专题二 瓜豆原理中动点轨迹直线型最值问题以及逆向构造

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同．

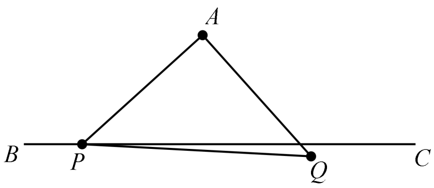
只要满足：

1. 两“动”，一“定”；
2. 两动点与定点的连线夹角是定角
3. 两动点到定点的距离比值是定值。

则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

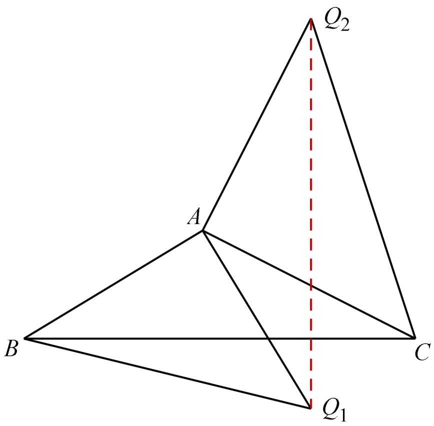
【引例】

如图，△APQ是等腰直角三角形，$\angle PAQ=90°$ 且 $AP=AQ$，当点 P 在直线 BC 上运动时，求 Q 点轨迹？



【分析】当 AP 与 AQ 夹角固定且 $AP:AQ$ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形．

当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段．



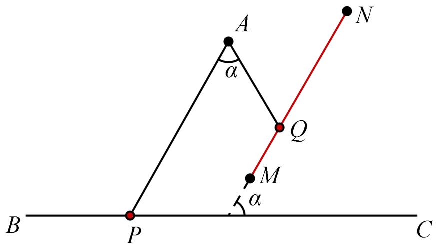
【模型总结】

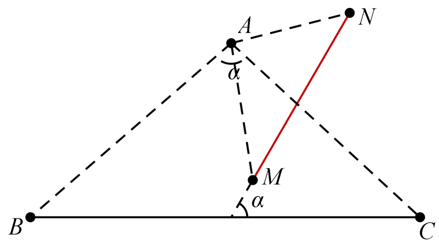
必要条件：

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（$\angle PAQ$ 是定值）；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（$AP:AQ$ 是定值）．

结论：P、Q 两点轨迹所在直线的夹角等于$\angle PAQ$（当$\angle PAQ \leqslant 90°$ 时，$\angle PAQ$ 等于 MN 与 BC 夹角）

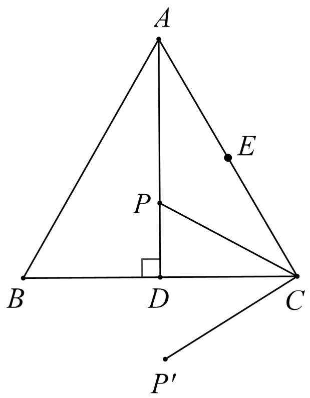


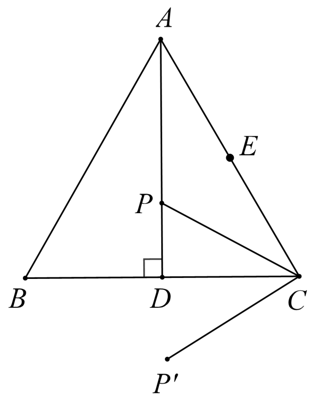


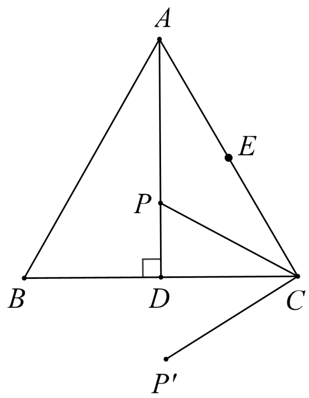
P、Q两点轨迹长度之比等于 $AP:AQ$（由△ABC∽△AMN，可得 $AP:AQ=BC:MN$）

【例题】

如图，D、E是边长为 4 的等边三角形 ABC 上的中点，P为中线 AD 上的动点，把线段 PC绕 C点逆时针旋转 60°，得到 P'，EP' 的最小值







结合这个例题我们再来熟悉一下瓜豆模型

第一层：点 P' 运动的轨迹是直线吗？

第二层：点 P' 的运动长度和点 P的运动长度相同吗？

第三层：手拉手模型怎么构造？

第四层：分析∠CAP和∠CBP'

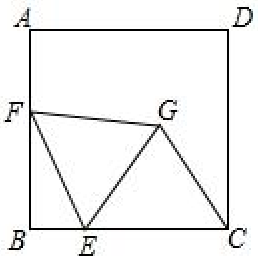
第五层：点 P和点 P' 轨迹的夹角和旋转角的关系

总共提到了 3 种处理方式：

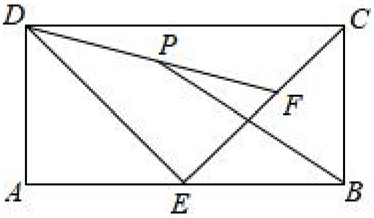
1. 找始末，定轨迹
2. 在轨迹上找一点旋转，构造手拉手模型，再通过角度相等得到从动点轨迹.
3. 反向旋转相关定点，构造手拉手模型，代换所求线段，即逆向构造.

专题二 练习

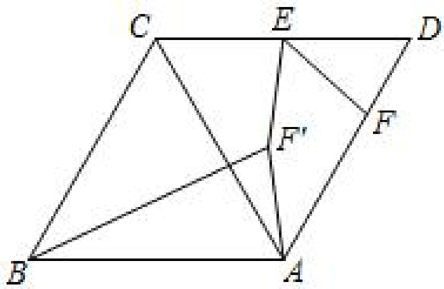
1、如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 7，E 为 BC 上一点，且 $BE=\sqrt{3}$，F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF，以 EF 为边向右侧作等边△EFG，连接 CG，则 CG 的最小值为_____.



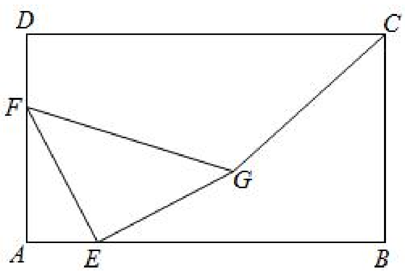
2、如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=4$，E 为 AB 的中点，F 为 EC 上一动点，P 为 DF 中点，连接 PB，则 PB 的最小值是________.



3、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle BAD=120°$，E 是边 CD 的中点，F 是边 AD 上的一个动点，将线段 EF 绕着点 E 顺时针旋转 60° 得到线段 EF'，连接 AF'、BF'，则△ABF' 的周长的最小值是________________.

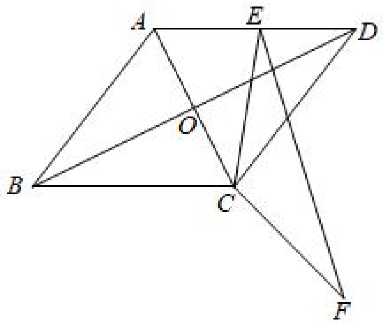


4、如图，矩形 $ABCD$ 的边 $AB=\frac{11}{2},BC=3$，E 为 AB 上一点，且 $AE=1$，F 为 AD 边上的一个动点，连接 EF，若以 EF 为边向右侧作等腰直角三角形 $EFG,EF=EG$，连接 CG，则 CG 的最小值为（　　　　）

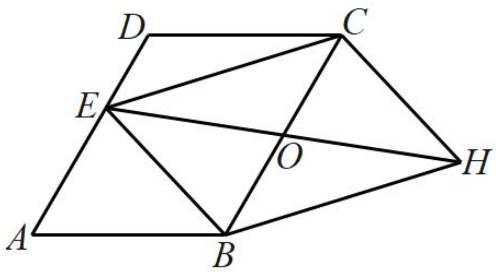


A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{2}$

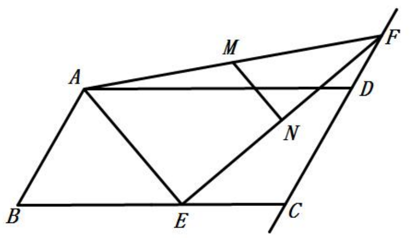
5、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$，对角线 AC、BD 交于点 O. 点 E 为直线 AD 上的一个动点，连接 CE，将线段 EC 绕点 C 顺时针旋转 $\angle BCD$ 的角度后得到对应的线段 CF（即 $\angle ECF=\angle BCD$），DF 长度的最小值为_________.



6、四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=4$，$\angle A=60°$，E 为 AD 上一动点，连接 EB、EC，以 EB、EC 为邻边作▱$EBHC$，EH 的最小值为_________.

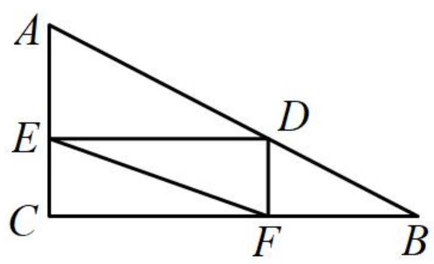


7、如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=120°$，$AB=2$，$BC=4$，点 E 是直线 BC 上的点，点 F 是直线 CD 上的点，连接 AF，AE，EF，点 M，N 分别是 AF，EF 的中点．连接 MN，则 MN 的最小值为（　　）

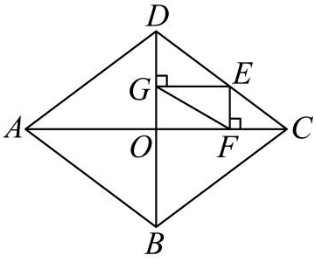


A．1　　B．$\sqrt{3}-1$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$2-\sqrt{3}$

8、如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=5$，$BC=12$，D 是 AB 上一动点，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，$DF\perp BC$ 于点 F．连接 EF，则线段 EF 的最小值是________.

