专题五　胡不归最值问题

【专题说明】

胡不归模型问题解题步骤如下；

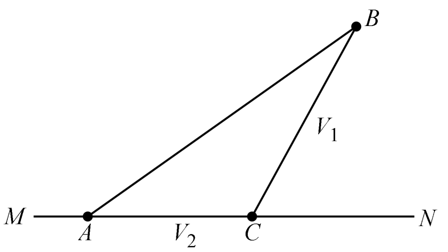
1、将所求线段和改写为“$PA+\frac{b}{a}PB$”的形式（$\frac{b}{a}<1$），若$\frac{b}{a}>1$，提取系数，转化为小于 1 的形式解决。

2、在 PB 的一侧，PA 的异侧，构造一个角度α，使得$\sin\alpha=\frac{b}{a}$

3、最后利用两点之间线段最短及垂线段最短解题

【模型展示】

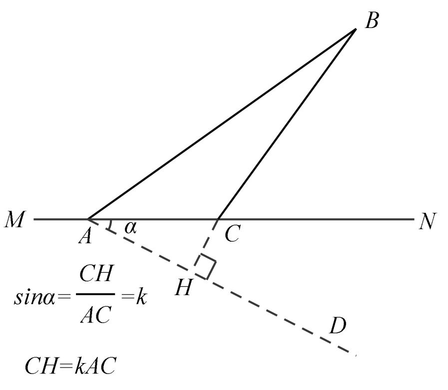
如图，一动点 P 在直线 MN 外的运动速度为 $V1$，在直线 MN 上运动的速度为 $V2$，且 $V1<V2$，A、B 为定点，点 C 在直线 MN 上，确定点 C 的位置使 $\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}$ 的值最小．



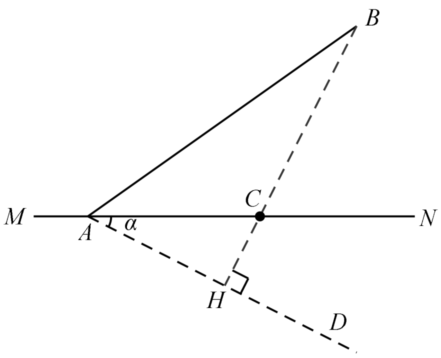
$\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}=\frac{1}{V_1}\left(BC+\frac{V_1}{V_2}AC\right)$，记 $k=\frac{V_1}{V_2}$，

即求 $BC+kAC$ 的最小值．

构造射线 AD 使得 $\sin\angle DAN=k$，$CH/AC=k$，$CH=kAC$．



将问题转化为求 $BC+CH$ 最小值，过 B 点作 $BH\perp AD$ 交 MN 于点 C，交 AD 于 H 点，此时 $BC+CH$ 取到最小值，即 $BC+kAC$ 最小．



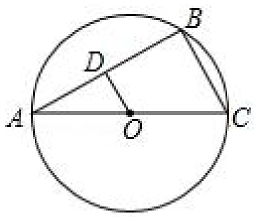
【模型总结】

在求形如“$PA+kPB$”的式子的最值问题中，关键是构造与 kPB 相等的线段，将“$PA+kPB$”型问题转化为“$PA+PC$”型．

而这里的 PB 必须是一条方向不变的线段，方能构造定角利用三角函数得到 kPB 的等线段．

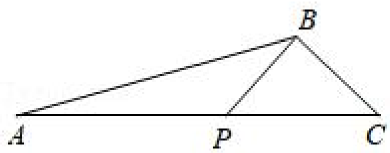
专题五 练习

1．如图，AC 是圆 O 的直径，$AC=4$，弧 $BA=120°$，点 D 是弦 AB 上的一个动点，那么 $OD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值为(　　)



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$1+\sqrt{3}$

2．如图，在 ΔABC 中，$\angle A=15°$，$AB=10$，P 为 AC 边上的一个动点（不与 A、C 重合），连接 BP，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值是(　　)

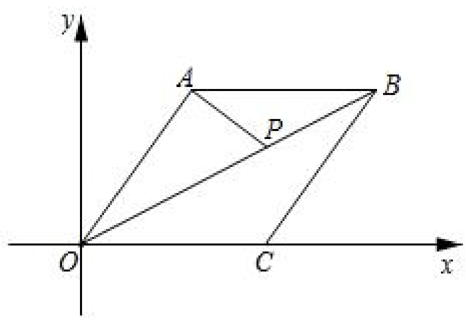


A．$5\sqrt{2}$　　B．$5\sqrt{3}$　　C．$\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　D．8

3．ΔABC 中，$\angle A=90°$，$\angle B=60°$，$AB=2$，若点 D 是 BC 边上的动点，则 $2AD+DC$ 的最小值为(　　)

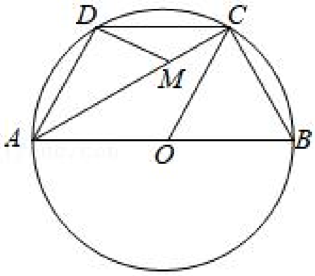
A．4　　B．$\sqrt{3}+3$　　C．6　　D．$2\sqrt{3}+3$

4．如图所示，菱形 $ABCO$ 的边长为 5，对角线 OB 的长为 $4\sqrt{5}$，P 为 OB 上一动点，则 $AP+\frac{\sqrt{5}}{5}OP$ 的最小值为(　　)



