therefore$当点 E 在线段 CO' 上时，EC 的值最小，最小值 $=CO'-EO'$，

连接 OO'，延长 OO' 到 R，使得 $O'R=OO'$，连接 BR，则 $\angle OBR=90^{\circ}$，作 $RH\perp CB$ 交 CB 的延长线于 H，$O'T\perp CH$ 于 T，$OM\perp BC$ 于 M．

在 $Rt\Delta OBM$ 中，$BM=5$，$OM=\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore OB=\sqrt{OM^{2}+BM^{2}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BR=\sqrt{3}OB=14$，

由 $\Delta BHR\backsim\Delta OMB$，

$\therefore \dfrac{RH}{BM}=\dfrac{BR}{OB}$，

$\therefore RH=5\sqrt{3}$，

$\because HR//O'T//OM$，$OO'=RO'$，

$\therefore TM=TH$，

$\therefore O'T=\dfrac{RH+OM}{2}=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BT=\sqrt{O'B^{2}-O'T^{2}}=3$，

$\therefore CO'=\sqrt{C'T^{2}+O'T^{2}}=\dfrac{26\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore CO'-EO'=\dfrac{26\sqrt{3}}{3}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$．

$\therefore QP+QB+QC$ 的最小值为 $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$．

16．如图 1，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点 P 为 ΔABC 内一点．

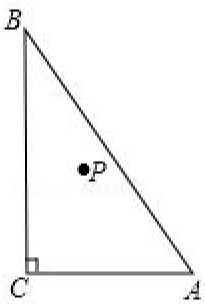


图1

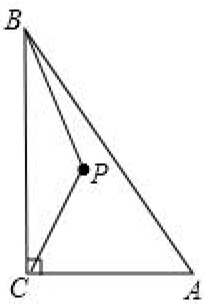


图2

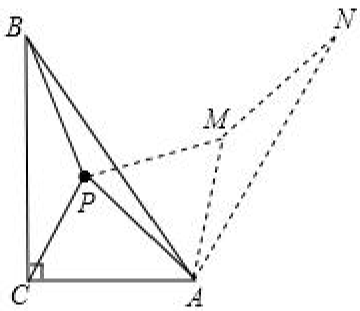


图3

（1）连接 PB，PC，将 ΔBCP 沿射线 CA 方向平移，得到 ΔDAE，点 B，C，P 的对应点分别为点 D，A，E，连接 CE．

①依题意，请在图 2 中补全图形；

②如果 $BP \perp CE$，$BP = 3$，$AB = 6$，求 CE 的长．

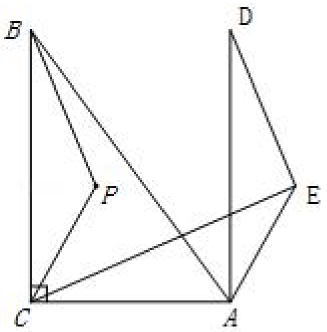
（2）如图 3，连接 PA，PB，PC，求 $PA + PB + PC$ 的最小值．

小慧的作法是：以点 A 为旋转中心，将 ΔABP 顺时针旋转 $60°$ 得到 ΔAMN，那么就将 $PA + PB + PC$ 的值转化为 $CP + PM + MN$ 的值，连接 CN，当点 P 落在 CN 上时，此题可解．

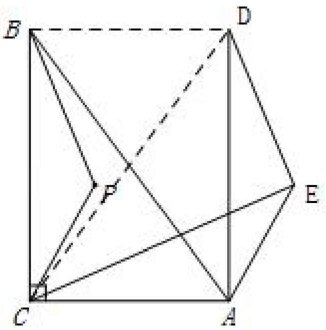
请你参考小慧的思路，在图 3 中证明 $PA + PB + PC = CP + PM + MN$．

并直接写出当 $AC = BC = 4$ 时，$PA + PB + PC$ 的最小值．

【解答】解：（1）①补全图形如图所示；



②如图，连接 BD、CD



$\because \Delta BCP$ 沿射线 CA 方向平移，得到 ΔDAE，

$\therefore BC // AD$ 且 $BC = AD$，

$\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $BCAD$ 是矩形，

$\therefore CD = AB = 6$，

$\because BP = 3$，

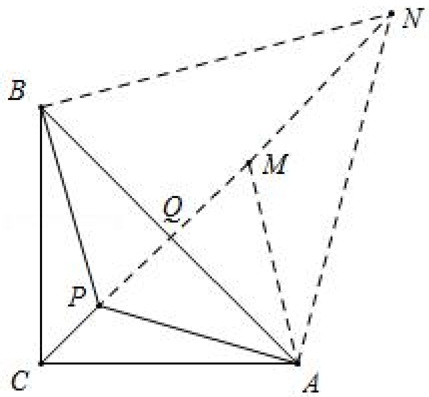
$\therefore DE = BP = 3$，

$\because BP \perp CE$，$BP // DE$，

$\therefore DE \perp CE$，

$\therefore$ 在 Rt△DCE 中， $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$；