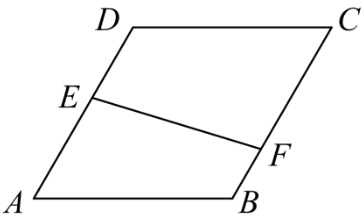


9、如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AC=8$，$BD=6$，E 是 CD 边上一动点，过点 E 分别作 $EF\perp OC$ 于点 F，$EG\perp OD$ 于点 G，连接 FG，则 FG 的最小值为（　　）

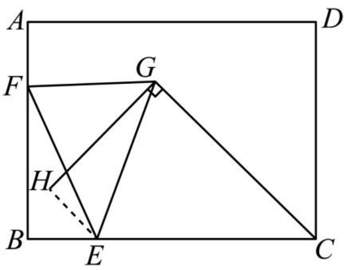


A．2　　B．2.4　　C．2.5　　D．3

10、如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E 和 F 分别是边 AD 和 BC 上的动点，线段 EF 的最大值是 $8\sqrt{5}$，最小值是 8，则这个菱形的边长是___________.

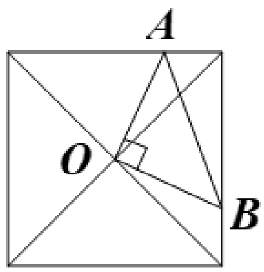


11、如图，长方形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，E 为 BC 上一点．且 $BE=1$，F 为 AB 边上的一个动点．连接 EF，将 $\triangle BEF$ 绕着点 E 顺时针旋转 $45°$ 到 $\triangle HEG$ 的位置，其中点 B、点 F 的对应点分别为点 H、点 G，连接 FG 和 CG，则 CG 的最小值为（　　）.

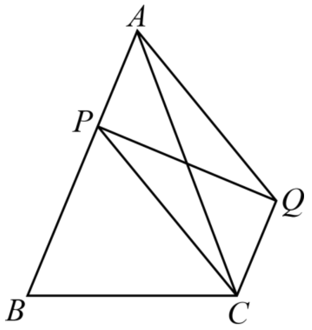


A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．3　　C．$1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{11}$

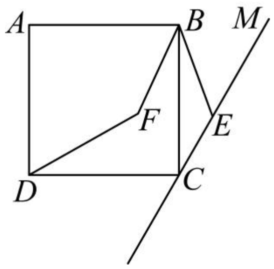
12、如图，以边长为 2 的正方形的中心 O 为端点，引两条相互垂直的射线，分别与正方形的边交于 A、B 两点，则线段 AB 长度的最小值为_________.



13、如图，在ΔABC中，$\angle BAC=45^\circ$，$AB=AC=4$，P为AB边上一动点，以PA，PC为邻边作平行四边形$PAQC$，则对角线PQ的最小值为_____.

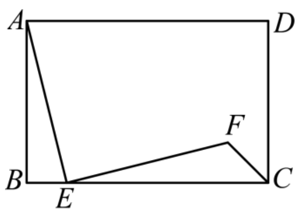


14、如图，正方形$ABCD$的边长为4，$\angle BCM=30^\circ$，点E是直线CM上一个动点，连接BE，线段BE绕点B顺时针旋转45°得到BF，则线段DF长度的最小值等于（　　）

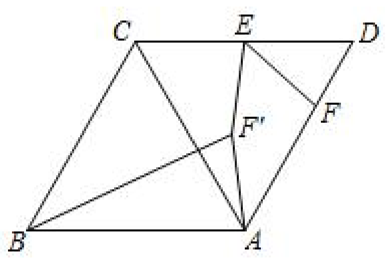


A．$4\sqrt{2}-4$　　B．$2\sqrt{2}-2$　　C．$2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{6}-\sqrt{3}$

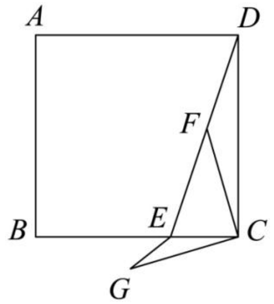
15、如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=6$，点E为边BC上的动点，连接AE，过点E作$EF\perp AE$，且$EF=AE$，连接CF，则线段CF长度的最小值为______.



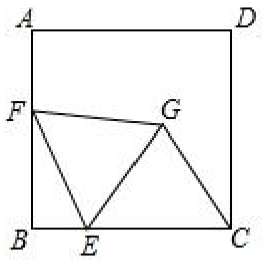
16、如图，菱形$ABCD$的边长为4，$\angle BAD=120^\circ$，E是边CD的中点，F是边AD上的一个动点，将线段EF绕着点E顺时针旋转60°得到线段EF'，连接AF'、BF'，则$\triangle ABF'$的周长的最小值是________________.



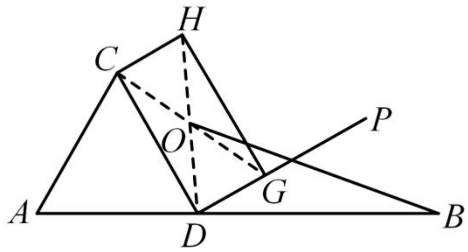
17．如图正方形$ABCD$的边长为3，E是BC上一点且$CE=1$，F是线段DE上的动点．连接CF，将线段CF绕点C逆时针旋转 90° 得到CG，连接EG，则EG的最小值是_____．



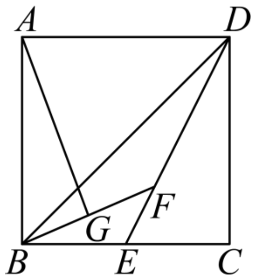
18、如图，正方形$ABCD$的边长为4，E为BC上一点，且$BE=1$，F为AB边上的一个动点，连接EF，以EF为边向右侧作等边△EFG，连接CG，则CG的最小值为______．



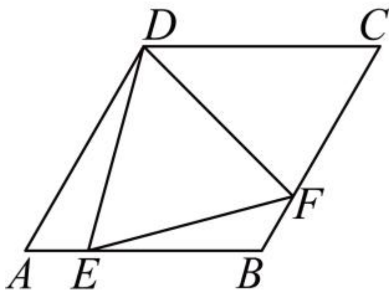
19、如图，线段AB的长为12，点D在AB上（不与端点重合），以AD为边向上作等边△ADC，过D作与CD垂直的射线DP，点G是DP上一动点（不与点D重合），以DC、DG为边作矩形$CDGH$，对角线CG与DH交于点O，连接OB，则线段BO的最小值为________．



20、如图，正方形$ABCD$的边长是8，点E是BC边的中点，连接DE，点F是线段DE上不与点D，E重合的一个动点，连接BF，点G是线段BF的中点，则线段AG的最小值为____________．



21、如图，在菱形$ABCD$中，$\angle A=60^\circ$，$AB=1$，E，F两点分别从A，B两点同时出发，以相同的速度分别向终点B，C移动，连接EF，在移动的过程中，EF的最小值为______.



22、已知，四边形$ABCD$是正方形，$\triangle DEF$绕点D旋转（$DE<AB$），$\angle EDF=90^\circ$，$DE=DF$，连接AE，CF.

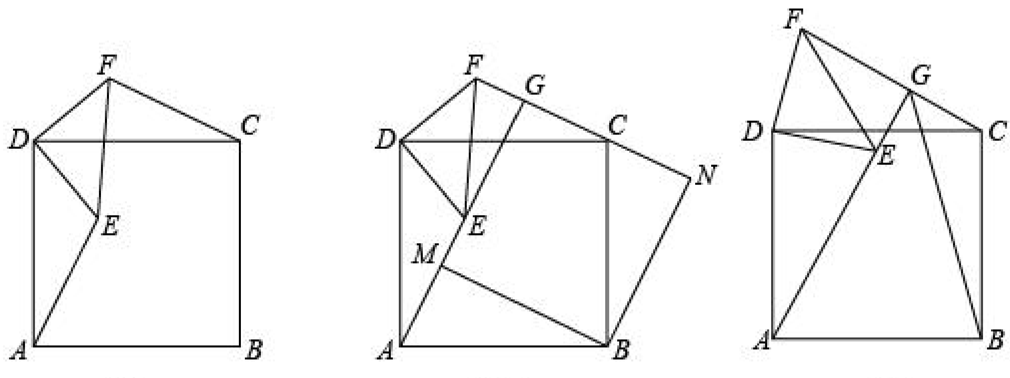


图1　　图2　　图3

(1)如图1，求证：$\triangle ADE\cong\triangle CDF$；(2)直线$AE$与$CF$相交于点$G$.

① 如图2，$BM\perp AG$于点M，$BN\perp CF$于点N，求证：四边形$BMGN$是正方形；

② 如图3，连接BG，若$AB=4$，$DE=2$，直接写出在$\triangle DEF$旋转的过程中，线段BG长度的最小值.

参考答案

专题二 瓜豆原理中动点轨迹直线型最值问题以及逆向构造

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同.

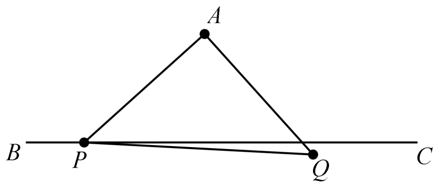
只要满足：

4. 两“动”，一“定”；
5. 两动点与定点的连线夹角是定角
6. 两动点到定点的距离比值是定值。

则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

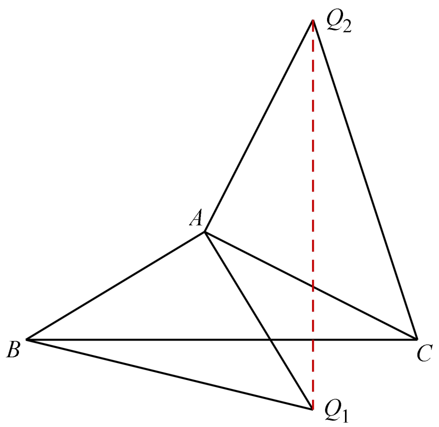
【引例】

如图，△APQ是等腰直角三角形，∠PAQ=90° 且 AP=AQ，当点 P 在直线 BC 上运动时，求 Q 点轨迹？



【分析】当 AP 与 AQ 夹角固定且 AP:AQ 为定值的话，P、Q 轨迹是同一种图形.

