专题一　　“将军饮马”模型详解与拓展

平面几何中涉及最值问题的相关定理或公理有：

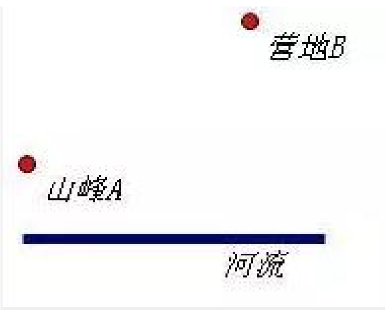
① 线段公理：两点之间，线段最短．并由此得到三角形三边关系；

② 垂线段的性质：从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中,垂线段最短．在一些“线段和最值”的问题中，通过翻折运动，把一些线段进行转化即可应用 ①、② 的基本图形，并求得最值，这类问题一般被称之为“将军饮马”问题。

问题提出：

唐朝诗人李欣的诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河．”诗中隐含着一个有趣的数学问题．

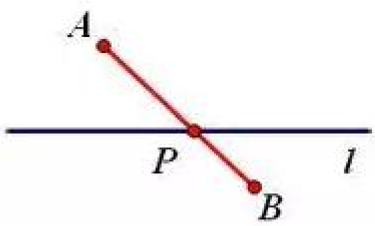
如图所示，诗中将军在观望烽火之后从山脚下的 A 点出发，走到河边饮马后再到 B 点宿营．请问怎样走才能使总的路程最短？



模型提炼：

模型【1】一定直线、异侧两定点

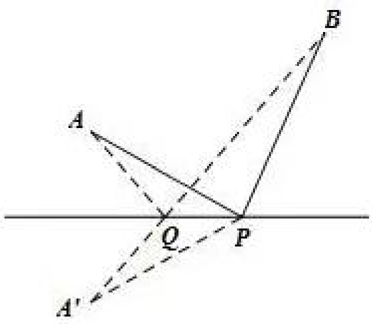
直线 l 和 l 的异侧两点 A、B，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA+PB$ 最小



解答：根据“两点之间，线段距离最短”，所以联结 AB 交直线 l 于点 P，点 P 即为所求点

模型【2】一定直线、同侧两定点

直线 l 和 l 的同侧两点 A、B，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA+PB$ 最小



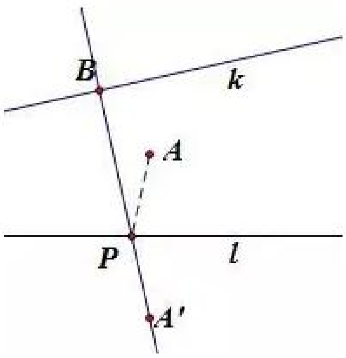
解答：

第一步：画点 A 关于直线 l 的对称点 A'（根据“翻折运动”的相关性质，点 A、A'到对称轴上任意点距离相等，如图所示，$AP=A'P$，即把一定直线同侧两定点问题转化为一定直线异侧两定点问题）

第二步：联结 $A'B$ 交直线 l 于点 Q，根据“两点之间，线段距离最短”，此时“$A'Q+QB$”最短即“$AQ+QB$”最短

模型【3】一定直线、一定点一动点

已知直线 l 和定点 A，在直线 k 上找一点 B（点 A、B 在直线 l 同侧），在直线 l 上找点 P，使得 $AP+PB$ 最小

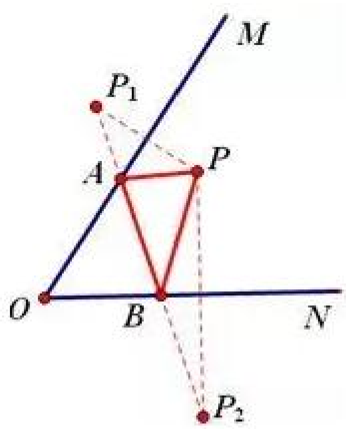


解答：

第一步：画点 A 关于直线 l 的对称点 A'

第二步：过点 A'做 $A'B\perp k$ 于点 B 且交直线 l 于点 P，根据“从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中,垂线段最短”，可知 $A'P+PB$ 最小即 $AP+PB$ 最小

模型【4】一定点、两定直线



点 P 是$\angle MON$ 内的一点，分别在 OM，ON 上作点 A，B，使$\triangle PAB$ 的周长最小

解答：

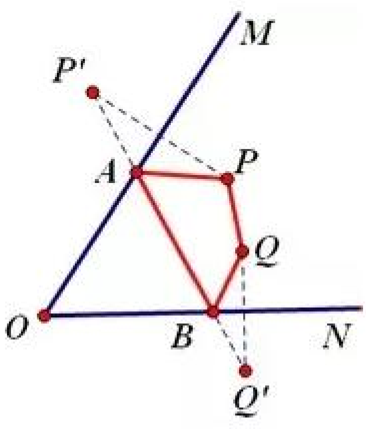
策略：两次翻折

第一步：分别画点 P 关于直线 OM、ON 的对称点 P_1、P_2

第二步：联结 P_1P_2，交 OM、ON 于点 A、点 B

（根据“翻折运动”的相关性质，$AP=AP1$，$BP=BP2$；根据“两点之间，线段距离最短”可知此时 $AP1+BP2+AB$ 最短即$\triangle ABP$ 周长最短）

拓展



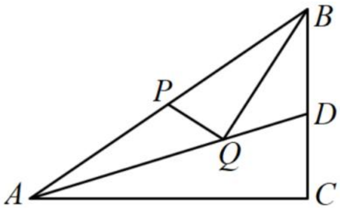
如果两定点、两定直线呢？

“如图，点 P，Q 为$\angle MON$ 内的两点，分别在 OM，ON 上作点 A，B，使四边形 $PAQB$ 的周长最小”

专题一 练习

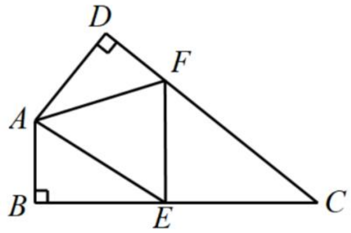
一、填空题

1．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle BAC=30°$，$AB=14$，AD平分$\angle BAC$，点PQ分别是AB，AD边上的动点，则$PQ+BQ$的最小值是（　）