（2）证明：如图所示，以点 A 为旋转中心，将 ΔABP 顺时针旋转 $60°$ 得到 ΔAMN，连接 BN．



由旋转可得， $\Delta AMN\cong\Delta ABP$，

$\therefore MN=BP$， $PA=AM$， $\angle PAM=60°=\angle BAN$， $AB=AN$，

$\therefore \Delta PAM$ 、 ΔABN 都是等边三角形，

$\therefore PA=PM$，

$\therefore PA+PB+PC=CP+PM+MN$，

当 $AC=BC=4$ 时， $AB=4\sqrt{2}$，

当 C 、 P 、 M 、 N 四点共线时，由 $CA=CB$， $NA=NB$ 可得 CN 垂直平分 AB，

$\therefore AQ=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}=CQ$， $NQ=\sqrt{3}AQ=2\sqrt{6}$，

$\therefore$ 此时 $CN=CP+PM+MN=PA+PB+PC=2\sqrt{2}+2\sqrt{6}$．

17．（1）阅读材料：如图（1），四边形 $ABCD$ 是正方形， ΔABE 是等边三角形， M 为对角线 BD（不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 $60°$ 得到 BN，连接 EN 、 AM 、 CM，

①求证： $\Delta AMB\cong\Delta ENB$；

②当 M 点在何处时， $AM+CM$ 的值最小；③当 M 点在何处时， $AM+BM+CM$ 的值最小，并说明理由；

（2）根据阅读材料所提供的数学思想和方法，完成下面的题目：如图（2）， A 、 B 、 C 、 D 四个城市恰好为一个正方形的四个顶点，要建立一个公路系统，使每两个城市之间都有公路相通，并使整个公路系统的总长为最短，应当如何修建？请画出你的设计图．

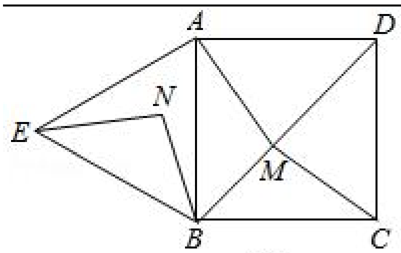


图1

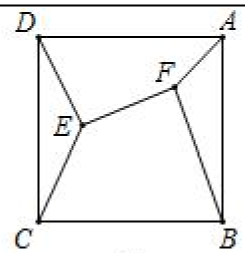


图2

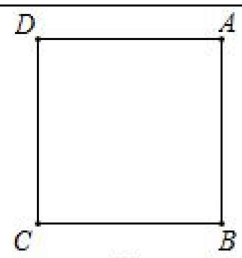


图3

【解答】解：（1）①$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，ΔABE 是等边三角形，

$\therefore AB=BC=BE$，$\angle ABE=60^{\circ}$，

$\because$将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN，

$\therefore BN=BM$，$\angle MBN=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ABE=\angle MBN$，

$\therefore \angle EBN=\angle ABM$，且 $AB=BE$，$MB=NB$，

$\therefore \Delta AMB\cong\Delta ENB(SAS)$；

②当 M 点落在 BD 的中点时，A、M、C 三点共线时，$AM+CM$ 的值最小；

③如图 1，连接 CE，当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，

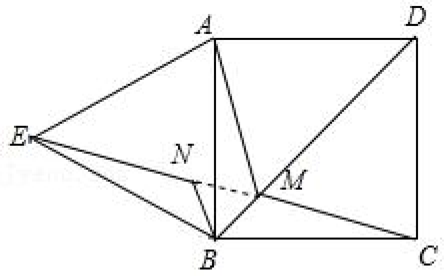


图1

理由如下：连接 MN，

由（1）知，$\Delta AMB\cong\Delta ENB$，

$\therefore AM=EN$，

$\because \angle MBN=60^{\circ}$，$MB=NB$，

$\therefore \Delta BMN$ 是等边三角形，

$\therefore BM=MN$，

$\therefore AM+BM+CM=EN+MN+CM$，

根据“两点之间线段最短”，得 $EN+MN+CM=EC$ 最短，

$\therefore$当 M 点位于 BD 与 CE 的交点处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，即等于 EC 的长；