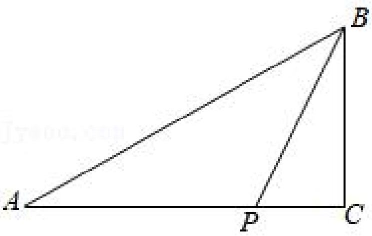
A．4　　B．5　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$3\sqrt{5}$

5．如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$， AB 为 $\odot O$ 的直径， $AB=16$， $\angle ABC=60^{\circ}$， D 为弧 AC 的中点， M 是弦 AC 上任意一点（不与端点 A 、 C 重合），连接 DM ，则 $\frac{1}{2}CM+DM$ 的最小值是(　　)



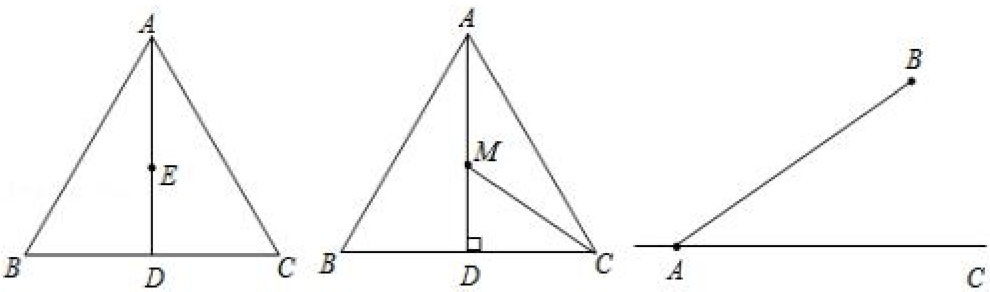
A． $4\sqrt{3}$　　B． $3\sqrt{3}$　　C． $2\sqrt{3}$　　D．4

6．在 ΔABC 中， $\angle ACB=90^{\circ}$， P 为 AC 上一动点，若 $BC=4$， $AC=6$，则 $\sqrt{2}BP+AP$ 的最小值为(　　)



A．5　　B．10　　C． $5\sqrt{2}$　　D． $10\sqrt{2}$

7．【问题探究】在等边三角形 ABC 中， $AD\perp BC$ 于点 D， $AB=2$．



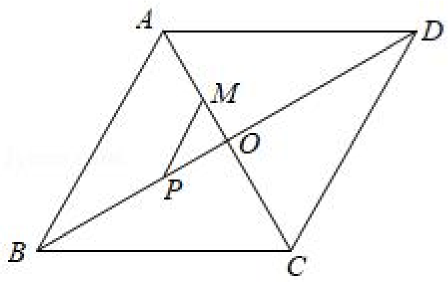
图①　　图②　　图③

（1）如图 1． E 为 AD 的中点，则点 E 到 AB 的距离为 ____；

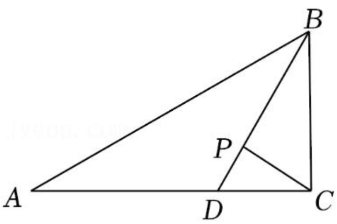
（2）如图 2， M 为 AD 上一动点．则 $\frac{1}{2}AM+MC$ 的最小值为 ____；

【问题解决】如图 3， A， B 两地相距 $600km$， AC 是笔直地沿东西方向向两边延伸的一条铁路，点 B 到 AC 的距离为 $360km$．今计划在铁路线 AC 上修一个中转站 M，再在 BM 间修一条笔直的公路．如果同样的物资在每千米公路上的运费是铁路上的两倍，那么为使通过铁路由 A 到 M 再通过公路由 M 到 B 的总运费达到最小值，中转站 M 应修在距 A 地 ____ km 处．

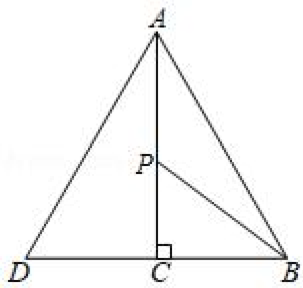
8．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AC=10$，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 M 在线段 AC 上，且 $AM=3$，点 P 为线段 BD 上的一个动点，则 $MP+\frac{1}{2}PB$ 的最小值是 ____.



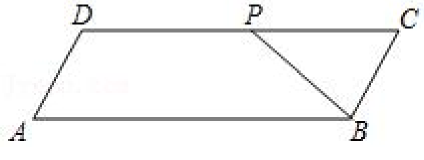
9．如图，直角三角形 ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，点 P 是线段 BD 上的动点，求 $CP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值 ____.



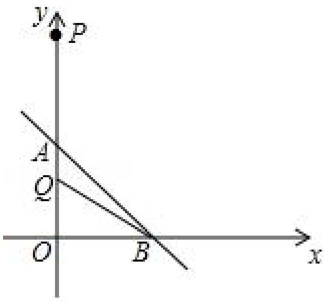
10．如图，已知 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，延长 BC 至 D 使 $CD=BC$，连接 AD，且 $AD=4$，点 P 为线段 AC 上一动点，连接 BP．则 $2BP+AP$ 的最小值为____.



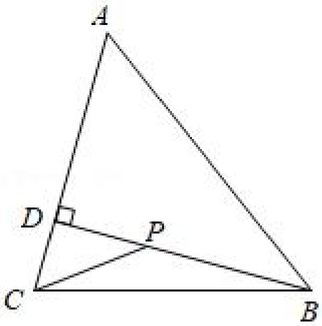
11．如图，▱$ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=6$，$BC=2$，P 为边 CD 上的一动点，则 $PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值等于 ____.



