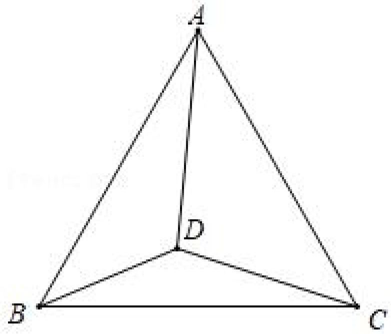
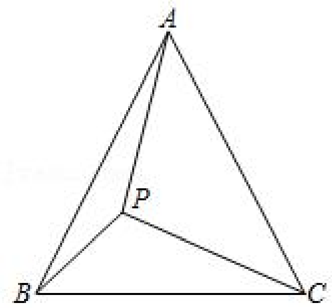
专题 07　与旋转有关的最值问题

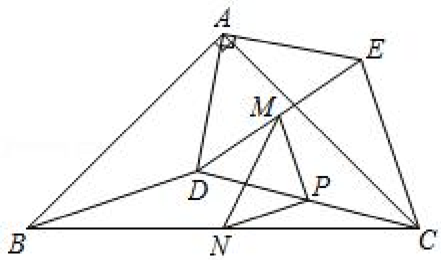
1．如图，点 D 为等边三角形 ABC 内一点，且 $\angle BDC=120^\circ$，则 $\dfrac{AD}{BD}$ 的最小值为____．



2．如图，已知边长为 $\sqrt{2}$ 的等边 ΔABC，平面内存在点 P，则 $PA+\sqrt{3}PB+PC$ 的取值范围为 ____．



3．如图，ΔABC，ΔADE 均为等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，将 ΔADE 绕点 A 在平面内自由旋转，连接 DC，点 M，P，N 分别为 DE，DC，BC 的中点，若 $AD=3$，$AB=7$，则线段 MN 的取值范围是____．



4．定义：既相等又垂直的两条线段称为“等垂线段”，如图1，在RtΔABC中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC$，点D、E分别在边AB、AC上，$AD=AE$，连接DE、DC，点M、P、N分别为DE、DC、BC的中点，且连接PM、PN．

观察猜想

（1）线段PM与PN____“等垂线段”（填“是”或“不是”　）

猜想论证

（2）ΔADE绕点A按逆时针方向旋转到图2所示的位置，连接BD，CE，试判断PM与PN是否为“等垂线段”，并说明理由．

拓展延伸

（3）把ΔADE绕点A在平面内自由旋转，若$AD=4$，$AB=10$，请直接写出PM与PN的积的最大值．

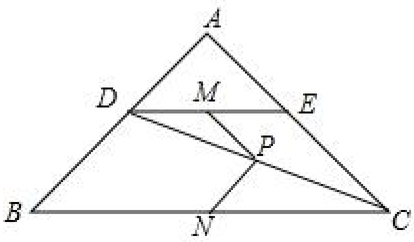


图1

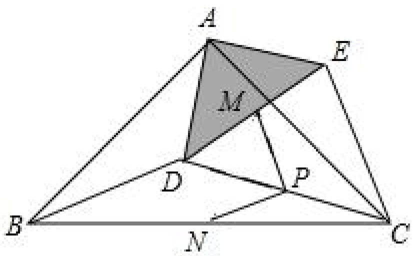
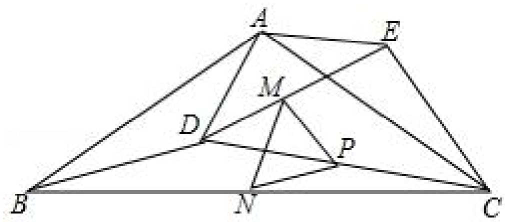
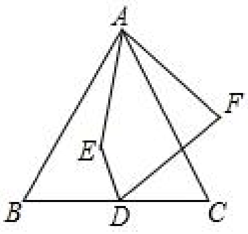


图2

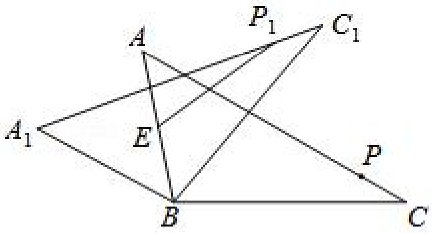
5．已知，ΔABC和ΔADE均为等腰三角形，$AB=AC=5$，$AD=AE=2$，且$\angle BAC=\angle DAE=120^{\circ}$，把$\Delta ADE$绕点$A$在平面内自由旋转．如图，连接$BD$，$CD$，$CE$，点$M$，$P$，$N$分别为$DE$，$DC$，$BC$的中点，连接$MP$，$PN$，$MN$，则$\Delta PMN$的面积最大值为____．