当确定轨迹是线段的时候，可以任取两个时刻的 Q 点的位置，连线即可，比如 Q 点的起始位置和终点位置，连接即得 Q 点轨迹线段.



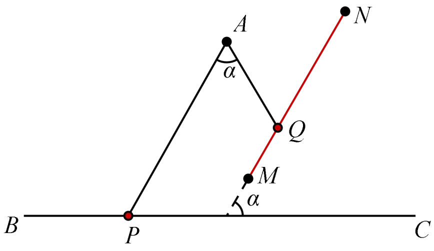
【模型总结】

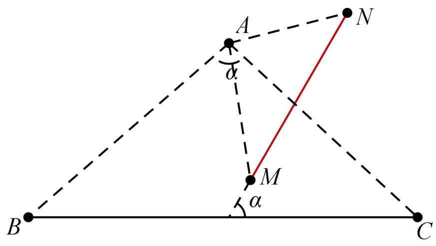
必要条件：

主动点、从动点与定点连线的夹角是定量（∠PAQ 是定值）；

主动点、从动点到定点的距离之比是定量（AP:AQ 是定值）.

结论：P、Q 两点轨迹所在直线的夹角等于∠PAQ（当∠PAQ≤90° 时，∠PAQ 等于 MN 与 BC 夹角）

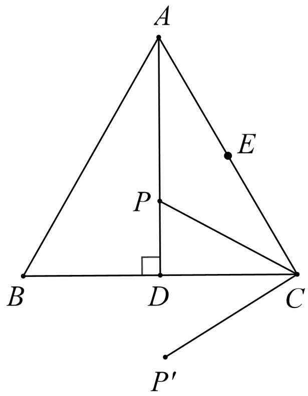




P、Q两点轨迹长度之比等于 $AP:AQ$（由$\triangle ABC \backsim \triangle AMN$，可得 $AP:AQ=BC:MN$）

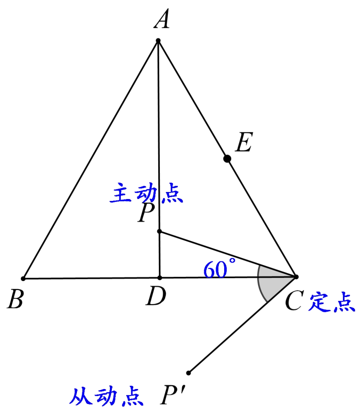
【例题】

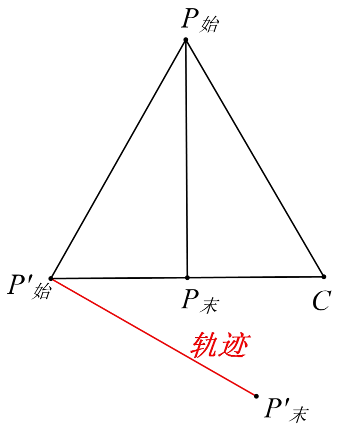
如图，D、E是边长为 4 的等边三角形 ABC 上的中点，P为中线 AD 上的动点，把线段 PC绕 C点逆时针旋转 60°，得到 P'，EP' 的最小值



结合这个例题我们再来熟悉一下瓜豆模型

第一层：点 P' 运动的轨迹是直线吗？





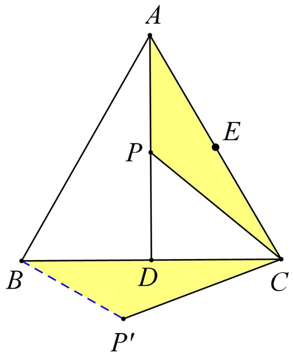
答：是直线，可以通过 P在 A，D时，即始末位置时 P' 对应的位置得到直线轨迹，对于选填题，可找出从动点的始末位置，从而快速定位轨迹，若要说理则需要构造手拉手证明.

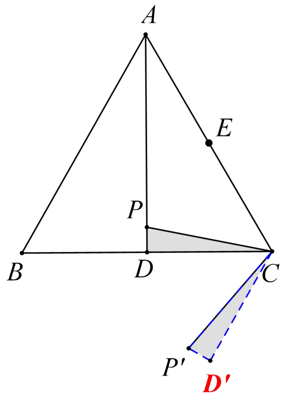
第二层：点 P' 的运动长度和点 P的运动长度相同吗？

答：因为点 P' 与点 P到定点 C 的距离相等，则有运动路径长度相等，若要说理则同样需要构造手拉手结构，通过全等证明.

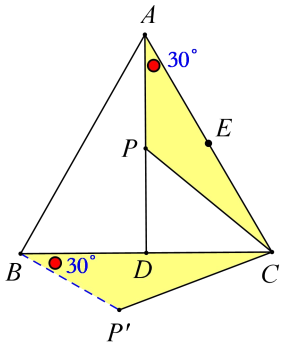
第三层：手拉手模型怎么构造？

答：以旋转中心 C 为顶点进行构造，其实只要再找一组对应的主从点即可，简单来说就是从 P 点的轨迹即线段 AD 中再找一个点进行与 P 点类似的的旋转，比如把线段 AD 中的点 A 绕 C 点逆时针旋转 60°，即为点 B，连接 BP' 即可得到一组手拉手模型，虽然前面说是任意点，但一般来说我们选择一个特殊位置的点进行旋转后的点位置也是比较容易确定的，比如说点 D 进行旋转也是比较方便的.



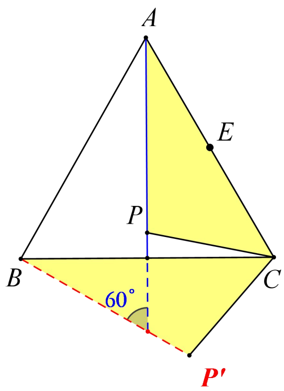


第四层：分析∠CAP 和∠CBP'



答：由全等可知∠CAP=∠CBP'，因为 B 为定点，所以得到 P' 轨迹为直线 BP'

第五层：点 P 和点 P' 轨迹的夹角和旋转角的关系



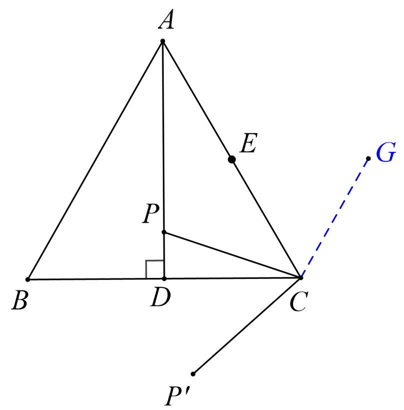
答：不难得出本题主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角，要注意的是如果旋转角是钝角，那么主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角的补角，这个在后面的例题中会出现.

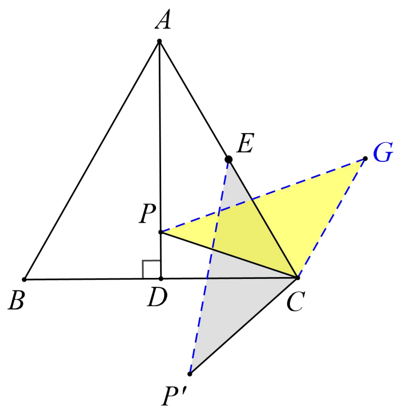
大气层：前面提到，如果是选填题，可以通过找从动点的始末位置快速定位轨迹线段，或者通过构造手拉手，通过全等或相似得出相等角然后得出轨迹，这两种方法都是先找出从动点 P' 的轨迹，再作垂线段并求出垂线段的长得到最小值，那么还有其他方法吗？

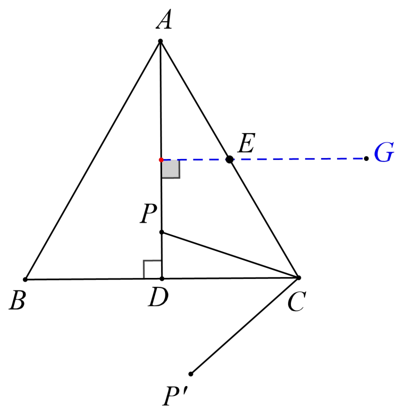
答：还可以对关键点进行旋转来构造手拉手模型，从而代换所求线段，构造如下.

将点 EC 绕点 C 顺时针旋转 60°，构造手拉手模型（SAS 全等型），从而得到 $P'E=PG$，最小值即为点 G 到 AD 的距离.

要注意的是因为要代换 $P'E$，所以 E 点的旋转方式应该是从 P' |P，所以是顺时针旋转，求轨迹时的旋转方式则是 P|P'，注意区分.

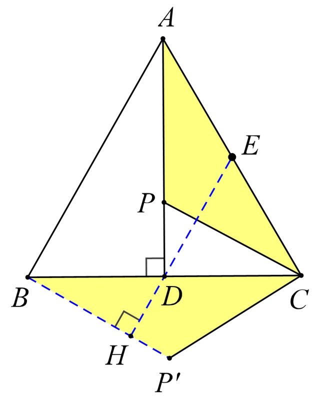






策略一：找从动点轨迹

连接 BP'，



由旋转可得，$CP=CP'$，$\angle P'CP=60°$，

∵△ABC 是等边三角形，

∴$AC=BC$，$\angle ACB=60°$，

∴$\angle ACB=\angle PCP'$，

∴△ACP≌△BCP'（SAS），

∴$\angle CBP'=\angle CAP$，

∵边长为 4 的等边三角形 ABC 中，P 是对称轴 AD 上的一个动点，

∴∠CAP=30°，BD=2，

∴∠CBP'=30°，

即点 P' 的运动轨迹为直线 BP'，

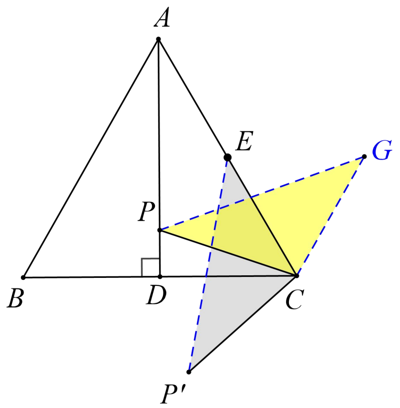
∴当 $DP'\perp BP'$ 时，EP' 最短，

此时，$EP'=\frac{1}{2}BD+ED=\frac{1}{2}\times2+2=3$

∴EP' 的最小值是 3

策略二：代换所求线段

将点 E 绕 C 点顺时针旋转 60° 得到点 G，连接 PG，CG，EP'



由旋转可得 $EC=CG$，$CP=CP'$，∠$P'CP$=60°，∠ECG=60°，

∴△ECG 是等边三角形，EG=2

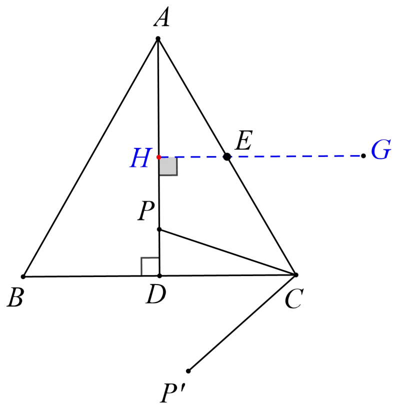
∵∠PCP'=∠ECG

∴∠PCG=∠ECP'

∴△GCP≌△ECP'（SAS），

∴$EP'=GP$，

过点 G 作 AD 的垂线 GH 垂足为 H，GH 即为所求.