12．如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-x+4$ 的图象分别与 y 轴和 x 轴交于点 A 和点 B．若定点 P 的坐标为 $(0，6\sqrt{3})$，点 Q 是 y 轴上任意一点，则 $\frac{1}{2}PQ+QB$ 的最小值为 ____.



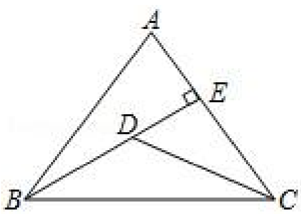
13．如图，在 ΔABC 中，$AB=5$，$AC=4$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$BD\perp AC$ 交 AC 于点 D．点 P 为线段 BD 上的动点，则 $PC+\frac{3}{5}PB$ 的最小值为 ____.



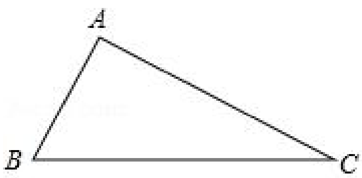
14．如图，在 ΔABC 中，$AB=AC=10$，$\tan A=2$，$BE\perp AC$ 于点 E，D 是线段 BE 上的一个动点，那么：

（1）$AE=$____；

（2）$CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是____.



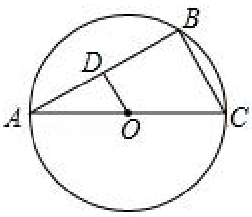
15．如图，在 ΔABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$，若 D 是 BC 边上的动点，则 $2AD+DC$ 的最小值为____.



参考答案

专题五 练习 答案与解析

1．如图，AC 是圆 O 的直径，$AC=4$，弧 $BA=120^{\circ}$，点 D 是弦 AB 上的一个动点，那么 $OD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值为( )



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$1+\sqrt{3}$

【解答】解：$\because \widehat{BA}$ 的度数为 120°，

$\therefore \angle C=60^{\circ}$，

$\because AC$ 是直径，

$\therefore \angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle A=30^{\circ}$，

作 $BK//CA$，$DE\perp BK$ 于 E，$OM\perp BK$ 于 M，连接 OB．

$\because BK//AC$，

$\therefore \angle DBE=\angle BAC=30^{\circ}$，

在 RtΔDBE 中，$DE=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OD+\frac{1}{2}BD=OD+DE$，

根据垂线段最短可知，当点 E 与 M 重合时，$OD+\frac{1}{2}BD$ 的值最小，最小值为 OM，

$\because \angle BAO=\angle ABO=30^{\circ}$，

$\therefore \angle OBM=60^{\circ}$，

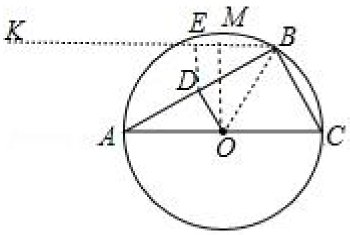
在 RtΔOBM 中，

$\because OB=2$，$\angle OBM=60^{\circ}$，

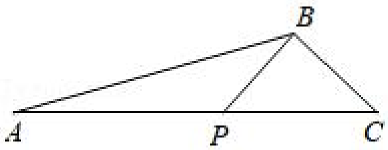
$\therefore OM=OB\cdot\sin 60^{\circ}=\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}DB+OD$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，

故选：B．

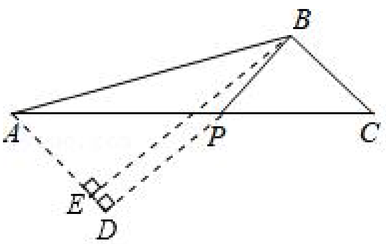


2．如图，在 ΔABC 中，$\angle A=15^{\circ}$，$AB=10$，P 为 AC 边上的一个动点（不与 A、C 重合)，连接 BP，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值是(　　)



A．$5\sqrt{2}$　　B．$5\sqrt{3}$　　C．$\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　D．8

【解答】解：如图，以 AP 为斜边在 AC 下方作等腰 $Rt\Delta ADP$，过 B 作 $BE\perp AD$ 于 E，



$\because \angle PAD=45^{\circ}$，

$\therefore \sin\angle PAD=\frac{DP}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore DP=\frac{\sqrt{2}}{2}AP$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB=DP+PB\geqslant BE$，

$\because \angle BAC=15^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=60^{\circ}$，

$\therefore BE=AB\sin 60^{\circ}=5\sqrt{3}$，

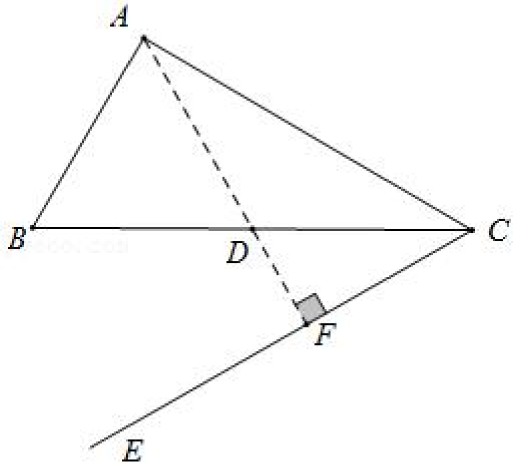
$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$．

故选：B．

3．ΔABC 中，$\angle A=90^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$，若点 D 是 BC 边上的动点，则 $2AD+DC$ 的最小值为(　　)