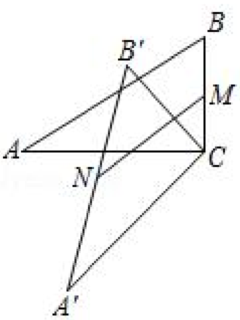
6．如图，等边ΔABC中，$BC=12$，D为BC的中点，E为ΔABC内一动点，$DE=2$，连接AE，将线段AE绕点A逆时针旋转$60°$得AF，连接DF，则线段DF的最小值为____.



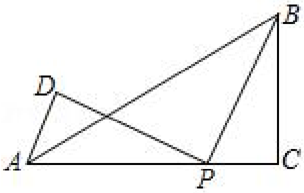
7．如图，在ΔABC中，$AC=4+4\sqrt{3}$，$\angle BAC=45°$，$\angle ACB=30°$，将ΔABC绕点B按逆时针方向旋转，得到△A_1BC_1，点E为线段AB中点，点P是线段AC上的动点，将ΔABC绕点B按逆时针方向旋转的过程中，点P的对应点是点P_1，则线段EP_1的最大值与最小值之差为____.



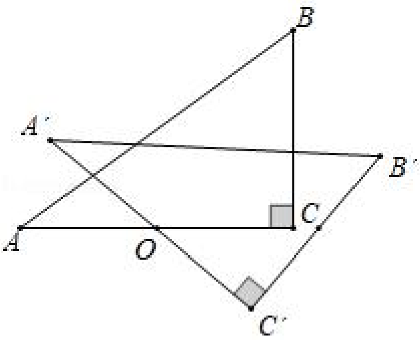
8．如图，在RtΔABC中，$\angle ACB=90°$，将ΔABC绕顶点C逆时针旋转得到△$A'B'C$，M是BC的中点，N是$A'B'$的中点，连接MN，若$BC=4$，$\angle ABC=60°$，则线段MN的最大值为____.



9．如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=15$，$BC=9$，点P是线段AC上的一个动点，连接BP，将线段BP绕点P逆时针旋转90°得到线段PD，连接AD，则线段AD的最小值是____．



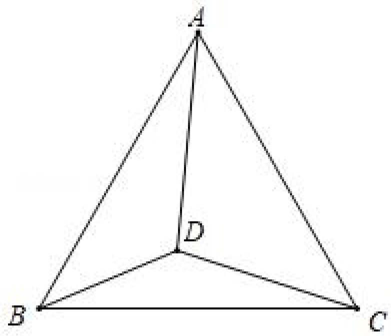
10．如图，ΔABC中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=6$，$BC=4$，点O是AC的中点，以O为旋转中心，将ΔABC绕点O旋转一周，A、B、C的对应点分别为A'、B'、C'，则BC'的最大值为____．



专题 07　与旋转有关的最值问题

参考答案

1．如图，点 D 为等边三角形 ABC 内一点，且 $\angle BDC=120^{\circ}$，则 $\dfrac{AD}{BD}$ 的最小值为__ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ __．



【解答】解：如图，将 ΔBCD 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 ΔACE，连接 DE，过点 A 作 $AH\perp DE$ 于 H．

$\because CD=CE$，$\angle DCE=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta DCE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle EDC=\angle DEC=60^{\circ}$，

$\because \angle BDC=\angle AEC=120^{\circ}$，

$\therefore \angle AED=60^{\circ}$，

$\because BD=AE$，

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AD}{AE}$，

$\because AH\perp DE$，

$\therefore AD$开AH，

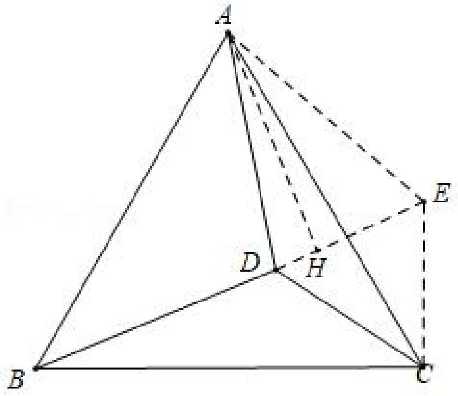
$\therefore \dfrac{AD}{BD}$开$\dfrac{AH}{AE}$，