∵∠GEC=∠ACD

∴HE// DC

∵∠GHD=∠ADC

∴HG// DC

故 G，E，H三点共线，则有 HE// DC

又 E是 AC中点，分线段成比例可知 H是 AD中点

∴$HE=\frac{1}{2}DC=1$

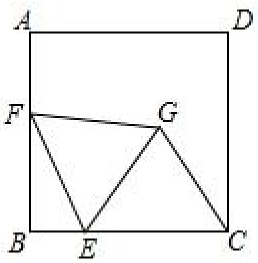
$EP'=GP=HE+EG=2+1=3$

∴EP'的最小值是 3

总共提到了 3 种处理方式：
1. 找始末，定轨迹
2. 在轨迹上找一点旋转，构造手拉手模型，再通过角度相等得到从动点轨迹.
3. 反向旋转相关定点，构造手拉手模型，代换所求线段，即逆向构造.

专题二 练习 答案与解析

1、如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 7，E 为 BC 上一点，且 $BE=\sqrt{3}$，F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF，以 EF 为边向右侧作等边△EFG，连接 CG，则 CG 的最小值为_____.



【答案】$\frac{7+\sqrt{3}}{2}$

【分析】根据等边△EFG，$EF=EG$，把△EBF 绕点 E 顺时针旋转 60°得到△EHG，延长 HG 交 CD 于 M，过 C 点作 $CQ\perp HM$，过 E 点作 $EP\perp CQ$，从而得出矩形 $HEPQ$，从而找到最短 CG，再利用 30°角所对直角边为斜边一半，从而得解.

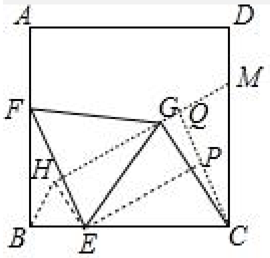
【详解】∵△EFG 为等边三角形，∴$EF=EG$，把△EBF 绕点 E 顺时针旋转 60°得到△EHG，如图，延长 HG 交 CD 于 M，过 C 点作 $CQ\perp HM$，过 E 点作 $EP\perp CQ$，∴∠BEH=60°，$EB=EH=\sqrt{3}$，∠EHG=∠EBF=90°，

即 G 点在过 H 点且垂直于 EH 的线段 HM 上，

易得四边形 $HEPQ$ 为矩形，$\therefore PQ=EH=\sqrt{3}$，$\angle HEP=90°$，

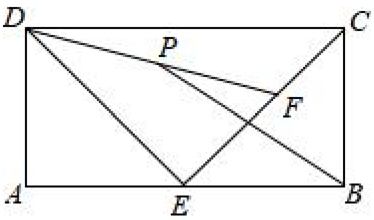
$\because \angle CEP=90°-\angle BEH=30°$，$\therefore CP=\frac{1}{2}CE=\frac{7-\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore CQ=CP+PQ=\frac{7-\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{7+\sqrt{3}}{2}$．$\therefore CG$ 的最小值为 $\frac{7+\sqrt{3}}{2}$．故答案为 $\frac{7+\sqrt{3}}{2}$．



【点睛】本题考查了等边三角形性质，旋转图形的性质，全等三角形的性质，30°角所对直角边为斜边一半，牢固掌握几何相关知识点，灵活添加辅助线构造矩形是解题关键

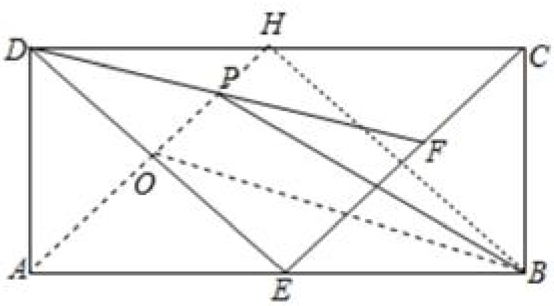
2、如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=4$，E 为 AB 的中点，F 为 EC 上一动点，P 为 DF 中点，连接 PB，则 PB 的最小值是________．



【答案】$4\sqrt{2}$

【分析】取 CD 中点 H，连接 AH，BH，可证四边形 $AECH$ 是平行四边形，可得 $AH//CE$，由三角形中位线定理可得 $PH//EC$，可得点 P 在 AH 上，当 $BP\perp AH$ 时，PB 有最小值，即可求解．

【详解】解：如图，取 CD 中点 H，连接 AH，BH，设 AH 与 DE 的交点为 O，连接 BO，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD=8$，$AD=BC=4$，$CD//AB$，

$\because$ 点 E 是 AB 中点，点 H 是 CD 中点，$\therefore CH=AE=DH=BE=4$，

$\therefore$ 四边形 $AECH$ 是平行四边形，$\therefore AH//CE$，

∵点 P 是 DF 的中点，点 H 是 CD 的中点，∴$PH//EC$，∴点 P 在 AH 上，

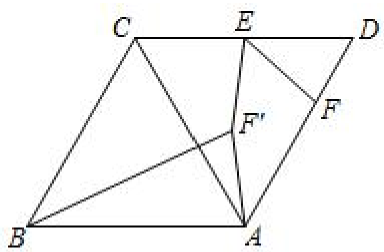
∴当 $BP\perp AH$ 时，此时点 P 与 H 重合，BP 有最小值，

∵$AD=DH=CH=BC=4$，∴$\angle DHA=\angle DAH=\angle CBH=\angle CHB=45°$，$AH=BH=4\sqrt{2}$，

∴$\angle AHB=90°$，∴BP 的最小值为 $4\sqrt{2}$，故答案为 $4\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了矩形的性质，三角形中位线定理，等腰直角三角形的性质，平行四边形的性质，垂线段最短等知识，确定点 P 的运动轨迹是本题的关键．

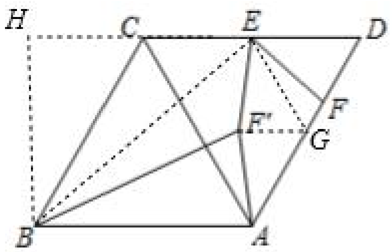
3、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle BAD=120°$，E 是边 CD 的中点，F 是边 AD 上的一个动点，将线段 EF 绕着点 E 顺时针旋转 60°得到线段 EF'，连接 AF'、BF'，则△ABF'的周长的最小值是________________．



【答案】$4+2\sqrt{7}$

【分析】取 AD 中点 G，连接 EG，$F'G$，BE，作 $BH\perp DC$ 的延长线于点 H，利用全等三角形的性质证明$\angle F'GA=60°$，点 F'的轨迹为射线 GF'，易得 A、E 关于 GF'对称，推出 $AF'=EF'$，得到 $BF'+AF'=BF'+EF'\geq BE$，求出 BE 即可解决周长最小问题．

【详解】解：取 AD 中点 G，连接 EG，$F'G$，BE，作 $BH\perp DC$ 的延长线于点 H，



∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$AB=AD$，∵$\angle BAD=120°$，∴$\angle CAD=60°$，∴△ACD 为等边三角形，

又∵$DE=DG$，∴△DEG 也为等边三角形．∴$DE=GE$，

∵$\angle DEG=60°=\angle FEF'$，∴$\angle DEG-\angle FEG=\angle FEF'-\angle FEG$，即$\angle DEF=\angle GEF'$，

由线段 EF 绕着点 E 顺时针旋转 60°得到线段 EF'， 所以 $EF=EF'$．

在△DEF 和△GEF'中，$\begin{cases} DE=GE \\ \angle DEF=\angle GEF' \\ EF=EF' \end{cases}$，∴△$DEF$≌△$GEF'$（$SAS$）．

∴$\angle EGF'=\angle EDF=60°$，∴$\angle F'GA=180°-60°-60°=60°$，则点 F'的运动轨迹为射线 GF'．

观察图形，可得 A，E 关于 GF'对称，∴$AF'=EF'$，∴$BF'+AF'=BF'+EF'\ge BE$，

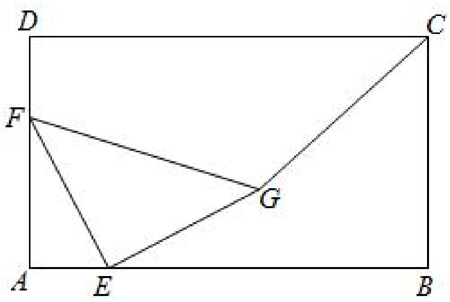
在 Rt△BCH 中，∵∠H=90°，BC=4，∠BCH=60°，∴ $CH=\frac{1}{2}BC=2, BH=2\sqrt{3}$,，

在 Rt△BEH 中，$BE=\sqrt{BH^2+EH^2}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$，∴$BF'+EF'\ge 2\sqrt{7}$，

∴△ABF'的周长的最小值为 $AB+BF'+EF'=4+2\sqrt{7}$，故答案为：$4+2\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查旋转变换，菱形的性质，解直角三角形，全等三角形的判定与性质，勾股定理，等边三角形等知识，解题关键在于学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，学会用转化的思想思考问题.