A．4　　B．$\sqrt{3}+3$　　C．6　　D．$2\sqrt{3}+3$

【解答】解：过点 C 作射线 CE，使 $\angle BCE=30^{\circ}$，再过动点 D 作 $DF\perp CE$，垂足为点 F，连接 AD，如图所示：



在 RtΔDFC 中，$\angle DCF=30^{\circ}$，

$\therefore DF=\frac{1}{2}DC$，

$\because 2AD+DC=2(AD+\frac{1}{2}DC)$

$=2(AD+DF)$，

$\therefore$ 当 A，D，F 在同一直线上，即 $AF\perp CE$ 时，$AD+DF$ 的值最小，最小值等于垂线段 AF 的长，

此时，$\angle B=\angle ADB=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta ABD$ 是等边三角形，

$\therefore AD=BD=AB=2$，

在 RtΔABC 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$，

$\therefore BC=4$，

$\therefore DC=2$，

$\therefore DF=\frac{1}{2}DC=1$，

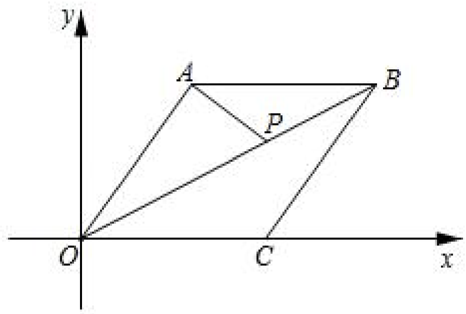
$\therefore AF=AD+DF=2+1=3$，

$\therefore 2(AD+DF)=2AF=6$，

$\therefore 2AD+DC$ 的最小值为 6，

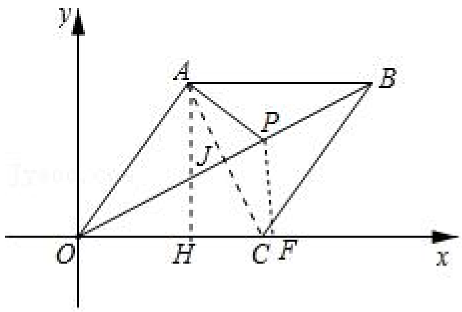
故选：C．

4．如图所示，菱形 $ABCO$ 的边长为 5，对角线 OB 的长为 $4\sqrt{5}$，P 为 OB 上一动点，则 $AP+\frac{\sqrt{5}}{5}OP$ 的最小值为(　　)



A．4　　　　B．5　　　　C．$2\sqrt{5}$　　　　D．$3\sqrt{5}$

【解答】解：如图，过点 A 作 $AH\perp OC$ 于点 H，过点 P 作 $PF\perp OC$ 于点 F，连接 AC 交 OB 于点 J．



$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形，

$\therefore AC\perp OB$，

$\therefore OJ=JB=2\sqrt{5}$，$CJ=\sqrt{OC^2-OJ^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore AC=2CJ=2\sqrt{5}$，

$\because AH\perp OC$，

$\therefore OC\cdot AH=\dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot AC$，

$\therefore AH=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}{5}=4$，

$\therefore \sin\angle POF=\dfrac{PF}{OP}=\dfrac{CJ}{OC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore PF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP$，

$\therefore AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP=AP+PF$，

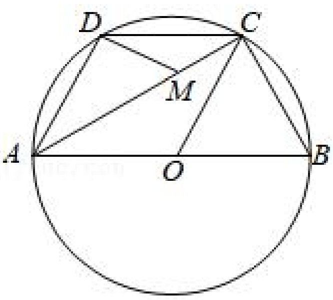
$\because AP+PF\geqslant AH$，

$\therefore AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP\geqslant 4$，

$\therefore AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP$ 的最小值为 4，

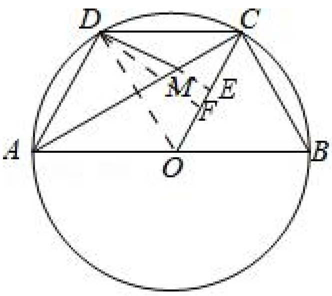
故选：A．

5．如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，AB 为 $\odot O$ 的直径，$AB=16$ ，$\angle ABC=60^{\circ}$ ，D 为弧 AC 的中点，M 是弦 AC 上任意一点（不与端点 A 、C 重合），连接 DM ，则 $\frac{1}{2}CM+DM$ 的最小值是(　　)



A．$4\sqrt{3}$　　B．$3\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．4

【解答】解：过点 M 作 $ME\perp OC$ 于 E ，过点 D 作 $DF\perp OC$ 于 F ，连接 OD ，



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=90^{\circ}$，

$\because \angle ABC=60^{\circ}$，

$\therefore \angle BAC=30^{\circ}$，

$\because OA=OC$，

$\therefore \angle ACO=\angle CAO=30^{\circ}$，

$\therefore ME=\frac{1}{2}MC$，

$\therefore \frac{1}{2}CM+DM=ME+DM$，

$\therefore ME+DM$ 的最小值为 DF 的长，

$\because D$ 为弧 AC 的中点，

$\therefore \angle AOD=\angle COD=60^{\circ}$，

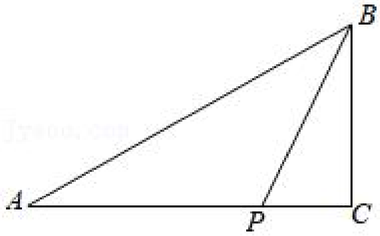
在 Rt△ODF 中，$\sin\angle DOF=\sin 60^{\circ}=\frac{DF}{OD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore DF=\frac{\sqrt{3}}{2}OD=4\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}CM+DM$ 的最小值为：$4\sqrt{3}$，