$\because \angle AHE=90^{\circ}$，$\angle AEB=60^{\circ}$，

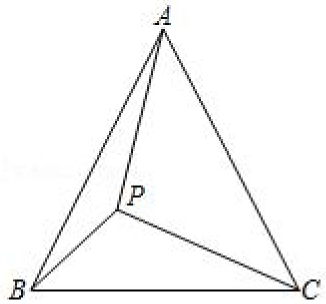
$\therefore \dfrac{AH}{AE}=\sin 60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \dfrac{AD}{BD}$开$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

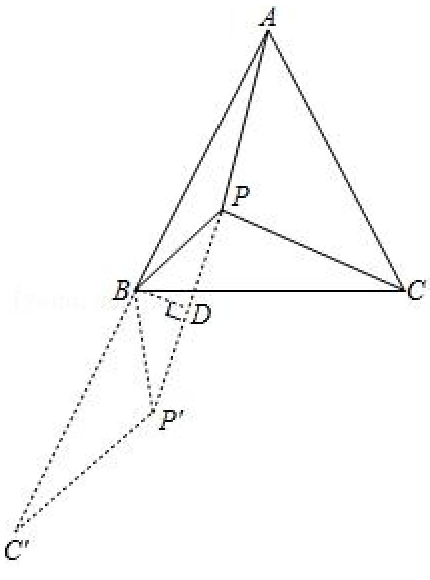
$\therefore \dfrac{AD}{BD}$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．



2. 如图，已知边长为$\sqrt{2}$的等边ΔABC，平面内存在点P，则$PA+\sqrt{3}PB+PC$的取值范围为 ____大于$2\sqrt{2}$____.



【解答】解：如图，将ΔBPC绕点B顺时针旋转$120°$，得△$BP'C'$，连接PP'，过点B作$BD\perp PP'$于点D，



$\because \Delta ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=60°$，$AB=BC=BC'=\sqrt{2}$，

$\therefore AC'=AB+BC'=2\sqrt{2}$，

$\because \angle CBC'=\angle PBP'=120°$，

$\therefore \angle ABC'=\angle ABC+\angle CBC'=180°$，

$\therefore$点A，B，C'在同一条直线上，

$\because BP = BP'$，$\angle PBP' = 120°$，$BD \perp PP'$，

$\therefore \angle BPP' = \angle BP'P = 30°$，

$\therefore PD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}PB$，

$\therefore PP' = 2PD = \sqrt{3}PB$，

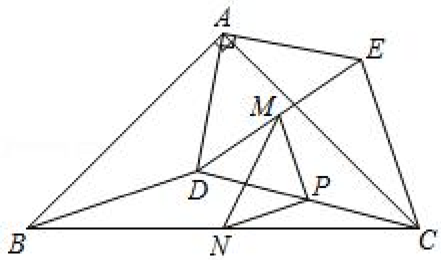
$\therefore PA + PP' + PC = PA + \sqrt{3}PB + PC > AC'$，

因为等边三角形的边长为$\sqrt{2}$，

$\therefore PA + \sqrt{3}PB + PC$ 的取值范围为大于等于 $2\sqrt{2}$，

故答案为：大于等于 $2\sqrt{2}$．

3．如图，ΔABC，ΔADE 均为等腰直角三角形，$\angle BAC = \angle DAE = 90°$，将 ΔADE 绕点 A 在平面内自由旋转，连接 DC，点 M，P，N 分别为 DE，DC，BC 的中点，若 $AD = 3$，$AB = 7$，则线段 MN 的取值范围是__$\sqrt{2} \leqq MN \leqq 5\sqrt{2}$__．



【解答】解：$\because$ 点 P，M 分别是 CD，DE 的中点，

$\therefore PM = \dfrac{1}{2}CE$，$PM // CE$，

$\because$ 点 N，M 分别是 BC，DE 的中点，

$\therefore PN = \dfrac{1}{2}BD$，$PN // BD$，

$\because \Delta ABC$，ΔADE 均为等腰直角三角形，

$\therefore AB = AC$，$AD = AE$，$\angle BAC = \angle DAE = 90°$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$，