4、如图，矩形 $ABCD$ 的边 $AB=\frac{11}{2}, BC=3$，E 为 AB 上一点，且 $AE=1$，F 为 AD 边上的一个动点，连接 EF，若以 EF 为边向右侧作等腰直角三角形 $EFG, EF=EG$，连接 CG，则 CG 的最小值为（　）

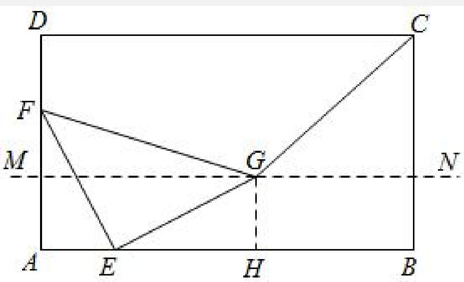


A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】过点 G 作 $GH\perp AB$ 于 H，过点 G 作 $MN\parallel AB$，由“AAS”可证△GEH≌△EFA，可得 $GH=AE=1$，可得点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动，则当 F 与 D 重合时，CG 有最小值，即可求解.

【详解】解：如图，过点 G 作 $GH\perp AB$ 于 H，过点 G 作 $MN\parallel AB$，



∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=\frac{11}{2}$，$BC=3$，∴∠B=90°，$CD=\frac{11}{2}$，$AD=3$，

∵$AE=1$，∴$BE=\frac{9}{2}$，∵∠GHE=∠A=∠GEF=90°，

∴∠GEH+∠EGH=90°，∠GEH+∠FEA=90°，∴∠EGH=∠FEA，

又∵$GE=EF$，∴△GEH≌△EFA（AAS），∴$GH=AE=1$，

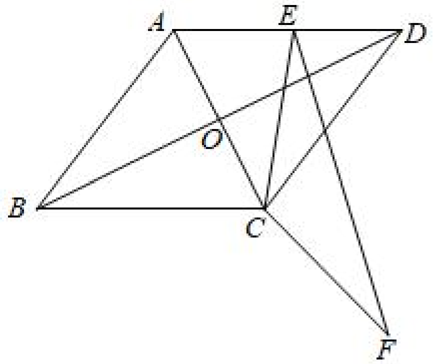
∴点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动，

∴当 F 与 D 重合时，CG 有最小值，此时 $AF=EH=3$，

∴CG 的最小值 $=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-1-3\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$，故选 B．

【点睛】本题考查矩形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，确定点 G 的运动轨迹是本题的关键．

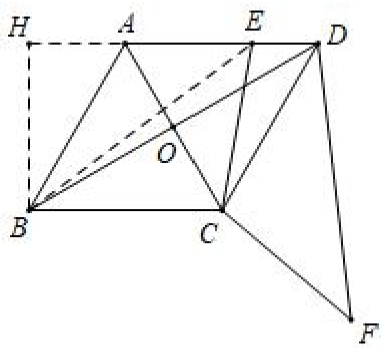
5、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$，对角线 AC、BD 交于点 O．点 E 为直线 AD 上的一个动点，连接 CE，将线段 EC 绕点 C 顺时针旋转 $\angle BCD$ 的角度后得到对应的线段 CF（即 $\angle ECF=\angle BCD$），DF 长度的最小值为__________．



【答案】3

【分析】连接 BE，作 $BH\perp AD$，由旋转的性质可得△DCF≌△BCE，把求 DF 的最小值转化为求 BE 的最小值，再根据垂线段最短可得答案．

【详解】解：连接 BE，作 $BH\perp AD$ 交 DA 的延长线于 H，



菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，∴$\angle BCD=120°$．

∵$\angle ECF=120°$，∴$\angle BCD=\angle ECF$，∴$\angle BCE=\angle DCF$　由旋转可得：$EC=FC$，

在△BEC 和△DFC 中，$\begin{cases}BC=DC\\ \angle BCE=\angle DCF\\ EC=FC\end{cases}$，∴△$DCF$≌△$BCE$（$SAS$），∴$DF=BE$，

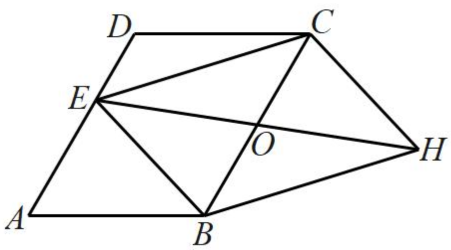
即求 DF 的最小值转化为求 BE 的最小值．

∵在 $Rt\triangle AHB$ 中，$\angle BAH=60°$，$AB=2\sqrt{3}$，∴$BH=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2}=3$，

当 E 与 H 重合时，BE 最小值是 3，∴DF 的最小值是 3．故答案为：3．

【点睛】本题考查全等三角形的判定和性质，菱形的判定和性质，灵活运用这些性质解决问题是本题关键．

6、四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=4$，$\angle A=60°$，E 为 AD 上一动点，连接 EB、EC，以 EB、EC 为邻边作▱$EBHC$，EH 的最小值为________．

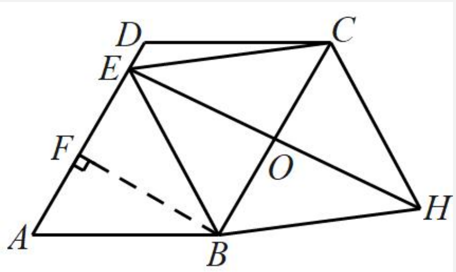


【答案】$4\sqrt{3}$

【分析】根据垂线段最短，得当 $EO\perp BC$ 时，EO 有最小值，即 EH 有最小值，过点 B 作 $BF\perp BC$ 交 AD 于点 F，证明四边形 $BFEO$ 是矩形，在 $Rt\triangle ABF$ 中，利用含 30 度角的直角三角形和勾股定理即可求解．

【详解】解：∵四边形 $EBHC$ 是平行四边形，∴$EH=2EO$，

∴当 $EO\perp BC$ 时，EO 有最小值，即 EH 有最小值，过点 B 作 $BF\perp BC$ 交 AD 于点 F，∴$BF\,/\!/\,EO$，



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$BF\perp AD$，$EF\,/\!/\,BO$，∴四边形 $BFEO$ 是平行四边形，

∵$EO\perp BC$，即 $\angle EOB=90°$，∴四边形 $BFEO$ 是矩形，∴$BF=EO$，

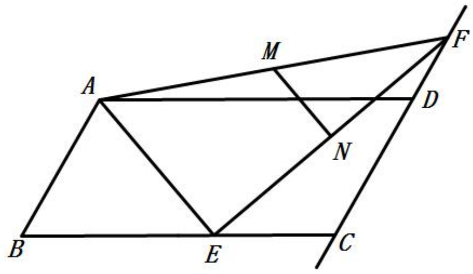
在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AB=4$，$\angle A=60°$，∴$\angle ABF=30°$，∴$AF=\frac{1}{2}AB=2$，

∴$EO=BF=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，∴$EH=2EO=4\sqrt{3}$，故答案为：$4\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了矩形的判定和性质，平行四边形的性质，含 30 度角的直角三角形和勾股定理，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

7、如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=120°$，$AB=2$，$BC=4$，点 E 是直线 BC 上的点，点 F 是直线 CD 上的点，连接 AF，AE，EF，点 M，N 分别是 AF，EF 的中点．连接 MN，则 MN 的最小值

为（　　）



A．1　　　　B．$\sqrt{3}-1$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$2-\sqrt{3}$

【答案】C

【分析】根据中位线性质可得 MN 是 AE 的一半，则当 AE 最小时，MN 最小，利用 30°直角三角形求出 AE 最小值，解答即可.

【详解】解：∵点 M，N 分别是 AF，EF 的中点，∴MN 是△AEF 的中位线，∴MN$=\dfrac{1}{2}$AE，

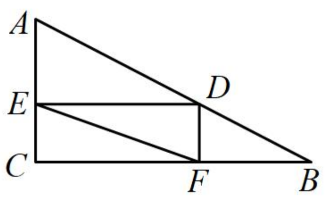
∴当 AE 最小时，MN 最小，当 AE⊥BC 时，AE 最小，在四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BCD=120°$，

∴AB//CD，∴∠ABC+∠BCD=180°，∴∠ABC =60，∵AE⊥BC，∴∠AEB =90°，

∴∠BAE =30°，∴BE$=\dfrac{1}{2}$AB=1，∴ $AE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，∴MN$=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴MN 最小为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本体考查了三角形中位线以及 30°直角三角形的性质、勾股定理，掌握三角形中位线以及 30°直角三角形的性质、勾股定理是解题的关键.

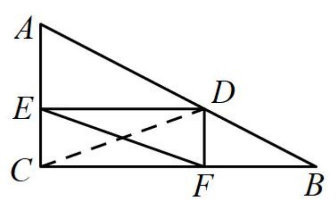
8、如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=5$，$BC=12$，D 是 AB 上一动点，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，$DF\perp BC$ 于点 F．连接 EF，则线段 EF 的最小值是________.



【答案】$\dfrac{60}{13}$/$4\dfrac{8}{13}$

【分析】连接 CD，利用勾股定理列式求出 AB，判断出四边形 $CFDE$ 是矩形，根据矩形的对角线相等可得 $EF=CD$，再根据垂线段最短可得 $CD\perp AB$ 时，线段 EF 的值最小，然后根据三角形的面积公式列出方程求解即可.

【详解】解：如图，连接 CD.



$\because \angle ACB=90^\circ$， $AC=5$， $BC=12$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$，

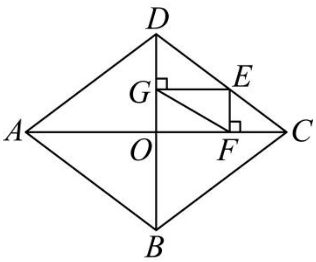
$\because DE\perp AC$，$DF\perp BC$， $\angle ACB=90^\circ$，$\therefore$四边形$CFDE$是矩形，$\therefore EF=CD$，

由垂线段最短可得$CD\perp AB$时，线段EF的值最小，此时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

即$\frac{1}{2}\times5\times12=\frac{1}{2}\times13\cdot CD$，解得$CD=\frac{60}{13}$，$\therefore$线段$EF$的最小值为$\frac{60}{13}$．故答案为：$\frac{60}{13}$．

【点睛】本题考查了矩形的判定与性质，垂线段最短的性质，勾股定理，判断出$CD\perp AB$时，线段EF的值最小是解题的关键.