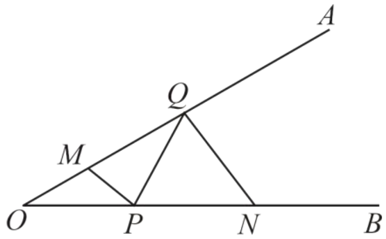
A．4　　B．5　　C．6　　D．7

2．如图，在四边形$ABCD$中，$\angle C=\alpha°$，$\angle B=\angle D=90°$，E，F分别是BC，DC上的点，当$\triangle AEF$的周长最小时，$\angle EAF$的度数为（　）



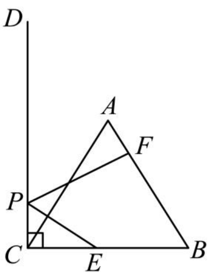
A．α　　B．2α　　C．$180-\alpha$　　D．$180-2\alpha$

3．如图，$\angle AOB=20°$，M，N分别是边OA，OB上的定点，P，Q分别是边OB，OA上的动点，记$\angle OPM=\alpha$，$\angle OQN=\beta$，当$MP+PQ+QN$最小时，则关于α，β的数量关系正确的是（　）



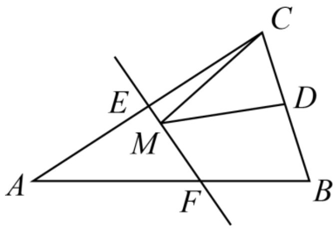
A．$\beta-\alpha=30°$　　B．$\beta+\alpha=210°$　　C．$\beta-2\alpha=30°$　　D．$\beta+\alpha=200°$

4．如图，点E在等边$\triangle ABC$的边BC上，$BE=4$，射线$CD\perp BC$，垂足为点C，点P是射线CD上一动点，点F是线段AB上一动点，当$EP+FP$的值最小时，$BF=6$，则AB的长为（　）

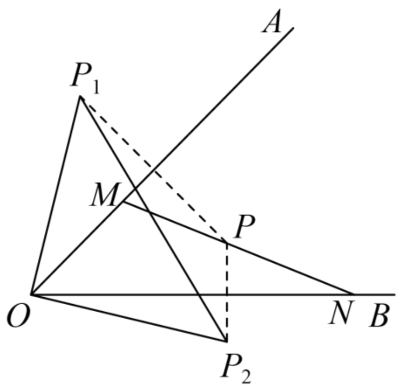


A．7　　B．8　　C．9　　D．10

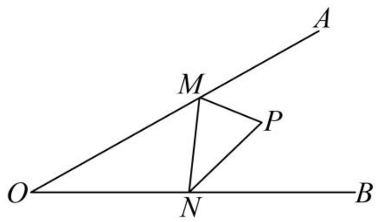
5．如图，在三角形 ABC 中 $AB=AC$，$BC=4$，三角形 ABC 的面积是14，AC 的垂直平分线 EF 分别交 AC，AB 边于点 E，点 F．若点 D 为 BC 边的中点，M 为线段 EF 上一个动点，则三角形 CDM 周长的最小值是______.



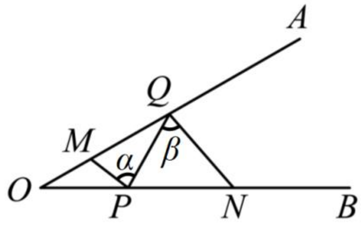
6．如图，$\angle AOB=45°$，点 M、N 分别在射线 OA、OB 上，$MN=8$，$\triangle OMN$ 的面积为 12，P 是直线 MN 上的动点，点 P 关于 OA 对称的点为 P_1，点 P 关于 OB 对称的点为 P_2，当点 P 在直线 NM 上运动时，$\triangle OP_1P_2$ 的面积最小值为______.



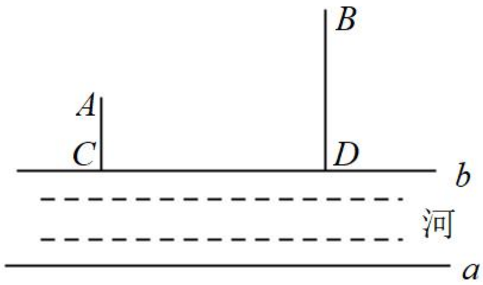
7．如图，$\angle AOB=30°$，点 P 为 $\angle AOB$ 内一点，$OP=10$．点 M、N 分别在 OA,OB 上．当△PMN 周长最小时，下列结论：①$\angle MPN$ 等于$120°$；②$\angle MPN$ 等于$110°$；③$\angle MPN$ 等于$100°$；④$\triangle PMN$ 周长最小值是 5：⑤$\triangle PMN$ 周长最小值是 10；⑥$\triangle PMN$ 周长最小值是 15．其中正确结论的序号是___________.



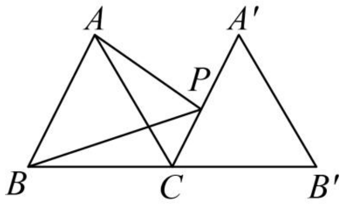
8．如图，$\angle AOB=22°$，点 M，N 分别是边 OA，OB 上的定点，点 P，Q 分别是边 OA，OB 上的动点，记 $\angle MQP=\alpha$，$\angle OPN=\beta$，当 $MQ+QP+PN$ 最小时，则α与β的数量关系为____________.