（2）如图 2，作等边 ΔABQ 和等边 ΔCDP，等边 ΔCEH，

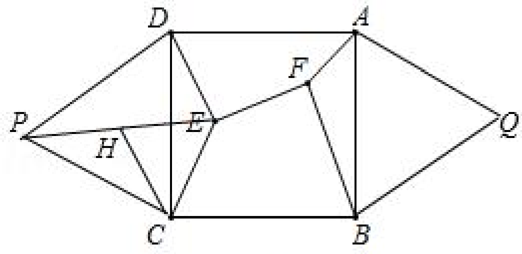


图2

同理可证 $\Delta CHP\cong\Delta CED$，则 $CH=CE$， $PH=DE$，

$\therefore DE+CE=PH+HE$，

$\therefore$ 点 H，点 P，点 E 三点共线时， $DE+CE$ 的值最小值为 PE，

同理， $AF+BF$ 的最小值为 FQ，

$\therefore DE+CE+EF+AF+BF\geqslant PE+FE+FQ$，

$\therefore$ 点 P，点 E，点 F，点 Q 共线时，并使整个公路系统的总长为最短，

即最短距离为 PQ，

$\therefore$ 设计图：$(\angle EDC=\angle ECD=\angle FAB=\angle FBA=30^{\circ})$

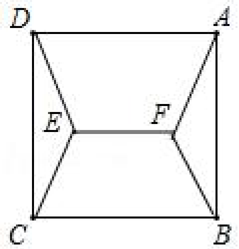


图3

18．已知，在 ΔABC 中， $\angle ACB=30^{\circ}$

（1）如图 1，当 $AB=AC=2$，求 BC 的值；

（2）如图 2，当 $AB=AC$，点 P 是 ΔABC 内一点，且 $PA=2$， $PB=\sqrt{21}$， $PC=3$，求 $\angle APC$ 的度数；

（3）如图 3，当 $AC=4$， $AB=\sqrt{7}(CB>CA)$，点 P 是 ΔABC 内一动点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{43}$ __.

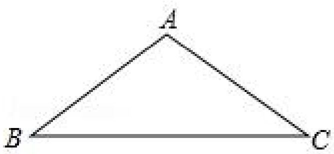


图1

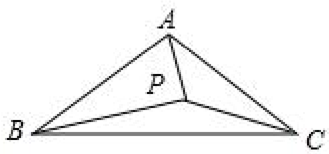


图2

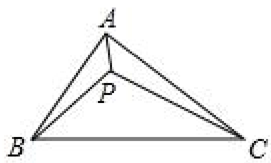


图3

【解答】解：（1）如图 1 中，作 $AP\perp BC$ 于 P．

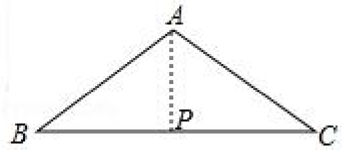


图1

$\because AB = AC$， $AP \perp BC$，

$\therefore BP = PC$，

在 RtΔACP 中，$\because AC = 2$， $\angle C = 30°$，

$\therefore PC = AC \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$，

$\therefore BC = 2PC = 2\sqrt{3}$．

（2）如图 2 中，将 ΔAPB 绕点 A 逆时针旋转 $120°$ 得到 ΔQAC．

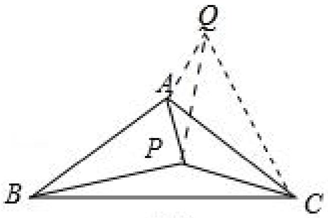


图2

$\because AB = AC$， $\angle C = 30°$，

$\therefore \angle BAC = 120°$，

$\therefore PA = AQ = 2$， $PB = QC = \sqrt{21}$，

$\because \angle PAQ = 120°$，

$\therefore PQ = 2\sqrt{3}$，

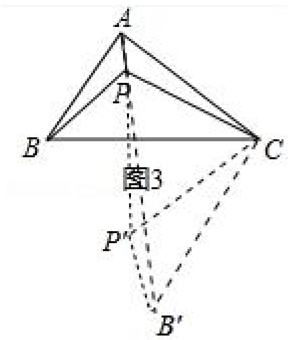
$\therefore PQ^2 + PC^2 = QC^2$，

$\therefore \angle QPC = 90°$，

$\because \angle APQ = 30°$，

$\therefore \angle APC = 30° + 90° = 120°$．

（3）如图 3 中，将 ΔBCP 绕点 C 逆时针旋转 $60°$ 得到△ $CB'P'$， 连接 PP'， AB'， 则 $\angle ACB' = 90°$．



$\because PA+PB+PC=PA+PP'+P'B'$，

$\therefore$ 当 A，P，P'，B' 共线时，$PA+PB+PC$ 的值最小，最小值 $=AB'$ 的长，

由 $AB=\sqrt{7}$，$AC=4$，$\angle C=30°$，可得 $BC=CB'=3\sqrt{3}$，

$\therefore AB'=\sqrt{AC^2+CB'^2}=\sqrt{43}$．

故答案为 $\sqrt{43}$．

19．阅读下列材料：

小华遇到这样一个问题，如图 1，ΔABC 中，$\angle ACB=30°$，$BC=6$，$AC=5$，在 ΔABC 内部有一点 P，连接 PA、PB、PC，求 $PA+PB+PC$ 的最小值．