9、如图，在菱形$ABCD$中，$AC=8$，$BD=6$，E是CD边上一动点，过点E分别作$EF\perp OC$于点F，$EG\perp OD$于点G，连接FG，则FG的最小值为（　）



A．2　　B．2.4　　C．2.5　　D．3

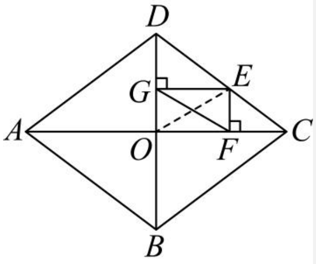
【答案】B

【分析】此题考查了菱形的性质，矩形的性质和判定，勾股定理，垂线段最短，由菱形的性质得$AC\perp BD$，可证四边形$OGEF$为矩形，连接OE，则$OE=GF$，当$OE\perp DC$时时，GF最短，由勾股定理求出CD，再利用用面积法即可求出GF的最小值，熟练掌握矩形的性质，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\therefore AC\perp BD$，

$\because EF\perp OC$于点F，$EG\perp OD$于点G，$\therefore$四边形$OGEF$是矩形，

连接OE，则$OE=GF$，当$OE\perp DC$时，GF的值最小，

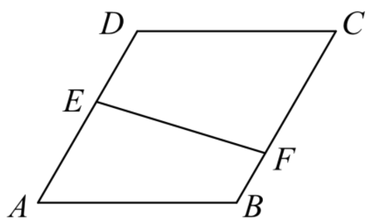


$\because BD=6$，$AC=8$，$\therefore OD=3$，$OC=4$，$\therefore CD=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\times OC\cdot OD=\frac{1}{2}CD\cdot OE$，$\therefore \frac{1}{2}\times 4\times 3=\frac{1}{2}\times 5\times OE$，解得 $OE=2.4$，

$\therefore FG$ 的最小值为 2.4，故选：B．

10、如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E 和 F 分别是边 AD 和 BC 上的动点，线段 EF 的最大值是 $8\sqrt{5}$，最小值是 8，则这个菱形的边长是___________.



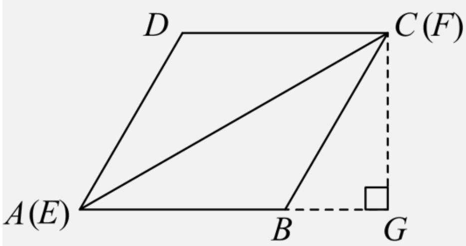
【答案】10

【分析】当点 E 与 A 重合，点 F 与点 C 重合时，线段 EF 的最大值是 $8\sqrt{5}$，当 $EF\perp BC$ 时，最小值是 8，如图所示（见详解），过点 C 作 $CG\perp AB$ 延长线于 G，在 $Rt\triangle ACG$，$Rt\triangle BCG$ 中，根据勾股定理即可求解．

【详解】解：四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E 和 F 分别是边 AD 和 BC 上的动点，

当点 E 与 A 重合，点 F 与点 C 重合时，线段 EF 的最大值是 $8\sqrt{5}$，

当 $EF\perp BC$ 时，最小值是 8，如图所示，过点 C 作 $CG\perp AB$ 延长线于 G，



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=BC=CD=DA$，

当点 E 与 A 重合，点 F 与点 C 重合时，线段 EF 的最大值是 $8\sqrt{5}$，即 $AC=EF=8\sqrt{5}$，

当 $EF\perp BC$ 时，最小值是 8，

$\therefore S_{菱形ABCD}=AD\cdot EF=AB\cdot CG$（$EF$ 是 AD 边上的高），且 $EF=8$，$\therefore CG=8$

在 Rt$\triangle ACG$ 中，$AC=8\sqrt{5}$，$CG=8$，$\therefore AG=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{\left(8\sqrt{5}\right)^2-8^2}=16$，

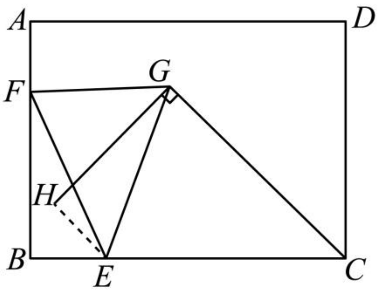
设 $AB=BC=a$，则 $BG=AG-AB=16-a$，

在 Rt$\triangle BCG$ 中，$BC^2=CG^2+BG^2$，即 $a^2=8^2+(16-a)^2$，解得，$a=10$，

$\therefore AB=BC=CD=DA=10$，故答案为：$10$．

【点睛】本题主要考查动点与菱形，直角三角形勾股定理的综合，理解动点中线段最大值与最小值，菱形的性质，勾股定理是解题的关键．

11、如图，长方形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，E 为 BC 上一点．且 $BE=1$，F 为 AB 边上的一个动点．连接 EF，将$\triangle BEF$ 绕着点 E 顺时针旋转 $45°$ 到$\triangle HEG$ 的位置，其中点 B、点 F 的对应点分别为点 H、点 G，连接 FG 和 CG，则 CG 的最小值为（　）．

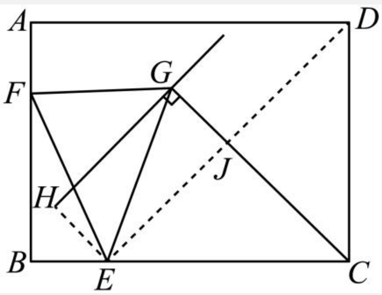


A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．3　　C．$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\sqrt{11}$

【答案】C

【分析】如图，将线段 BE 绕点 E 顺时针旋转 $45°$ 得到线段 EH，连接 DE 交 CG 于 J．首先证明 $\angle EHG=90°$，推出点 G 的在射线 HG 上运动，推出当 $CG\perp HG$ 时，CG 的值最小，证明四边形 $EHGJ$ 是矩形，进一步推出 $JE=JD$，则 $CJ=\frac{\sqrt{2}}{2}CE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即可得到 CG 的最小值为 $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

【详解】解：如图，将线段 BE 绕点 E 顺时针旋转 $45°$ 得到线段 EH，连接 DE 交 CG 于 J．



$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD=3$，$\angle B=\angle BCD=90°$，

$\because \angle BEH=\angle FEG=45°$，$\therefore \angle BEF=\angle HEG$，

$\because EB=EH$，$EF=EG$，$\therefore \triangle EBF\cong\triangle HEG\left(\text{SAS}\right)$，$\therefore \angle B=\angle EHG=90°$，

∴点 G 的在射线 HG 上运动，∴当 $CG\perp HG$ 时，CG 的值最小，

∵ $BC=4$，$BE=1$，$CD=3$，∴ $CE=CD=3$，∴ $\angle CED=\angle BEH=45°$，

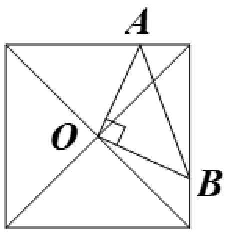
∴ $\angle HEJ=90°=\angle EHG=\angle JGH=90°$，∴四边形 $EHGJ$ 是矩形，

∴ $DE//GH$，$GJ=HE=BE=1$，∴ $CJ\perp DE$，∴ $JE=JD$，

∴ $CJ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，∴ $CG=CJ+GJ=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，∴ CG 的最小值为 $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选：C.

【点睛】本题考查旋转的性质，矩形的性质与判定，全等三角形的判定和性质，垂线段最短等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形得到动点运动的轨迹，属于中考填空题中的压轴题.

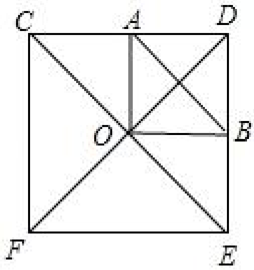
12、如图，以边长为 2 的正方形的中心 O 为端点，引两条相互垂直的射线，分别与正方形的边交于 A、B 两点，则线段 AB 长度的最小值为_________.



【答案】$\sqrt{2}$

【分析】根据正方形的对角线平分一组对角线可得∠OCD=∠ODB=45°，正方形的对角线互相垂直平分且相等可得∠COD=90°，OC=OD，然后根据同角的余角相等求出∠COA=∠DOB，再利用“ASA”证明△COA 和△DOB 全等，根据全等三角形对应边相等可得 OA=OB，从而得到△AOB 是等腰直角三角形，再根据垂线段最短可得 $OA\perp CD$ 时，OA 最小，然后求出 OA，再根据等腰直角三角形的斜边等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍解答.

【详解】解：如图，∵四边形 $CDEF$ 是正方形，∴ $\angle OCD=\angle ODB=45^{\circ},\angle COD=90^{\circ},OC=OD$，



∵ $OA\perp OB$ ∴ $\angle AOB=90^{\circ}$，∴ $\angle COA+\angle AOD=90^{\circ},\angle AOD+\angle DOB=90^{\circ}$ ∴ $\angle COA=\angle DOB$，

在 ΔCOA 与 ΔDOB 中，$\begin{cases}\angle OCA=\angle ODB\\ OC=OD\\ \angle AOC=\angle DOB\end{cases}$，∴ $\Delta COA\cong\Delta DOB(ASA)$，∴ OA=OB，

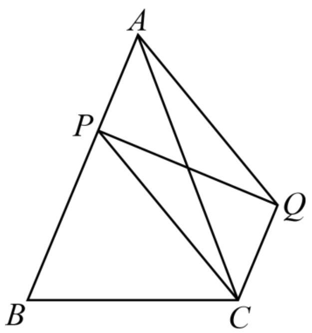
∵∠AOB=90°，∴△AOB 是等腰直角三角形，由勾股定理得：$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2}OA$，

要使 AB 最小，只要 OA 取最小值即可，根据垂线段最短，OA⊥CD 时，OA 最小，

∵正方形 CDEF，∴FC⊥CD，OD=OF，∴CA=DA，∴OA=$\frac{1}{2}CF=1$，∴AB=$\sqrt{2}OA=\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，垂线段最短，勾股定理，熟记各性质并求出三角形全等，然后求出△AOB 是等腰直角三角形是解题的关键.