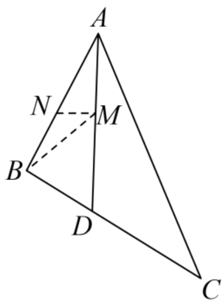
9．为贯彻国家城乡建设一体化和要致富先修路的理念，某市决定修建道路和一座桥，方便张庄 A 和李庄 B 的群众出行到河岸 a．张庄 A 和李庄 B 位于一条河流的同一侧，河的两岸是平行的直线，经测量，张庄 A 和李庄 B 到河岸 b 的距离分别为 $AC=p(\mathrm{m})$， $BD=q(\mathrm{m})$，且 $CD=(p+q)\mathrm{m}$，如图所示．现要求：建造的桥长要最短，然后考虑两村庄到河流另一侧桥头的路程之和最短，则这座桥应建造在 C，D 间距离 C______m 处．（河岸边上的点到河对岸的距离都相等）



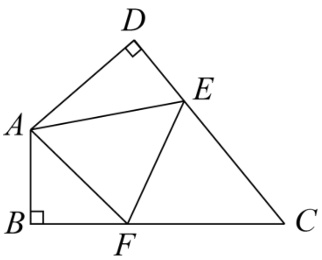
10．如图，等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle A'B'C$ 的边长都是 4，点 B，C，B' 在同一条直线上，点 P 在线段 $A'C$ 上，则 $AP+BP$ 的最小值为__________．



11．如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D，点 M，N 分别是 AD 和 AB 上的动点，当 $S_{\triangle ABC}=12$，$AC=8$ 时，$BM+MN$ 的最小值等于_____．



12．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=50^\circ$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$E$，$F$ 分别是 BC，DC 上的点，当 $\triangle AEF$ 的周长最小时，求 $\angle EAF$ 的度数．



二、解答题

1.已知如图，在$\square ABCD$中，点E是AD边上一点，连接$BE,CE,BE=CE,BE\perp CE$，点F是EC上一动点，连接BF.

（1）如图1，当$BF\perp AB$时，连接DF，延长BE,CD交于点K，求证：$FD=DK$；

（2）如图2，以BF为直角边作等腰$Rt\triangle FBG,\angle FBG=90°$，连接$GE$，若$DE=\sqrt{2},CD=\sqrt{5}$，当点$F$在运动过程中，求$\triangle BEG$周长的最小值.

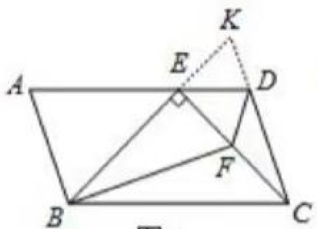


图 1

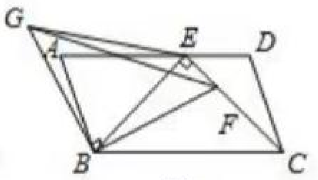
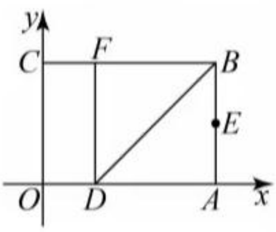


图 2

2. 如图，以矩形$OABC$的顶点O为原点，OA所在的直线为x轴，OC所在的直线为y轴，建立平面直角坐标系. 已知$OA=3$，$OC=2$，点E是AB的中点，在OA上取一点D，将$\triangle BDA$沿BD翻折，使点A落在BC边上的点F处.

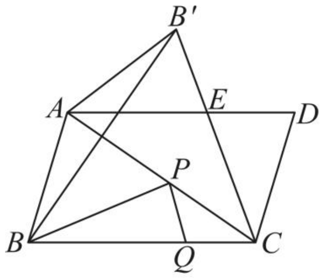


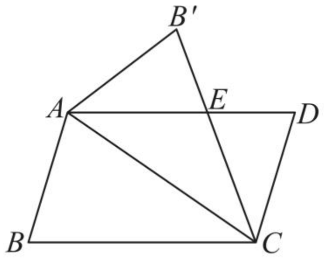
(1)直接写出点E、F的坐标；

(2)连接EF交BD于点G，求$\triangle BGE$的面积.

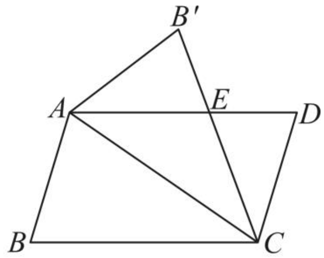
(3)在x轴、y轴上是否分别存在点M、N，使得四边形$MNFE$的周长最小？如果存在，求出周长的最小值和直线MN的函数解析式；如果不存在，请说明理由.

3．如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，将$\triangle ABC$沿$AC$所在的直线折叠至$\triangle AB'C$的位置，点$B$的对应点为$B'$，连结$BB'$．





(备用图1)



(备用图2)

(1)直接填空：$B'B$与AC的位置关系是__________；

(2)点P、Q分别是线段AC、BC上的两个动点（不与点A、B、C重合），已知$\triangle BB'C$的面积为36，$BC=8$，求$PB+PQ$的最小值；

(3)试探索：$\triangle ABC$的内角满足什么条件时，$\triangle AB'E$是直角三角形？

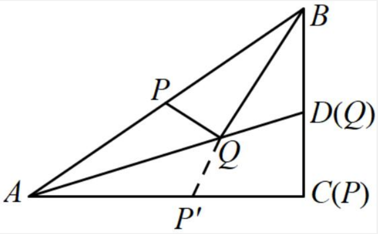
参考答案

一、填空题

1．【答案】D

【分析】作点 P 关于直线 AD 的对称点 P'，连接 QP'，证明 $\triangle AQP \cong \triangle AQP'(\text{SAS})$，得 $PQ=QP'$，欲求 $PQ+BQ$ 的最小值，只要求出 $BQ+QP'$ 的最小值，即当 $BP' \perp AC$ 时，$BQ+QP'$ 的值最小，此时 Q 与 D 重合，P' 与 C 重合，最小值为 BC 的长．