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE(SAS)$，

$\therefore BD = CE$，

$\therefore PM = PN$，

$\therefore \Delta PMN$ 是等腰三角形，

$\because PM // CE$，

$\therefore \angle DPM=\angle DCE$，

$\because PN//BD$，

$\therefore \angle PNC=\angle DBC$，

$\because \angle DPN=\angle DCB+\angle PNC=\angle DCB+\angle DBC$，

$\therefore \angle MPN=\angle DPM+\angle DPN=\angle DCE+\angle DCB+\angle DBC=\angle BCE+\angle DBC=\angle ACB+\angle ACE+\angle DBC=\angle ACB+\angle ABD+\angle DBC=\angle ACB+\angle ABC$，

$\because \angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB+\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle MPN=90^{\circ}$，

$\therefore \Delta PMN$是等腰直角三角形，

$\therefore PM=PN=\dfrac{1}{2}BD$，

$\therefore MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD$，

$\therefore$点D在AB上时，BD最小，

$\therefore BD=AB-AD=4$，MN的最小值$2\sqrt{2}$；

点D在BA延长线上时，BD最大，

$\therefore BD=AB+AD=10$，MN的最大值为$5\sqrt{2}$，

$\therefore$线段MN的取值范围是$\underline{\sqrt{2}\leqq MN\leqq 5\sqrt{2}}$.

故答案为：$\underline{\sqrt{2}\leqq MN\leqq 5\sqrt{2}}$.

4．定义：既相等又垂直的两条线段称为“等垂线段”，如图1，在RtΔABC中，$\angle A=90^{\circ}$，$AB=AC$，点D、E分别在边AB、AC上，$AD=AE$，连接DE、DC，点M、P、N分别为DE、DC、BC的中点，且连接PM、PN.

观察猜想

（1）线段PM与PN __是__ “等垂线段”（填“是”或“不是”）

猜想论证

（2）ΔADE绕点A按逆时针方向旋转到图2所示的位置，连接BD，CE，试判断PM与PN是否为“等垂线段”，并说明理由.

拓展延伸

（3）把ΔADE绕点A在平面内自由旋转，若$AD=4$，$AB=10$，请直接写出PM与PN的积的最大值.

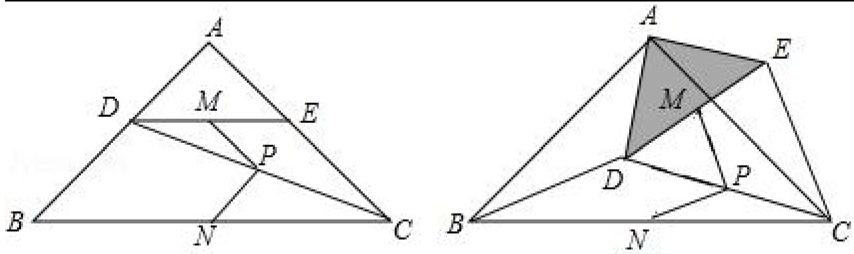


图1 图2

【解答】解：（1）$\because$ 点 P，N 是 BC，CD 的中点，

$\therefore PN//BD$，$PN=\frac{1}{2}BD$，

$\because$ 点 P，M 是 CD，DE 的中点，

$\therefore PM//CE$，$PM=\frac{1}{2}CE$，

$\because AB=AC$，$AD=AE$，

$\therefore BD=CE$，

$\therefore PM=PN$，

$\because PN//BD$，

$\therefore \angle DPN=\angle ADC$，

$\because PM//CE$，

$\therefore \angle DPM=\angle DCA$，

$\because \angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ADC+\angle ACD=90^{\circ}$，