13、如图，在ΔABC中，$\angle BAC=45°$，$AB=AC=4$，P为AB边上一动点，以PA，PC为邻边作平行四边形$PAQC$，则对角线PQ的最小值为______.



【答案】$2\sqrt{2}$

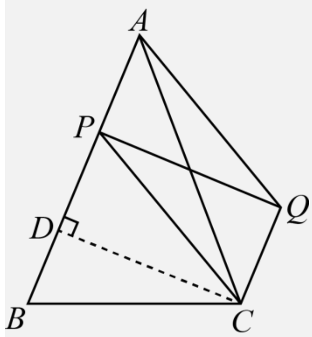
【分析】过C作$CD\perp AB$于D，依据ΔACD是等腰直角三角形，即可得出$CD=AD=2\sqrt{2}$，依据$AP // CQ$，即可得到当$PQ\perp AP$时，PQ的最小值等于CD的长，进而得到答案.

【详解】解：如图所示，过C作$CD\perp AB$于D，

$\because\angle BAC=45°$，$AB=AC=4$，$\therefore\Delta ACD$是等腰直角三角形，$\therefore CD=AD=2\sqrt{2}$，

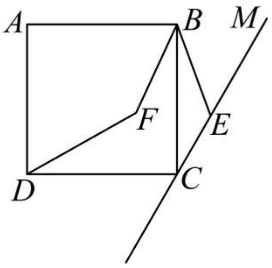
$\because$四边形$PAQC$是平行四边形，$\therefore AP // CQ$，

$\therefore$当$PQ\perp AP$时，PQ的最小值等于CD的长，$\therefore$对角线PQ的最小值为$2\sqrt{2}$，故答案为：$2\sqrt{2}$.



【点睛】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，垂线段最短，掌握平行四边形的性质是解题的关键.

14、如图，正方形$ABCD$的边长为 4，$\angle BCM=30°$，点E是直线CM上一个动点，连接BE，线段BE绕点B顺时针旋转$45°$得到BF，则线段DF长度的最小值等于（　　）

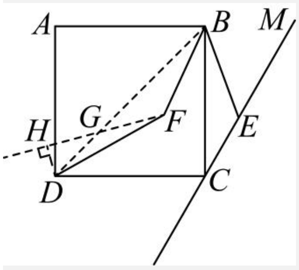


A. $4\sqrt{2}-4$　　B. $2\sqrt{2}-2$　　C. $2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{6}-\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】连接 BD，在 BD 上截取 BG，使 $BG=BC$，连接 FC，过点 D 作 $DH\perp GF$ 于点 H，证明 $\triangle CBE\cong\triangle GBF(\mathrm{SAS})$，得出 $\angle BCE=\angle BGF=30°$，点 F 在直线 GF 上运动，当点 F 与 H 重合时，DF 的值最小，求出最小值即可.

【详解】解：连接 BD，在 BD 上截取 BG，使 $BG=BC$，连接 FG，过点 D 作 $DH\perp GF$ 于点 H，如图所示：



$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=CD=AD=4$，$\angle ADC=\angle DCB=\angle ABC=\angle BAD=90°$，$\angle CBD=45°$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=4\sqrt{2}$，$BG=BC=4$，$\therefore DG=BD-BG=4\sqrt{2}-4$，

$\because\angle CBG=\angle EBF$，$\therefore\angle CBE=\angle GBF$，在 $\triangle CBE$ 和 $\triangle GBF$ 中 $\begin{cases}CB=GB\\ \angle CBE=GBF\\ BE=BF\end{cases}$，

$\therefore\triangle CBE\cong\triangle GBF(\mathrm{SAS})$，$\therefore\angle BCE=\angle BGF=30°$，

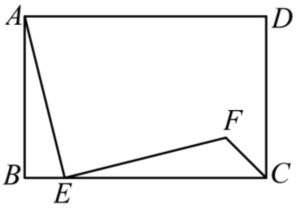
$\therefore$点 F 在直线 GF 上运动，当点 F 与 H 重合时，DF 的值最小，

$\because DH\perp GF$，$\angle DGH=\angle BGF=30°$，$\therefore DH=\dfrac{1}{2}DG=2\sqrt{2}-2$，故选：B.

【点睛】本题主要考查旋转的性质，正方形的性质，勾股定理，垂线段最短，直角三角形的性质，根据题意作出辅助线，得出点 F 在直线 GF 上运动，当点 F 与 H 重合时，DF 的值最小，是解题的关键.

15、如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=6$，点 E 为边 BC 上的动点，连接 AE，过点 E 作 $EF\perp AE$，

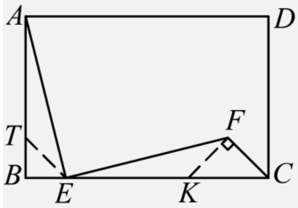
且 $EF=AE$，连接 CF，则线段 CF 长度的最小值为______.



【答案】$\sqrt{2}$

【分析】如图：在 BA 取一点 T 使得 $BT=BE$，连接 ET，在 EC 上取一点 K，使得 $\angle FKC=45°$，连接 FK，利用全等三角形的性质证明 $BK=AB=4$，由矩形的性可得 $CD=AB=4$、$BC=AD=6$，进而推出点 F 在射线 KF 上运动，当 $CF\perp KF$ 时 CF 值最小.

【详解】解：如图：在 BA 取一点 T 使得 $BT=BE$，连接 ET，在 EC 上取一点 K，使得 $\angle FKC=45°$，连接 FK



$\because \angle B=90°$，$BT=BE$ $\therefore \angle BTE=\angle BET=45°$，$\therefore \angle ATE=\angle EKF=135°$，

$\because \angle BAE+\angle AEB=90°$，$\angle AEB+\angle FEK=90°$，$\therefore \angle TAE=\angle EFK$，

$\because AE=EF$，$\therefore \triangle ATE\cong\triangle EKF(\text{AAS})$ $\therefore AT=EK$，

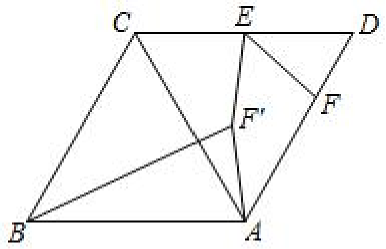
$\because$矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=6$ $\therefore CD=AB=4$，$BC=AD=6$

$\because BT=BE$，$\therefore AB=BK=4$，$\therefore CK=BC-BK=2$，

点 F 在射线 KF 上运动，当 $CF\perp KF$ 时，CF 的值最小，最小值为 $\sin 45°\cdot CK=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$. 故答案为 $\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质、全等三角形的判定与性质、解直角三角形等知识点，正确作出辅助线、构造全等三角形并确定是解答本题的关键.

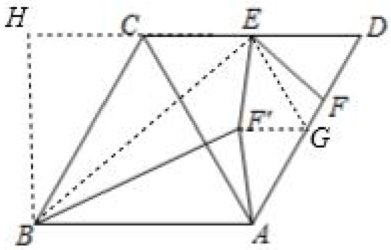
16、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle BAD=120°$，E 是边 CD 的中点，F 是边 AD 上的一个动点，将线段 EF 绕着点 E 顺时针旋转 60°得到线段 EF'，连接 AF'、BF'，则$\triangle ABF'$的周长的最小值是________________.



【答案】4+2$\sqrt{7}$

【分析】取 AD 中点 G，连接 EG，$F'G$，BE，作 $BH\perp DC$ 的延长线于点 H，利用全等三角形的性质证明$\angle F'GA=60°$，点 F'的轨迹为射线 GF'，易得 A、E 关于 GF'对称，推出 $AF'=EF'$，得到 $BF'+AF'=BF'+EF'\geq BE$，求出 BE 即可解决周长最小问题.

【详解】解：取 AD 中点 G，连接 EG，$F'G$，BE，作 $BH\perp DC$ 的延长线于点 H，



∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$AB=AD$，

∵$\angle BAD=120°$，∴$\angle CAD=60°$，∴$\triangle ACD$ 为等边三角形，

又∵$DE=DG$，∴$\triangle DEG$ 也为等边三角形．∴$DE=GE$，

∵$\angle DEG=60°=\angle FEF'$，∴$\angle DEG-\angle FEG=\angle FEF'-\angle FEG$，即$\angle DEF=\angle GEF'$，

由线段 EF 绕着点 E 顺时针旋转 60°得到线段 EF'，所以 $EF=EF'$.

在$\triangle DEF$ 和$\triangle GEF'$中，$\begin{cases} DE=GE \\ \angle DEF=\angle GEF' \\ EF=EF' \end{cases}$，∴$\triangle DEF\cong\triangle GEF'$（SAS）.