【详解】解：如图，作点 P 关于直线 AD 的对称点 P'，连接 QP'，



在 $\triangle AQP$ 和 $\triangle AQP'$ 中，

$$\begin{cases} AP=AP' \\ \angle QAP=\angle QAP' \\ AQ=AQ \end{cases},$$

$\therefore \triangle AQP \cong \triangle AQP'(\text{SAS})$，

$\therefore PQ=QP'$，

$\therefore$ 欲求 $PQ+BQ$ 的最小值，只要求出 $BQ+QP'$ 的最小值，

$\therefore$ 当 $BP' \perp AC$ 时，$BQ+QP'$ 的值最小，此时 Q 与 D 重合，P' 与 C 重合，最小值为 BC 的长．

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\because \angle C=90°$，$AB=14$，$\angle BAC=30°$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=7$，

$\therefore PQ+BQ$ 的最小值是 7，

故选：D．

【点睛】本题考查了勾股定理、轴对称中的最短路线问题、垂线段最短等知识，找出点 P、Q 的位置是解题的关键．

2．【答案】D

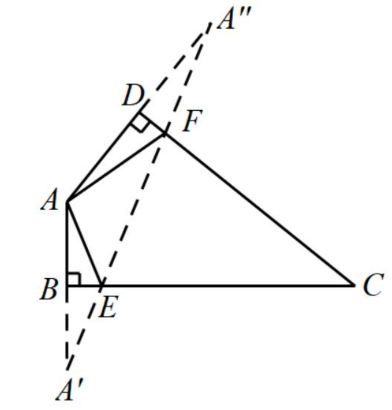
【分析】要使 $\triangle AEF$ 的周长最小，即利用点的对称，使三角形的三边在同一直线上，作出 A 关于 BC 和 CD 的对称点 A'，A''，即可得出 $\angle AA'E+\angle A''=\alpha$，即可得出答案．

【详解】解：作 A 关于 BC 和 CD 的对称点 A'，A''，连接 $A'A''$，交 BC 于 E，交 CD 于 F，

$\therefore AF=A''F$，$AE=A'E$，

∴ $\angle EA'A=\angle EAA'$， $\angle FAD=\angle A''$，

则 $A'A''$ 即为 $\triangle AEF$ 的周长最小值，



∵ $\angle C=\alpha$， $\angle ABC=\angle ADC=90°$

∴ $\angle DAB=180°-\alpha$，

∴ $\angle AA'E+\angle A''=180°-(180°-\alpha)=\alpha$，

∵ $\angle EA'A=\angle EAA'$， $\angle FAD=\angle A''$，

∴ $\angle EAA'+\angle A''AF=\alpha$，

∴ $\angle EAF=180°-\alpha-\alpha=180°-2\alpha$，

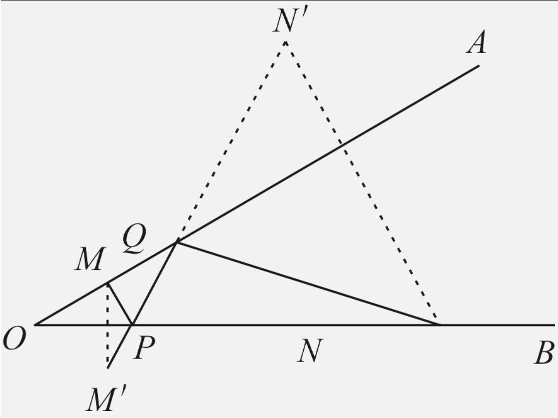
故选：D．

【点睛】本题考查的是轴对称－最短路线问题，涉及到平面内最短路线问题求法以及三角形的外角的性质和垂直平分线的性质等知识，根据已知得出 E， F 的位置是解题关键．

3．【答案】D

【分析】如图，作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 Q，交 OB 于 P，则 $MP+PQ+QN$ 最小，易知 $\angle OPM=\angle OPM'=\angle NPQ$， $\angle OQP=\angle AQN'=\angle AQN$，$\angle OQN=180°-20°-\angle ONQ$， $\angle OPM=\angle NPQ=20°+\angle OQP$， $\angle OQP=\angle AQN=20°+\angle ONQ$， 由此即可解决问题．

【详解】解：如图，作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 Q，交 OB 于 P，则 $MP+PQ+QN$ 最小，



由轴对称的性质得 $\angle OPM=\angle OPM'=\angle NPQ$， $\angle OQP=\angle AQN'=\angle AQN$， $\angle OQN=180^\circ-20^\circ-\angle ONQ$，

$\angle OPM=\angle NPQ=20^\circ+\angle OQP$， $\angle OQP=\angle AQN=20^\circ+\angle ONQ$，

$\therefore \alpha+\beta=180^\circ-20^\circ-\angle ONQ+20^\circ+20^\circ+\angle ONQ=200^\circ$.

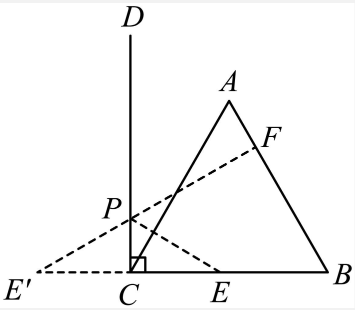
故选：D．

【点睛】本题考查轴对称-最短问题、三角形的内角和定理．三角形的外角的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

4．【答案】B

【分析】作 E 点关于 CD 的对称点 E'，过 E' 作 $E'F\perp AB$ 交于点 F，交 CD 于点 P，连接 PE，当 E',P,F 三点共线，$E'F\perp AB$ 时，$EP+FP$ 的值最小，利用 30° 所对直角边等于斜边一半求出 $BE'=12$，最后根据边长关系计算 AB 的长即可．

【详解】解：作 E 点关于 CD 的对称点 E'，过 E' 作 $E'F\perp AB$ 交于点 F，交 CD 于点 P，连接 PE，



$\therefore PE=PE'$， $CE=CE'$，

$\therefore EP+FP=PE'+PF\geq E'F$，

当 E',P,F 三点共线， $E'F\perp AB$ 时， $EP+FP$ 的值最小，

$\because \triangle ABC$ 是正三角形，

$\therefore \angle B=60^\circ$，

$\because E'F\perp AB$，

$\therefore \angle FE'B=90^\circ-\angle B=30^\circ$，

∴ $BE' = 2BF$，

∵ $BF = 6$， $BE = 4$，

∴ $BE' = 2BF = 12$，

∵ $CE = CE'$，

∴ $12 = 2CE + BE = 2CE + 4$，

∴ $CE = 4$，

∴ $BC = 4 + 4 = 8$，

故选：B．

【点睛】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短距离的方法，等边三角形的性质，直角三角形的性质是解题的关键．