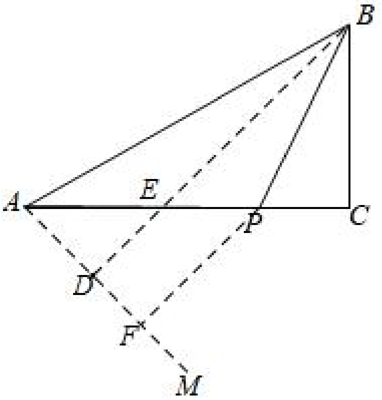
故选：A．

6．在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，P为AC上一动点，若$BC=4$，$AC=6$，则$\sqrt{2}BP+AP$的最小值为(　　)



A．5　　B．10　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$10\sqrt{2}$

【解答】解：以A为顶点，AC为一边在下方作$\angle CAM=45^{\circ}$，过P作$PF\perp AM$于F，过B作$BD\perp AM$于D，交AC于E，如图：



$\sqrt{2}BP+AP=\sqrt{2}(BP+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP)$，要使$\sqrt{2}BP+AP$最小，只需$BP+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP$最小，

$\because\angle CAM=45^{\circ}$，$PF\perp AM$，

$\therefore\Delta AFP$是等腰直角三角形，

$\therefore FP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP$，

$\therefore BP+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP$最小即是$BP+FP$最小，此时$P$与$E$重合，$F$与$D$重合，即$BP+\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP$最小值是线段$BD$的长度，

$\because\angle CAM=45^{\circ}$，$BD\perp AM$，

$\therefore\angle AED=\angle BEC=45^{\circ}$，

$\because\angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore\sin\angle BEC=\sin 45^{\circ}=\dfrac{BC}{BE}$，$\tan\angle BEC=\dfrac{BC}{CE}$，

又$BC=4$，

$\therefore BE=4\sqrt{2}$，$CE=4$，

$\because AC=6$，

$\therefore AE=2$，

而 $\sin\angle CAM=\sin 45^\circ=\dfrac{DE}{AE}$，

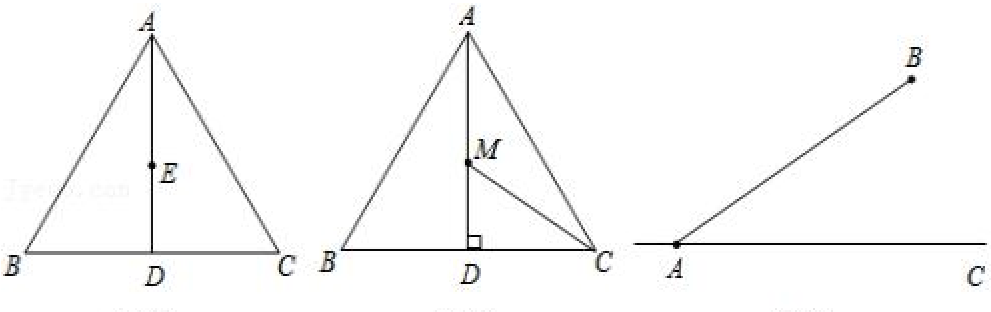
$\therefore DE=\sqrt{2}$，

$\therefore BD=BE+DE=5\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}BP+AP$ 的最小值是 $\sqrt{2}BD=10$，

故选：B．

7．【问题探究】在等边三角形 ABC 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$AB=2$．



（1）如图 1．E 为 AD 的中点，则点 E 到 AB 的距离为 __$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$__；

（2）如图 2，M 为 AD 上一动点．则 $\dfrac{1}{2}AM+MC$ 的最小值为 ____；

【问题解决】如图 3，A，B 两地相距 $600km$，AC 是笔直地沿东西方向向两边延伸的一条铁路，点 B 到 AC 的距离为 $360km$．今计划在铁路线 AC 上修一个中转站 M，再在 BM 间修一条笔直的公路．如果同样的物资在每千米公路上的运费是铁路上的两倍，那么为使通过铁路由 A 到 M 再通过公路由 M 到 B 的总运费达到最小值，中转站 M 应修在距 A 地 ____km 处．

【解答】解：（1）$\because \Delta ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=BC=2$，$\angle BAC=\angle ACB=\angle ABC=60^\circ$，

$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle BAD=30^\circ$，$BD=1$，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，

过 E 作 $EM\perp AB$，垂足为 M，

$\because E$ 为 AD 的中点，

$\therefore AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore EM=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{4}$；

（2）如图，作 $CN\perp AB$，垂足为 N，此时 $\frac{1}{2}AM+MC$ 最小，最小值等于 CN，

$\because$ 在正三角形 ABC 中，$AB=BC=AC=2$，$CN\perp AB$，

$\therefore \angle ACN=\angle BCN=30^{\circ}$，

$\therefore AN=\frac{1}{2}AC=1$，

由勾股定理得，$CN=\sqrt{AC^2-AN^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

由（1）知，$MN=\frac{1}{2}AM$，

$\therefore MN+CM=\frac{1}{2}AM+MC=CN=\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}AM+MC$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$；