$\therefore \angle MPN=\angle DPM+\angle DPN=\angle DCA+\angle ADC=90^{\circ}$，

$\therefore PM\perp PN$，

$\therefore PM=PN$，$PM\perp PN$，

$\therefore PM$ 与 PN 是"等垂线段"，

故答案为是；

（2）由旋转知，$\angle BAD=\angle CAE$，

$\because AB=AC$，$AD=AE$，

$\therefore \Delta ABD\cong\Delta ACE(SAS)$，

$\therefore \angle ABD=\angle ACE$，$BD=CE$，

同（1）的方法，利用三角形的中位线得，$PN=\frac{1}{2}BD$，$PM=\frac{1}{2}CE$，

$\therefore PM=PN$，

同（1）的方法得，$PM//CE$，

$\therefore \angle DPM=\angle DCE$，

同（1）的方法得，$PN//BD$，

$\therefore \angle PNC=\angle DBC$，

$\because \angle DPN=\angle DCB+\angle PNC=\angle DCB+\angle DBC$，

$\therefore \angle MPN=\angle DPM+\angle DPN=\angle DCE+\angle DCB+\angle DBC$

$=\angle BCE+\angle DBC=\angle ACB+\angle ACE+\angle DBC$

$=\angle ACB+\angle ABD+\angle DBC=\angle ACB+\angle ABC$，

$\because \angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB+\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle MPN=90^{\circ}$，

$\therefore PM\perp PN$，

$\therefore PM$ 与 PN 是“等垂线段”；

（3）由（2）知，PM 与 PN 是“等垂线段”，$PM=PN=\dfrac{1}{2}BD$，

$\therefore PM\bullet PN=\dfrac{1}{4}BD^{2}$，

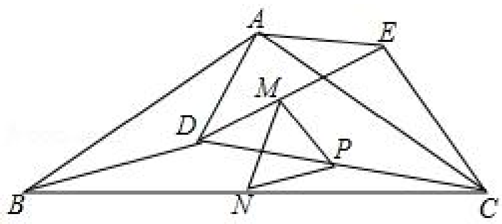
要 $PM\bullet PN$ 最大，则有 BD 最大，

$\therefore$ 点 D 在 BA 的延长线上时，BD 最大，

$\therefore BD=AB+AD=14$，

$\therefore PM\cdot PN_{最大}=49$．

5．已知，ΔABC 和 ΔADE 均为等腰三角形，$AB=AC=5$，$AD=AE=2$，且 $\angle BAC=\angle DAE=120^{\circ}$，把 ΔADE 绕点 A 在平面内自由旋转．如图，连接 BD，CD，CE，点 M，P，N 分别为 DE，DC，BC 的中点，连接 MP，PN，MN，则 ΔPMN 的面积最大值为__$\dfrac{49\sqrt{3}}{16}$__．



【解答】解：如图，

$\because \angle BAC=\angle DAE=120^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$，

$\because AB=AC$， $AD=AE$，

$\therefore \Delta ABD\cong \Delta ACE(SAS)$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$， $BD=CE$，

$\because$点 M， P， N 分别为 DE， DC， BC 的中点，

$\therefore PM$ 为 ΔDEC 的中位线， PN 为 ΔCBD 的中位线，

$\therefore MP=\dfrac{1}{2}CE$， $MP//CE$， $PN//BD$， $PN=\dfrac{1}{2}BD$，

$\therefore PM=PN$，

$\because PM//CE$，

$\therefore \angle MPD=\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3$，

$\because PN//BD$，

$\therefore \angle 5=\angle 6$，

$\because \angle DPN=\angle 4+\angle 5=\angle 6+\angle 4$，

$\therefore \angle MPN=\angle MPD+\angle DPN=\angle 1+\angle 3+\angle 6+\angle 4=\angle ABC+\angle ACB=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta PMN$ 为等边三角形，

$\therefore S_{\Delta PMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}PN^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\dfrac{1}{2}BD)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{16}BD^2$，

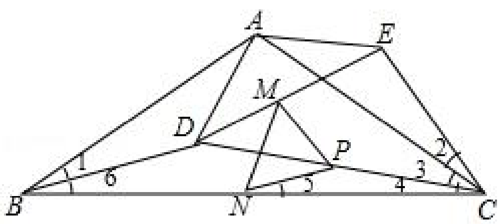
当 BD 最大时， $S_{\Delta PMN}$ 的值最大，

而 $BD\bullet AB+AD$ （当且仅当 B 、 A 、 D 共线时取等号），

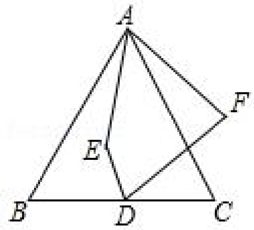
$\therefore BD$ 的最大值为 $5+2=7$，

$\therefore S_{\Delta PMN}$ 的最大值为 $\dfrac{49\sqrt{3}}{16}$.