5．【答案】9

【分析】根据轴对称—最短路径得到 AD 是 $CM + DM$ 的最小值，再根据等腰三角形的性质及三角形的面积即可解答．

【详解】解：连接 AD，交 EF 于点 M'，连接 CM'，

∵ EF 是 AC 的垂直平分线，

∴ $CM' = AM'$，

∴ $CM' + DM' = AM' + DM' = AD$，

∴ $CM + DM$ 有最小值为 AD，

∵在三角形 ABC 中 $AB = AC$，点 D 为 BC 边的中点，

∴ $AD \perp BC$，

∵三角形 ABC 的面积是 14，$BC = 4$，

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = 2AD = 14$，

∴ $AD = 7$，

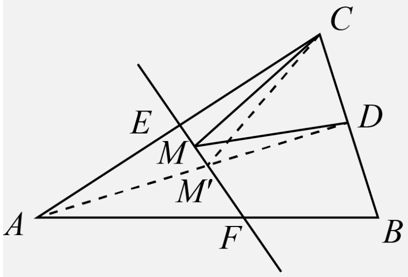
∴ $CM' + DM' = 7$，

∵点 D 为 BC 边的中点，

∴ $CD = \frac{1}{2}BC = 2$，

∴三角形 CDM 周长的最小值是 $7 + 2 = 9$，

故答案为9；

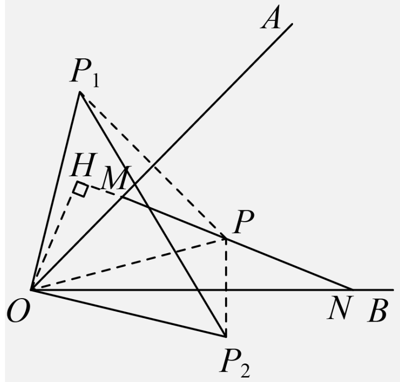


【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，轴对称—最短路径，三角形的面积公式，根据题意找到$CM+DM$有最小值是解题的关键．

6．【答案】$\frac{9}{2}$

【分析】连接OP，过点O作$OH\perp MN$交NM的延长线于H，先利用三角形的面积公式求出OH，再根据轴对称的性质可得$\angle AOP=\angle AOP_1$，$\angle BOP=\angle BOP_2$，$OP_1=OP=OP_2$，从而可得$\angle P_1OP_2=90^\circ$，然后利用三角形的面积公式可得$\triangle OP_1P_2$的面积为$\frac{1}{2}OP^2$，可得当点P与点H重合时，OP取得最小值，$\triangle OP_1P_2$的面积最小，由此即可得．

【详解】解：如图，连接OP，过点O作$OH\perp MN$交NM的延长线于H，



$\because S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}MN\cdot OH=12$，且$MN=8$，

$\therefore OH=3$，

$\because$点P关于OA对称的点为P_1，点P关于OB对称的点为P_2，

$\therefore \angle AOP=\angle AOP_1$，$\angle BOP=\angle BOP_2$，$OP_1=OP=OP_2$，

$\because \angle AOB=45^\circ$，

$\therefore \angle P_1OP_2=2(\angle AOP+\angle BOP)=2\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore \triangle OP_1P_2$的面积为$\frac{1}{2}OP_1\cdot OP_2=\frac{1}{2}OP^2$，

由垂线段最短可知，当点P与点H重合时，OP取得最小值，最小值为$OH=3$，

$\therefore \triangle OP_1P_2$的面积的最小值为$\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$，

故答案为：$\frac{9}{2}$.

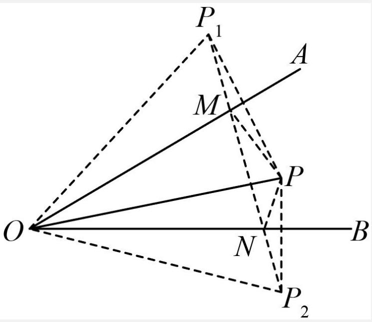
【点睛】本题考查了轴对称、垂线段最短等知识点，掌握轴对称的性质是关键.

7.【答案】①⑤/⑤①

【分析】分别作点 P 关于 OA,OB 的对称点 P_1,P_2，连接 P_1,P_2，交 OA 于 M，交 OB 于 N，可得 $\triangle PMN$ 的周长的最小值 $=P_1P_2$，然后证明 $\triangle OP_1P_2$ 是等边三角形，即可求解.

【详解】解：分别作点 P 关于 OA,OB 的对称点 P_1,P_2，连接 P_1,P_2，交 OA 于 M，交 OB 于 N，则

$OP_1=OP=OP_2=10,\angle P_1OA=\angle POA,\angle POB=\angle P_2OB$，$MP=P_1M,PN=P_2N$，



∴ $PM+PN+MN=P_1M+P_2N+MN\geq P_1P_2$

即 $\triangle PMN$ 的周长的最小值 $=P_1P_2$，

∵ $\angle AOB=30°$，

∴ $\angle P_1OP_2=2\angle AOB=60°$，

∴ $\triangle OP_1P_2$ 是等边三角形，

∴ $\angle MPN=\angle OPM+\angle OPN=\angle OP_1M+\angle OP_2N=120°$，$P_1P_2=OP_1=OP_2=OP=10$，

即 $\triangle PMN$ 的周长的最小值为 10，

∴①⑤正确，

故答案为：①⑤.

【点睛】此题考查轴对称——最短路线问题，正确正确作出辅助线，证明 $\triangle OP_1P_2$ 是等边三角形是关键.