【问题解决】如图，作 $BD\perp AC$，垂足为点 D，在 AC 异于点 B 的一侧作 $\angle CAN=30^{\circ}$，

作 $BF\perp AN$，垂足为点 F，交 AC 于 M，则点 M 即为所求，

在 RtΔABD 中，$AB=600km$，$BD=360km$，

$\therefore AD=\sqrt{600^2-360^2}=480$，

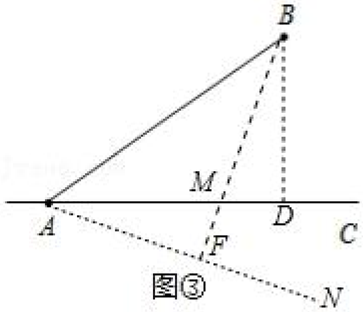
易知 $\angle MBD=\angle MAF=30^{\circ}$，

在 RtΔMBD 中，$\angle MBD=30^{\circ}$，$BD=360km$，则 $MB=2MD$，

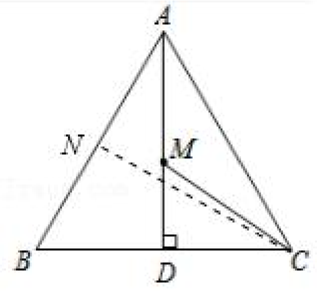
由勾股定理得 $MD=120\sqrt{3}km$，

$\therefore AM=AD-MD=(480-120\sqrt{3})km$．

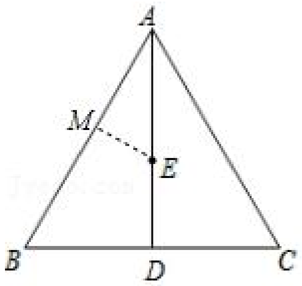
故答案为 $(480-120\sqrt{3})$．



图③

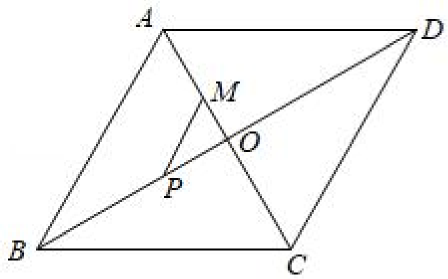


图②

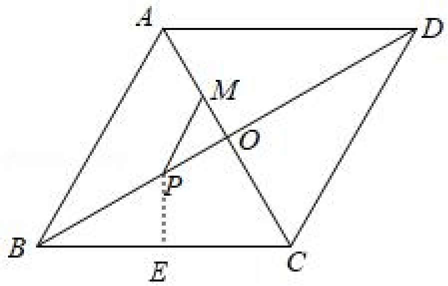


图①

8．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AC=10$，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 M 在线段 AC 上，且 $AM=3$，点 P 为线段 BD 上的一个动点，则 $MP+\frac{1}{2}PB$ 的最小值是 __$\frac{7\sqrt{3}}{2}$__．



【解答】解：如图，过点 P 作 $PE\perp BC$ 于 E，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=AC=10$，

$\therefore AB=BC=AC=10$，$\angle ABD=\angle CBD$，

$\therefore \Delta ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60^{\circ}$，

$\therefore \angle CBD=30^{\circ}$，

$\because PE\perp BC$，

$\therefore PE=\frac{1}{2}PB$，

$\therefore MP+\frac{1}{2}PB=PM+PE$，

$\therefore$当点 M，点 P，点 E 共线且 $ME\perp BC$ 时，$PM+PE$ 有最小值为 ME，

$\because AM=3$，

$\therefore MC=7$，

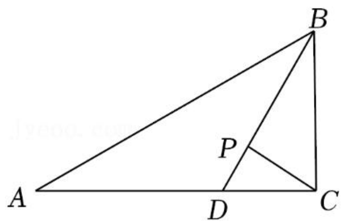
$\because \sin\angle ACB=\frac{ME}{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore ME=\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

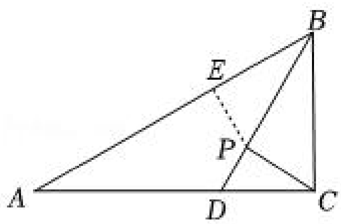
$\therefore MP+\frac{1}{2}PB$ 的最小值为 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$，

故答案为 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

9．如图，直角三角形 ABC 中，$\angle A=30^{\circ}$，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，点 P 是线段 BD 上的动点，求 $CP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值 __$\frac{\sqrt{3}}{2}$__.



【解答】解：如图，过点 P 作 $PE\perp AB$ 于 E，



$\because \angle A=30^{\circ}$，$BC=1$，$\angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore AB=2BC=2$，$\angle ABC=60^{\circ}$，

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD=30^{\circ}$，

$\because PE\perp AB$，

$\therefore PE=\frac{1}{2}PB$，

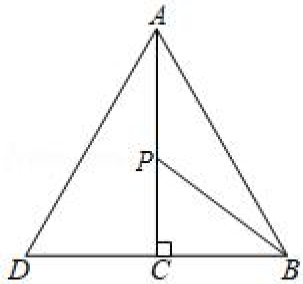
$\therefore CP+\frac{1}{2}PB=CP+PE$，

$\therefore$ 当点 P，点 C，点 E 三点共线，且 $CE\perp AB$ 时，$CP+\frac{1}{2}PB$ 有最小值为 CE，

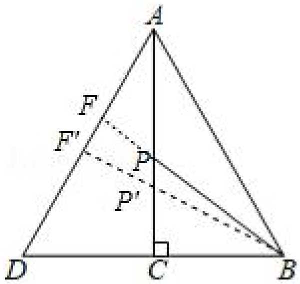
$\therefore CE=\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