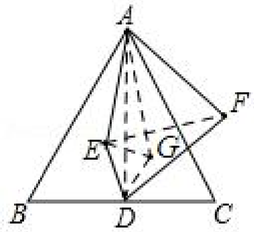
故答案为 $\dfrac{49\sqrt{3}}{16}$.



6．如图，等边 ΔABC 中， $BC=12$， D 为 BC 的中点， E 为 ΔABC 内一动点， $DE=2$，连接 AE，将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 得 AF，连接 DF，则线段 DF 的最小值为__ $6\sqrt{3}-2$ __.



【解答】解：如图，以 ED 为边作等边 ΔDEG，连接 AD， EF， AG，



$\because \Delta ABC$ 是等边三角形，点 D 是 BC 中点，

$\therefore BD=CD=6$， $AD\perp BC$

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6\sqrt{3}$，

$\because$ 将线段 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 得 AF，

$\therefore AE=AF$， $\angle EAF=60^\circ$，

$\therefore \Delta AEF$ 是等边三角形，

$\therefore AE=EF$， $\angle AEF=60^\circ$，

$\because \Delta DEG$ 是等边三角形

$\therefore DE=EG=3$， $\angle GED=60^\circ=\angle AEF$

$\therefore \angle AEG=\angle FED$，

在 ΔAEG 和 ΔFED 中，

$$\begin{cases} EA=EF \\ \angle AEG=\angle FED \\ EG=ED \end{cases}，$$

$\therefore \Delta AEG\cong \Delta FED(SAS)$，

$\therefore DF=AG$，

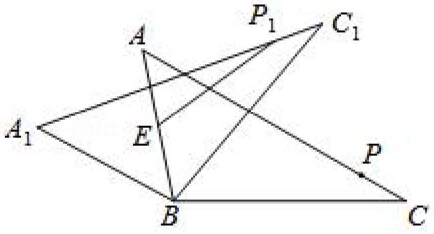
$\because AG$开$AD-DG$，

$\therefore$ 当点 A， 点 G， 点 D 三点共线时， AG 值最小，即 DF 值最小，

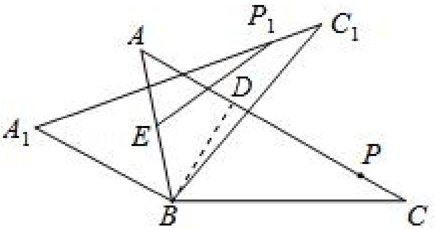
$\therefore DF$ 最小值 $=AD-DG=6\sqrt{3}-2$，

故答案为： $6\sqrt{3}-2$．

7．如图，在ΔABC中，$AC=4+4\sqrt{3}$，$\angle BAC=45^{\circ}$，$\angle ACB=30^{\circ}$，将ΔABC绕点B按逆时针方向旋转，得到△A_1BC_1，点E为线段AB中点，点P是线段AC上的动点，将ΔABC绕点B按逆时针方向旋转的过程中，点P的对应点是点P_1，则线段EP_1的最大值与最小值之差为__$4+4\sqrt{2}$__．



【解答】解：如图，过点B作$BD\perp AC$，D为垂足，



在RtΔABD中，$\because\angle ADB=90^{\circ}$，$\angle A=45^{\circ}$，

$\therefore AD=BD$，设$AD=BD=x$，

在RtΔBDC中，$\because\angle BDC=90^{\circ}$，$BD=x$，$\angle C=30^{\circ}$，

$\therefore CD=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}x$，

$\because AD+CD=AC$，

$\therefore x+\sqrt{3}x=4+4\sqrt{3}$，

解得$x=4$，

$\therefore AD=BD=4$，$BC=2BD=8$，$AB=\sqrt{2}AD=4\sqrt{2}$

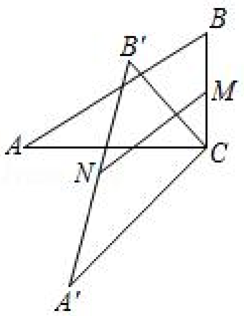
当P在AC上运动，BP与AC垂直的时候，ΔABC绕点B旋转，使点P的对应点P_1在线段AB上时，EP_1最小，最小值为：$EP_1=BP_1-BE=BD-BE=4-2\sqrt{2}$．

当P在AC上运动至点C，ΔABC绕点B旋转，使点P的对应点P_1在线段AB的延长线上时，EP_1最大，最大值为：$EP_1=BC+BE=8+2\sqrt{2}$，