8.【答案】$\beta-\alpha=44°$

【分析】作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 P，交 OB 于 Q，则 $MQ+QP+PN$ 最小，易知 $\angle OQM=\angle OQM'=\angle NQP$，$\angle OPQ=\angle APN'=\angle APN$，根据三角形的外角的性质和平角的定义即可得到结论.

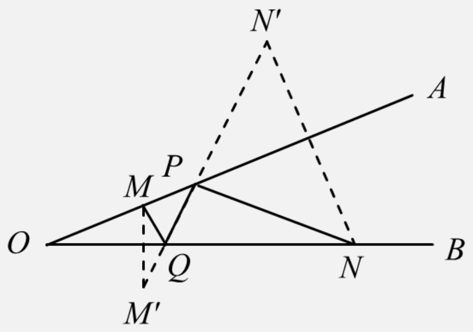
【详解】解：如图，作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 P，交 OB 于 Q，则 $MQ+QP+PN$ 最小，

∴ $\angle OQM=\angle OQM'=\angle NQP$，$\angle OPQ=\angle APN'=\angle APN$，

∴ $\angle PQN=\frac{1}{2}\left(180°-\alpha\right)=\angle AOB+\angle MPQ=22°+\frac{1}{2}\left(180°-\beta\right)$，

∴ $\beta-\alpha=44°$，

故答案为：$\beta-\alpha=44°$．

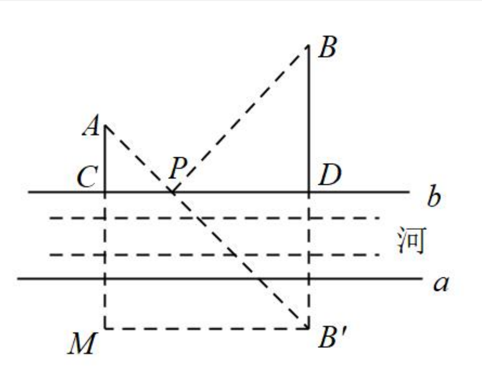


【点睛】本题考查轴对称—最短问题、三角形的内角和定理．三角形的外角的性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

9．【答案】p

【分析】作 B 点关于直线 b 的对称点 B'，连接 AB' 交直线 b 于点 P，则 $BP=B'P$，则 $AP+BP=AP+B'P\geq AB'$，此时 P 点到 A 与 B 的距离和最小，过 B' 作 $B'M\parallel CD$，延长 AC 与 $B'M$ 交于点 M，则 $B'M=CD$，得到 $AM=\left(p+q\right)\mathrm{m}$，再得到 $\triangle AMB'$ 是等腰直角三角形，$\triangle ACP$ 是等腰直角三角形，得到 $AC=CP$，即可得到答案．

【详解】解：作 B 点关于直线 b 的对称点 B'，连接 AB' 交直线 b 于点 P，



∴ $BP=B'P$，

∴ $AP+BP=AP+B'P\geq AB'$，此时 P 点到 A 与 B 的距离和最小，

过 B' 作 $B'M\parallel CD$，延长 AC 与 $B'M$ 交于点 M，

∴ $B'M=CD$，

∵ $AC=p(\mathrm{m})$， $BD=q(\mathrm{m})$， $CD=(p+q)\mathrm{m}$，

∴ $AM=(p+q)\mathrm{m}$，

∴ $B'M=AM$，

∴ $\triangle AMB'$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle CAP=45°$，

∴ $\triangle ACP$ 是等腰直角三角形，

∴ $AC=CP$，

∴点 P 与 C 点的距离是 $p\mathrm{m}$，

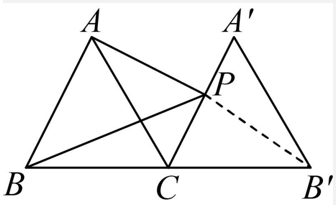
故答案为： p

【点睛】此题考查了轴对称最短路径问题，还考查了等腰直角三角形的判定和性质，按照要求正确作图是解题的关键.

10．【答案】8

【分析】连接 PE，根据 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C$ 都是边长为 4 的等边三角形，证明 $\triangle ACP≌\triangle B'CP$，可得 $AP=B'P$，所以 $AP+BP=BP+B'P$，进而可得当点 P 与点 C 重合时， $AP+BP$ 的值最小，正好等于 BB' 的长，即可求解.

【详解】解：如图，连接 PB'，



∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C$ 都是边长为 4 的等边三角形，

∴ $AC=B'C$， $\angle ACB=\angle A'CB'=60°$，

∴ $\angle ACA'=60°$，

∴ $\angle ACA'=\angle A'CB'$，

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle B'CP$ 中，

$$\begin{cases} AC=B'C \\ \angle ACA'=\angle A'CB' \\ CP=CP \end{cases},$$

∴ $\triangle ACP≌\triangle B'CP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AP = B'P$，

$\therefore AP + BP = BP + B'P$，

∴当点 P 与点 C 重合时，点 A 与点 B' 关于 $A'C$ 对称， $AP + BP$ 的值最小，正好等于 BB' 的长，

$\therefore AP + BP$ 的最小值为 $4 + 4 = 8$，

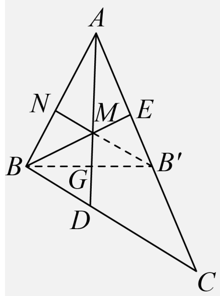
故答案为：8．

【点睛】本题考查了轴对称—最短路线问题、全等三角形的判定和性质和等边三角形的性质，灵活运用所学知识求解是解决本题的关键．

11．【答案】3

【分析】根据 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线确定出点 B 关于 AD 的对称点 B' 在 AC 上，根据垂线段最短，过点 B' 作 $B'N \perp AB$ 于 N 交 AD 于 M，根据轴对称确定最短路线问题，点 M 即为使 $BM + MN$ 最小的点，$B'N = BM + MN$，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于 E，利用三角形的面积求出 BE，再根据等腰三角形两腰上的高相等可得 $B'N = BE$，从而得解．

【详解】解：如图，过 B 作 $BB' \perp AD$ 于 G 交 AC 于 B'，



则 $\angle AGB = \angle AGB' = 90°$，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAG = \angle B'AG$，

$\because AG = AG$，

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AB'G(\text{ASA})$，

$\therefore BG = B'G$，

∴点 B 关于 AD 的对称点 B' 在 AC 上，

过点 B' 作 $B'N \perp AB$ 于 N 交 AD 于 M，

由轴对称确定最短路线问题，点 M 即为使 $BM + MN$ 最小的点， $B'N = BM + MN$，

过点 B 作 $BE \perp AC$ 于 E，

$\because AC = 8$， $S_{\triangle ABC} = 12$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 8\cdot BE=12$，

解得 $BE=3$，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线， B' 与 B 关于 AD 对称，

$\therefore AB=AB'$，

$\therefore \triangle ABB'$ 是等腰三角形，

$\therefore B'N=BE=3$，

即 $BM+MN$ 的最小值是 3.