10．如图，已知 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，延长 BC 至 D 使 $CD=BC$，连接 AD，且 $AD=4$，点 P 为线段 AC 上一动点，连接 BP．则 $2BP+AP$ 的最小值为__ $4\sqrt{3}$ __．



【解答】解：如图中，作 $PF\perp AD$ 于 F，$BF'\perp AD$ 于 F'，交 AC 于 P'．



$\because \angle PAF=30^\circ$，$\angle PFA=90^\circ$，

$\therefore PF=\frac{1}{2}PA$，

$\therefore 2BP+AP=2(PB+\frac{1}{2}PA)=2(PB+PF)$，

$\therefore$ 当 B、P、F 共线时，即 $BF'\perp AD$ 时，$PB+PF$ 最短，最小值为线段 BF'，

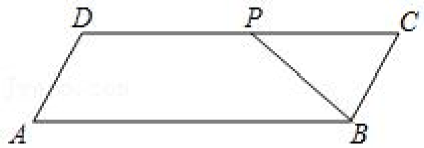
在 $Rt\triangle DF'B$ 中，$\because \angle D=60^\circ$，$DB=4$，

$\therefore BF'=DB\bullet\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，

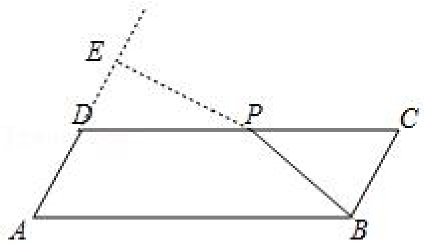
$\therefore 2BP+AP$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$，

故答案为：$4\sqrt{3}$．

11．如图，$\square ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=6$，$BC=2$，P 为边 CD 上的一动点，则 $PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值等于 __ $3\sqrt{3}$ __．



【解答】解：如图，过点 P 作 $PE\perp AD$，交 AD 的延长线于点 E，



$\because AB//CD$

$\therefore \angle EDP=\angle DAB=60^{\circ}$，

$\therefore \sin\angle EDP=\dfrac{EP}{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore EP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PD$

$\therefore PB+\dfrac{\sqrt{3}}{2}PD=PB+PE$

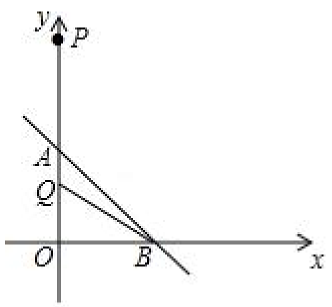
$\therefore$ 当点 B，点 P，点 E 三点共线且 $BE\perp AD$ 时，$PB+PE$ 有最小值，即最小值为 BE，

$\because \sin\angle A=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore BE=3\sqrt{3}$

故答案为：$3\sqrt{3}$

12．如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-x+4$ 的图象分别与 y 轴和 x 轴交于点 A 和点 B．若定点 P 的坐标为 $(0,\ 6\sqrt{3})$，点 Q 是 y 轴上任意一点，则 $\dfrac{1}{2}PQ+QB$ 的最小值为 __$5\sqrt{3}$__．



【解答】解：过点 P 作直线 PD 与 y 轴的夹角 $\angle OPD=30^{\circ}$，作 B 点关于 y 轴的对称点 B'，过 B' 点作 $B'E\perp PD$ 交于点 E、交 y 轴于点 Q，

$\because B'E\perp PD$，$\angle OPE=30^{\circ}$，

$\therefore QE=\frac{1}{2}PQ$，

$\because BQ=B'Q$，

$\therefore \frac{1}{2}PQ+QB=QE+B'Q=B'E$，此时$\frac{1}{2}PQ+QB$取最小值，

$\because \angle OPD=30^{\circ}$，$\angle POD=90^{\circ}$，

$\therefore PD=2OD$，$\angle ODP=60^{\circ}$，

$\because P$的坐标为$(0,\ 6\sqrt{3})$，

$\therefore PO=6\sqrt{3}$，

$\therefore OD^2+(6\sqrt{3})^2=(2OD)^2$，

$\therefore OD=6$，

$\because$直线$y=-x+4$的图象分别与y轴和x轴交于点A和点B，

$\therefore A(0,4)$，$B(4,0)$，

$\therefore OB=4$，

$\therefore OB'=4$，

$\therefore B'D=10$，

$\because B'E\perp PD$，$\angle ODP=60^{\circ}$，

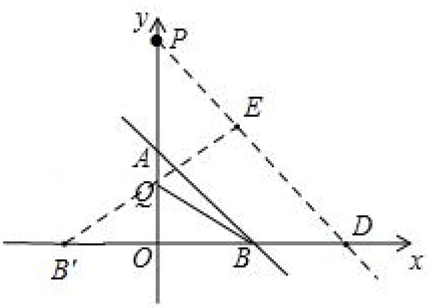
$\therefore \angle EB'D=30^{\circ}$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}B'D=5$，

$\therefore B'E=\sqrt{B'D^2-DE^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$，

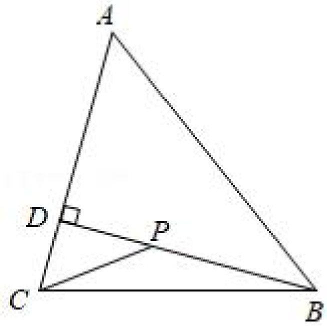
$\therefore \frac{1}{2}PQ+QB$取最小值为$5\sqrt{3}$，

故答案为：$5\sqrt{3}$．

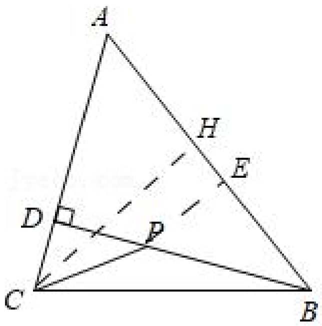


13．如图，在ΔABC中，$AB=5$，$AC=4$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$BD\perp AC$交AC于点D．点P为线段BD上的动

点，则 $PC+\frac{3}{5}PB$ 的最小值为 __$\frac{16}{5}$__.