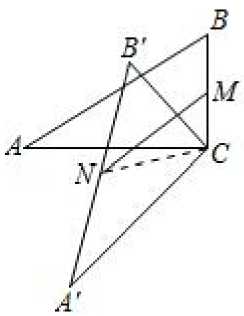
$\therefore EP_1$的最大值与最小值之差为$(8+2\sqrt{2})-(4-2\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$．

故答案为$4+4\sqrt{2}$．

8．如图，在RtΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，将ΔABC绕顶点C逆时针旋转得到△$A'B'C$，M是BC的中点，N是$A'B'$的中点，连接MN，若$BC=4$，$\angle ABC=60^{\circ}$，则线段MN的最大值为__6__．



【解答】解：连接CN．



在RtΔABC中，$\because\angle ACB=90^{\circ}$，$BC=4$，$\angle B=60^{\circ}$，

$\therefore\angle A=30^{\circ}$，

$\therefore AB=A'B'=2BC=8$，

$\because NB'=NA'$，

$\therefore CN=\dfrac{1}{2}A'B'=4$，

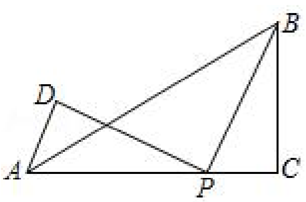
$\because CM=BM=2$，

$\therefore MN \bullet CN+CM=6$，

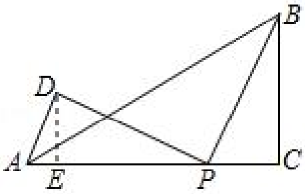
$\therefore MN$的最大值为6，

故答案为6．

9．如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=15$，$BC=9$，点P是线段AC上的一个动点，连接BP，将线段BP绕点P逆时针旋转90°得到线段PD，连接AD，则线段AD的最小值是__$3\sqrt{2}$__．



【解答】解：如图，过点D作$DE\perp AC$于E，



$\because$ 将线段 BP 绕点 P 逆时针旋转 $90°$ 得到线段 PD，

$\therefore DP = BP$， $\angle DPB = 90°$，

$\therefore \angle DPE + \angle BPC = 90°$， 且 $\angle BPC + \angle PBC = 90°$，

$\therefore \angle DPE = \angle PBC$， 且 $DP = BP$， $\angle DEP = \angle C = 90°$，

$\therefore \Delta DEP \cong \Delta PCB(AAS)$

$\therefore DE = CP$， $EP = BC = 9$，

$\because AE + PC = AC - EP = 6$

$\therefore AE + DE = 6$，

$\because AD^2 = AE^2 + DE^2$，

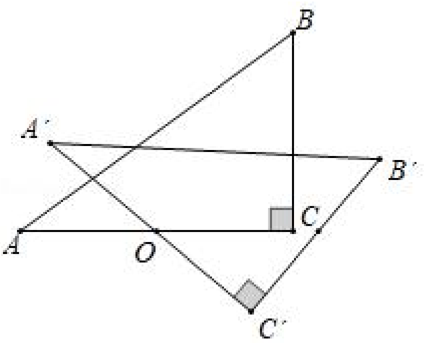
$\therefore AD^2 = AE^2 + (6 - AE)^2$，

$\therefore AD^2 = 2(AE - 3)^2 + 18$，

当 $AE = 3$ 时， AD 有最小值为 $3\sqrt{2}$，

故答案为 $3\sqrt{2}$

10．如图， ΔABC 中， $\angle C = 90°$， $AC = 6$， $BC = 4$， 点 O 是 AC 的中点，以 O 为旋转中心，将 ΔABC 绕点 O 旋转一周， A 、 B 、 C 的对应点分别为 A' 、 B' 、 C'， 则 BC' 的最大值为__8__.



【解答】解：连接 OB， BC'， 如图，

$\because$ 点 O 是 AC 中点，

$\therefore OC = \dfrac{1}{2}AC = 3$，

在 RtΔBOC 中， $OB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，

$\because \Delta ABC$ 绕点 O 旋转得△ $A'B'C'$，

$\therefore OC' = OC = 3$，

$\because BC' \bullet OB + OC'$（当且仅当点 B 、 O 、 C' 共线时，取等号），

$\therefore BC'$ 的最大值为 $3+5=8$，

即在旋转过程中点 B 、 C' 两点间的最大距离是 8．

故答案为：8．