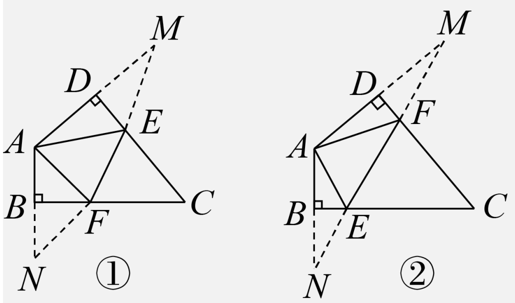
故答案为：3.

【点睛】本题考查了轴对称确定最短路线问题，垂线段最短的性质，等腰三角形两腰上的高相等的性质，熟练掌握各性质并准确确定出点 M 的位置是解题的关键.

12. 【答案】$80°$

【分析】作点 A 关于 BC 的对称点 H，作 A 点关于 CD 的对称点 G，连结 GH 交 BC 于 E 点，交 CD 于点 F，当 G、F、E、H 共线时，$\triangle AEF$ 的周长最小，先求 $\angle BAE+\angle DAF=50°$，则 $\angle EAF=130°-50°=80°$.

【详解】解：如答图①，分别作点 A 关于直线 CD， CB 的对称点 M， N，



则 $AF=MF$， $AE=NE$.

$\therefore \triangle AEF$ 的周长 $=AF+EF+AE=MF+EF+NE$，

$\therefore$ 当 M， F， E， N 四点共线（如答图②）时，$\triangle AEF$ 的周长取到最小值.

$\because \angle ABC=\angle ADC=90°$， $\angle C=50°$，

$\therefore \angle BAD=130°$.

根据轴对称的性质可得 $\angle FMD=\angle FAD$， $\angle ENB=\angle EAB$.

又由三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角和，可得

$\angle MFC+\angle NEC=\angle FMD+\angle FDM+\angle ENB+\angle NBE$

$=\angle FMD+90°+\angle ENB+90°=\angle FMD+\angle ENB+180°$，

又 $\because \angle MFC+\angle NEC=\angle FEC+\angle C+\angle EFC+\angle C\ \ =(\angle FEC+\angle C+\angle EFC)+\angle C$

$=\angle 180°+\angle C$，

$\therefore \angle FMD+\angle ENB+180°=180°+\angle C$，

$\therefore \angle FMD+\angle ENB=\angle C=50°$，

$\therefore \angle FAD+\angle EAB=50°$，

$\therefore \angle EAF=130°-50°=80°$．

【点睛】本题考查轴对称求最短距离，熟练掌握轴对称求最短的方法，灵活应用三角形、四边形内角和是解题的关键.

二、解答题

1．证明：（1）∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB \parallel CD$，∴$\angle K=\angle ABE$，∵$BF\perp AB$，$BE\perp CE$，

∴$\angle ABF=90°$，$\angle BEF=\angle CEK=90°$，

∴$\angle ABE=90°-\angle EBF=\angle BFE$，∴$\angle K=\angle BFE$，

∵$BE=CE$，∴$\triangle CEK\cong\triangle BEF$（$AAS$），

∴$CK=BF$，$EK=EF$，∵$AD\parallel BC$，

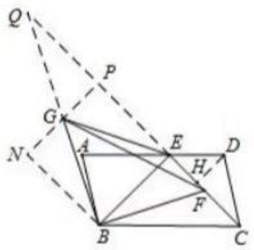
∴$\angle KED=\angle EBC$，$\angle FED=\angle ECB$，