小华是这样思考的：要解决这个问题，首先应想办法将这三条端点重合于一点的线段分离，然后再将它们连接成一条折线，并让折线的两个端点为定点，这样依据“两点之间，线段最短”，就可以求出这三条线段和的最小值了．他先后尝试了翻折、旋转、平移的方法，发现通过旋转可以解决这个问题．他的做法是，如图 2，将 ΔAPC 绕点 C 顺时针旋转 $60°$，得到 ΔEDC，连接 PD、BE，则 BE 的长即为所求．

（1）请你写出图 2 中，$PA+PB+PC$ 的最小值为__$\sqrt{61}$__；

（2）参考小华的思考问题的方法，解决下列问题：

①如图 3，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，在菱形 $ABCD$ 内部有一点 P，请在图 3 中画出并指明长度等于 $PA+PB+PC$ 最小值的线段（保留画图痕迹，画出一条即可）；

②若①中菱形 $ABCD$ 的边长为 4，请直接写出当 $PA+PB+PC$ 值最小时 PB 的长．

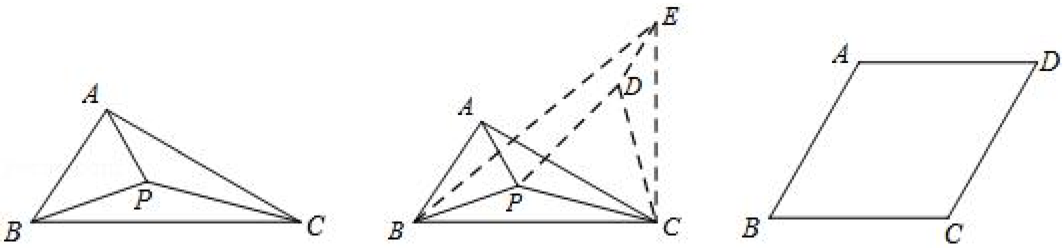


图 1　　图 2　　图 3

【解答】解：（1）如图 2．$\because$ 将 ΔAPC 绕点 C 顺时针旋转 $60°$，得到 ΔEDC，

$\therefore \Delta APC\cong\Delta EDC$，

$\therefore \angle ACP=\angle ECD$，$AC=EC=5$，$\angle PCD=60°$，

$\therefore \angle ACP+\angle PCB=\angle ECD+\angle PCB$，

$\therefore \angle ECD+\angle PCB=\angle ACB=30°$，

$\therefore \angle BCE=\angle ECD+\angle PCB+\angle PCD=30°+60°=90°$．

在 RtΔBCE 中，$\because \angle BCE=90°$，$BC=6$，$CE=5$，

$\therefore BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$，

即 $PA+PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{61}$；

（2）①将 ΔAPC 绕点 C 顺时针旋转 $60°$，得到 ΔDEC，连接 PE、DE，

则线段 BD 等于 $PA+PB+PC$ 最小值的线段；

②如图 $3-1$ 中，当 B、P、E、D 四点共线时，$PA+PB+PC$ 值最小，最小值为 BD．

$\because$ 将 ΔAPC 绕点 C 顺时针旋转 $60°$，得到 ΔDEC，

$\therefore \Delta APC\cong\Delta DEC$，

$\therefore CP=CE$，$\angle PCE=60°$，

$\therefore \Delta PCE$ 是等边三角形，

$\therefore PE=CE=CP$，$\angle EPC=\angle CEP=60°$．

$\because$ 菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABP=\angle CBP=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，

$\therefore \angle PCB=\angle EPC-\angle CBP=60°-\angle 30°=30°$，

$\therefore \angle PCB=\angle CBP=30°$，

$\therefore BP=CP$，

同理，$DE=CE$，

$\therefore BP=PE=ED$．

连接 AC，交 BD 于点 O，则 $AC\perp BD$．

在 RtΔBOC 中，$\because \angle BOC=90°$，$\angle OBC=30°$，$BC=4$，

$\therefore BO=BC\bullet\cos\angle OBC=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore BD=2BO=4\sqrt{3}$，

$\therefore BP=\frac{1}{3}BD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

即当 $PA+PB+PC$ 值最小时 PB 的长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

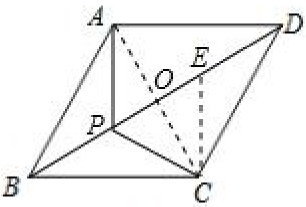


图 3 -1

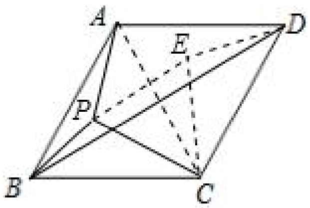


图 3