【解答】解：过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，



$\because BD\perp AC$，

$\therefore\angle ADB=90^{\circ}$，

$\because\sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{4}{5}$，$AB=5$，

$\therefore BD=4$，

由勾股定理得 $AD=\sqrt{AB^{2}-BD^{2}}=\sqrt{5^{2}-4^{2}}=3$，

$\therefore\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{PE}{BP}=\frac{3}{5}$，

$\therefore EP=\frac{3}{5}BP$，

$\therefore PC+\frac{3}{5}PB=PC+PE$，

即点 C、P、E 三点共线时，$PC+\frac{3}{5}PB$ 最小，

$\therefore PC+\frac{3}{5}PB$ 的最小值为 CH 的长，

$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BD=\frac{1}{2}\times AB\times CH$，

$\therefore 4\times4=5\times CH$，

$\therefore CH=\frac{16}{5}$.

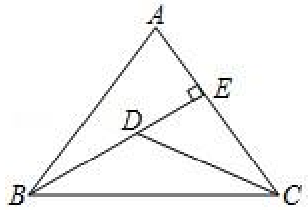
$\therefore PC+\frac{3}{5}PB$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$.

故答案为：$\dfrac{16}{5}$.

14．如图，在ΔABC中，$AB=AC=10$，$\tan A=2$，$BE\perp AC$于点E，D是线段BE上的一个动点，那么：

（1）$AE=$__$2\sqrt{5}$__；

（2）$CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$的最小值是____.



【解答】解：（1）$\because\tan A=2$，$BE\perp AC$，

$\therefore\dfrac{BE}{AE}=2$，

$\therefore$设$BE=2x$，$AE=x$，

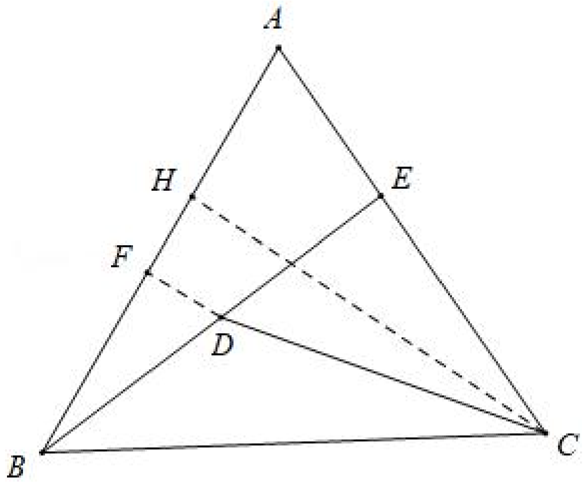
$\therefore x^2+(2x)^2=10^2$，

$\therefore x=2\sqrt{5}$（负值舍去），

$\therefore AE=2\sqrt{5}$，

故答案为$2\sqrt{5}$；

（2）作$DF\perp AB$于F，$CH\perp AB$于H，



$\because AE=2\sqrt{5}$，$AB=10$，

$\therefore\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin\angle ABD=\dfrac{DF}{BD}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore DF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$，

$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD=CD+DF$，

要想 $CD+DF$ 最小，只要 C 、 D 、 F 三点共线，即最小值为 CH，

$\because AB=AC$，

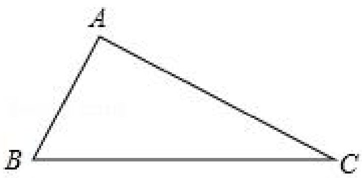
根据等积法可知： $CH=BE$，

由（1）知： $BE=2AE=4\sqrt{5}$，

$\therefore CD+\dfrac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是 $4\sqrt{5}$，

故答案为： $4\sqrt{5}$．

15．如图，在 ΔABC 中， $\angle A=90°$， $\angle B=60°$， $AB=2$，若 D 是 BC 边上的动点，则 $2AD+DC$ 的最小值为__6__．



【解答】解：如图所示，作点 A 关于 BC 的对称点 A'，连接 AA'， $A'D$，过 D 作 $DE\perp AC$ 于 E，

$\because \Delta ABC$ 中， $\angle BAC=90°$， $\angle B=60°$， $AB=2$，

$\therefore BH=1$， $AH=\sqrt{3}$， $AA'=2\sqrt{3}$， $\angle C=30°$，

$\therefore$ RtΔCDE 中， $DE=\dfrac{1}{2}CD$，即 $2DE=CD$，

$\because A$ 与 A' 关于 BC 对称，

$\therefore AD=A'D$，

$\therefore AD+DE=A'D+DE$，

$\therefore$ 当 A'， D， E 在同一直线上时， $AD+DE$ 的最小值等于 $A'E$ 的长，

此时， $Rt\triangle AA'E$ 中， $A'E=\sin 60°\times AA'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3$，

$\therefore AD+DE$ 的最小值为 3，

即 $2AD+CD$ 的最小值为 6，

故答案为：6．