∵$BE=CE$，∴$\angle EBC=\angle ECB$，

∴$\angle KED=\angle FED$，∴$ED=ED$，

∴$\triangle KED\cong\triangle FED$（$SAS$），∴$DK=DF$，

（2）如图，作 $BN\perp BE$，$GN\perp BN$ 于点 N，延长 NG 交射线 CE 于点 P，



则$\angle EBN=\angle FBG=90°$，

∴$\angle NBG=\angle EBF=90°-\angle GBE$，

∵$\angle N=\angle BEF=90°$，$BG=BF$，

∴$\triangle BNG\cong\triangle BEF$（$AAS$），∴$BN=BE$；

∵$\angle EBN=\angle N=\angle BEP=90°$，

∴四边形 $BEPN$ 是正方形，∴$PE=BE=CE$，

∴当点 F 在 CE 上运动时，点 G 在 PN 上运动；

延长 EP 到点 Q，使 $PQ=PE$，连接 BQ 交 PN 于点 G，

∵PN 垂直平分 EQ，∴点 Q 与点 E 关于直线 PN 对称，

∵两点之间，线段最短，

∴此时 $GE+GB=GQ+GB=BQ$ 最小，∵BE 为定值，

∴此时 $GE+GB+BE$ 最小，即$\triangle BEG$ 的周长最小；

作 $DH\perp CE$ 于点 H，则$\angle DHE=\angle DHC=90°$，

∵$\angle ECB=\angle EBC=45°$，∴$\angle HED=\angle ECB=45°$，

∴$\angle HDE=45°=\angle HED$，

∴$DH=EH$，

∴$DH^2+EH^2=2DH^2=DE^2=(\sqrt{2})^2$，

∴$DH=EH=1$；

∴$CH=\sqrt{CD^2-DH^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$，

∴$BE=CE=EH+CH=1+2=3$，

∴$EQ=2PE=2BE=6$，

∵$\angle BEQ=90°$，

∴$BQ=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，

∴$GE+GB+BE=3\sqrt{5}+3$，

∴$\triangle BEG$ 周长的最小值为 $3\sqrt{5}+3$．

2．（1）解：∵$OA=3$，$OC=2$，

∴点A $(3,0)$， 点C $(0,2)$，点B $(3,2)$，

∵点E是AB的中点，∴点E $(3,1)$；

∵将$\triangle BDA$沿BD翻折，使点A落在BC边上的点F处．

∴$BF=BA=2$，$CF=1$，点F $(1,2)$；

（2）∵$\triangle BDA$沿BD翻折，使点A落在BC边上的点F处．

∴$\angle ABD=\angle FBD=\frac{1}{2}\times 90^{\circ}=45^{\circ}$，

∴$AB=AD=BF=DF=2$，$DF\parallel BE$，

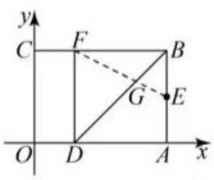
即：$\angle DGF=\angle BGE$，$\angle FDB=\angle GBE$

∴$\triangle DFG\backsim\triangle BEG$， $\frac{FG}{EG}=\frac{DF}{BE}=\frac{2}{1}$，

∴$\frac{EF}{EG}=\frac{3}{1}$，即：$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle BEG}}=\frac{3}{1}$

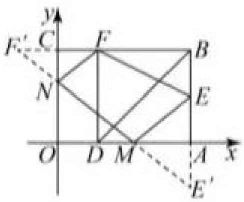
∵$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}BE\cdot BF=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$，

∴$S_{\triangle BGE}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}=\frac{1}{3}$，∴$\triangle BGE$的面积为$\frac{1}{3}$；



（3）在x轴、y轴上存在点M、N，使得四边形$MNFE$的周长最小；如图，作点E关于x轴的对称点为E'，点F关于y轴的对称点为F'，连接$E'F'$，$E'F'$与x轴、y轴上交于点M、点N，此时的点M、N使得四边形$MNFE$的周长

最小；



由对称性可知：点$E'(3,-1)$，点$F'(-1,2)$，$ME=ME'$，

$NF=NF'$，在 Rt△$BE'F'$中，

∵$BE'=2-(-1)=3$，$BF'=3-(-1)=4$，

∴$E'F'=5$，∴$ME+MN+NF=ME'+MN+NF'=$

$E'F'=5$，又∵$EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$BE+MN+NF+EF=5+\sqrt{5}$；

四边形$MNFE$的周长最小为：$5+\sqrt{5}$；

设直线MN的函数解析式$y=kx+b$，

∵直线MN经过点$E'(3,-1)$，点$F'(-1,2)$，代入得：

$\begin{cases}3k+b=-1\\-k+b=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\b=\frac{5}{4}\end{cases}$

直线MN的函数解析式：$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

3．【答案】(1) $B'B\perp AC$

(2)9

(3)当$\angle ACB=45°$时，$\angle AEB'=90°$；当$\angle ABC=90°$时，$\angle AB'E=90°$

【分析】（1）根据轴对称的性质即可判断；

（2）根据对称的性质，在$B'C$上取点M，使得$CQ=CM$，结合对称性质推出$PB+PQ=PB+PM$，确定三点共线且垂直于$B'C$时，取得最小值，结合面积进行计算即可；

（3）分$\angle AB'E=90°$和$\angle AEB'=90°$两种情况，根据翻折变换的性质和平行线的性质解答.

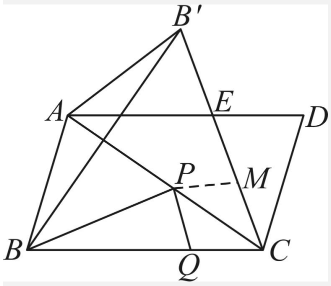
【详解】（1）解：∵△ABC沿AC所在的直线折叠至△$AB'C$的位置，点B的对应点为B'，

∴$B'B\perp AC$，

故答案为：$B'B\perp AC$；

（2）解：如图所示，在$B'C$上取点M，使得$CQ=CM$，连接PM，

根据对称的性质，$PQ=PM$，

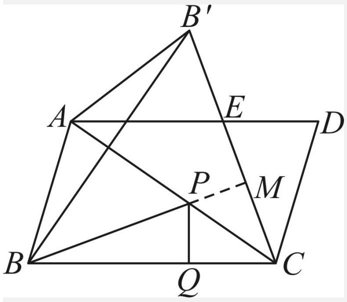


∴ $PB+PQ=PB+PM$，

要求 $PB+PQ$ 的最小值，求 $PB+PM$ 的最小值即可，

∴当 B、P、M 三点共线，且 $BM\perp B'C$ 时，$PB+PM$ 取得最小值，

此时 $PB+PM=BM$，如图所示，



由对称的性质，$B'C=BC=8$，

∵取得最小值时，$BM\perp B'C$，

∴ $S_{\triangle BB'C}=\frac{1}{2}B'C\cdot BM$，

即：$36=\frac{1}{2}\times 8\cdot BM$，解得：$BM=9$，

∴ $PB+PQ$ 的最小值为 9；

（3）解：①当 $\angle ACB=45°$ 时，$\angle AEB'=90°$；

∵由翻折变换的性质可知，$\angle BCA=\angle B'CA$，

∴ $\angle BCB'=90°$，

∵ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，

∴ $\angle BCA=\angle DAC$，

∴ $AD // BC$，

∴ $\angle AEB'=\angle BCB'=90°$；

②由翻折的性质，当 $\angle ABC=90°$ 时，$\angle AB'E=90°$．

【点睛】本题考查全等三角形的性质、翻折变换的性质、轴对称-最短路径问题、等腰三角形的性质等，熟知折叠是一种对称变换，属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等是解题关键．