∴$\angle EGF'=\angle EDF=60°$，∴$\angle F'GA=180°-60°-60°=60°$，

则点 F'的运动轨迹为射线 GF'．观察图形，可得 A，E 关于 GF'对称，

∴$AF'=EF'$，∴$BF'+AF'=BF'+EF'\geq BE$，

在 Rt$\triangle BCH$ 中，∵$\angle H=90°$，$BC=4$，$\angle BCH=60°$，∴$CH=\frac{1}{2}BC=2, BH=2\sqrt{3},$，

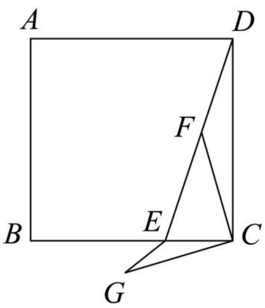
在 Rt$\triangle BEH$ 中，$BE=\sqrt{BH^2+EH^2}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$，∴$BF'+EF'\geq 2\sqrt{7}$，

∴$\triangle ABF'$的周长的最小值为 $AB+BF'+EF'=4+2\sqrt{7}$，故答案为：4+2$\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查旋转变换，菱形的性质，解直角三角形，全等三角形的判定与性质，勾股定理，等边三

角形等知识，解题关键在于学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，学会用转化的思想思考问题．

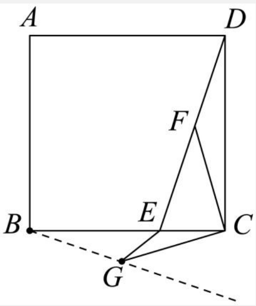
17、如图正方形 $ABCD$ 的边长为 3，E 是 BC 上一点且 $CE=1$，F 是线段 DE 上的动点．连接 CF，将线段 CF 绕点 C 逆时针旋转 90°得到 CG，连接 EG，则 EG 的最小值是_____．



【答案】$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【分析】如图，连接 BG．由△CBG≌△CDF，推出∠CBG＝∠CDF，因为∠CDF 是定值，推出点 G 在射线 BG 上运动，且 $\tan\angle CBG=\tan\angle CDF=\frac{EC}{CD}=\frac{1}{3}$，根据垂线段最短可知，当 $EG\perp BG$ 时，EG 的长最短．

【详解】解：如图，作射线 BG．



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$CB=CD$，∠BCD＝90°，

∵∠FCG＝∠DCB＝90°，∴∠BCG+∠BCF=90°，∠DCF+∠BCF=90°，∴∠BCG＝∠DCF，

在△CBG 和△CDF 中 $\begin{cases} BC=CD \\ \angle BCG=\angle DCF \\ CG=CF \end{cases}$，∴△$CBG$≌△$CDF$，∴∠$CBG$＝∠$CDF$，

∵∠CDF 是定值，∴点 G 在射线 BG 上运动，且 $\tan\angle CBG=\tan\angle CDF=\frac{EC}{CD}=\frac{1}{3}$，

根据垂线段最短可知，当 $EG\perp BG$ 时，EG 的长最短，

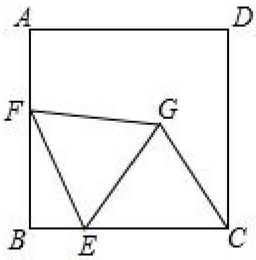
此时 $\tan\angle EBG=\frac{EG}{BG}=\frac{1}{3}$，设 $EG=m$，则 $BG=3m$，

在 Rt△BEG 中，∵$BE^2=BG^2+EG^2$，∴$4=m^2+9m^2$，

$\therefore m=\frac{\sqrt{10}}{5}$（负根已经舍弃），$\therefore EG$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，故答案为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

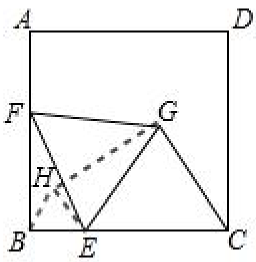
【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，垂线段最短等知识，熟练掌握全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，垂线段最短是解答本题的关键.

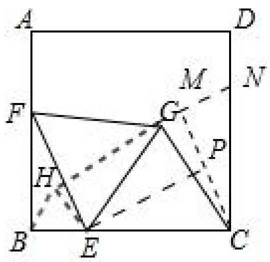
18、如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 上一点，且 $BE=1$，F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF，以 EF 为边向右侧作等边△EFG，连接 CG，则 CG 的最小值为______.



【答案】$\frac{5}{2}$

【详解】解：由题意可知，点 F 是主动点，点 G 是从动点，点 F 在线段上运动，点 G 也一定在直线轨迹上运动，将△EFB 绕点 E 旋转 60°，使 EF 与 EG 重合，得到△EFB≌△EHG



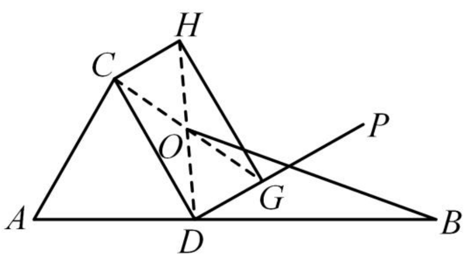


从而可知△EBH 为等边三角形，点 G 在垂直于 HE 的直线 HN 上

作 $CM\perp HN$，则 CM 即为 CG 的最小值；作 $EP\perp CM$，可知四边形 $HEPM$ 为矩形，

则 $CM=MP+CP=HE+\frac{1}{2}EC=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ 故答案为 $\frac{5}{2}$.

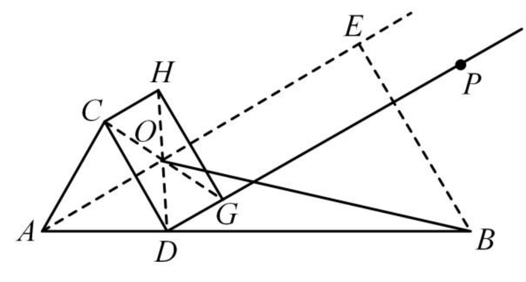
19、如图，线段 AB 的长为 12，点 D 在 AB 上（不与端点重合），以 AD 为边向上作等边△ADC，过 D 作与 CD 垂直的射线 DP，点 G 是 DP 上一动点（不与点 D 重合），以 DC、DG 为边作矩形 $CDGH$，对角线 CG 与 DH 交于点 O，连接 OB，则线段 BO 的最小值为________.



【答案】6

【分析】连接 AO，证明 AO 平分 $\angle CAD$，从而确定点 O 在定直线上，结合等边 $\triangle ADC$，确定 $\angle OAB=30°$，是定角，根据垂线段最短计算即可.

【详解】解：如图，连接 AO，



因为等边 $\triangle ADC$，矩形 $CDGH$，所以 $CA=DA$，$OC=OD$，$\angle CAD=60°$，

所以 $\begin{cases}CA=DA\\AO=AO\\OC=OD\end{cases}$，所以 $\triangle AOC\cong\triangle AOD$，所以 $\angle OAC=\angle OAD$，所以 AO 平分 $\angle CAD$，

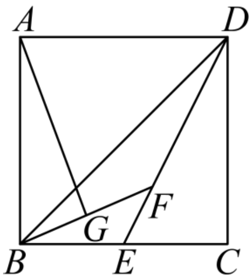
因为 $\angle CAD$ 是定角，所以 $\angle CAD$ 的角平分线是唯一确定的射线，

所以点 O 在定直线上，所以 $\angle OAB=30°$，过点 B 作 $BE\perp AO$ 于点 E，

因为 $AB=12$，所以 $BE=\frac{1}{2}AB=6$，故答案为：6.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，矩形的性质，三角形全等的判定和性质，垂线段最短，直角三角形的性质，熟练掌握垂线段最短，直角三角形的性质是解题的关键.

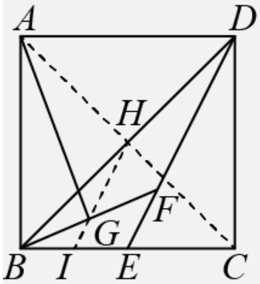
20、如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 8，点 E 是 BC 边的中点，连接 DE，点 F 是线段 DE 上不与点 D，E 重合的一个动点，连接 BF，点 G 是线段 BF 的中点，则线段 AG 的最小值为____________.



【答案】$4\sqrt{2}$

【分析】连接 AC，与 BD 相交于点 H,取 BE 中点 I，连接 HG、IG，由正方形 $ABCD$ 的边长是 8 得到 $\angle BAD=90°, AB=AD=8$，$BH=DH=\frac{1}{2}BD$，$AH\perp BD$，由中位线定理得到 $HG\parallel DE$，$IG\,//\,DE$,则 G、H、I 三点共线，即点 G 的运动轨迹是线段 HI，由 $AH\perp BD$，当点 G 和点 H 重合时，线段值 AG 最小，由勾股定理求出 $BD=8\sqrt{2}$，即可得到 $AH=\frac{1}{2}BD=4\sqrt{2}$，得到线段 AG 的最小值.

【详解】解：连接 AC，与 BD 相交于点 H,取 BE 中点 I，连接 HG、IG，



$\because$正方形$ABCD$的边长是8，$\therefore \angle BAD=90°, AB=AD=8$，$BH=DH=\frac{1}{2}BD$，$AH\perp BD$，

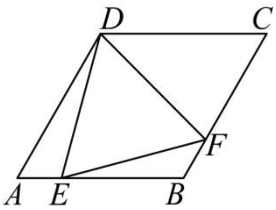
$\because$点G是线段BF的中点，$\therefore HG \parallel DE$，$IG \mathbin{/\!/} DE$，$\therefore G$、$H$、$I$三点共线，$\therefore$点$G$的运动轨迹是线段$HI$，

$\because AH\perp BD$，$\therefore$当点G和点H重合时，线段值AG最小，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$，$\therefore AH=\frac{1}{2}BD=4\sqrt{2}$，即线段$AG$的最小值为$4\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查了正方形的性质、三角形中位线定理、勾股定理等知识，证明G、H、I三点共线是解题的关键.

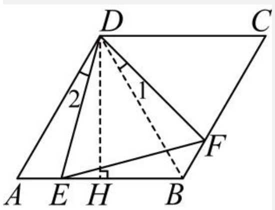
21、如图，在菱形$ABCD$中，$\angle A=60°$，$AB=1$，E，F两点分别从A，B两点同时出发，以相同的速度分别向终点B，C移动，连接EF，在移动的过程中，EF的最小值为______.



【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$/$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

【分析】本题考查了菱形的性质，等边三角形的判定与性质，全等三角形的判定和性质，连接DB，作$DH\perp AB$于H，如图，利用菱形的性质得$AD=AB=BC=CD$，则可判断$\triangle ABD$和$\triangle BCD$都是等边三角形，再证明$\triangle ADE\cong\triangle BDF$得到$\angle 2=\angle 1$，$DE=DF$，接着判定$\triangle DEF$为等边三角形，所以$EF=DE$，然后根据垂线段最短判断$DE$的最小值即可.

【详解】解：连接DB，作$DH\perp AB$于H，如图，



$\because$四边形$ABCD$为菱形，$\therefore AD=AB=BC=CD$，而$\angle A=60°$，

$\therefore \triangle ABD$和$\triangle BCD$都是等边三角形，$\therefore \angle ADB=\angle DBC=60°$，$AD=BD$，

在 $Rt\triangle ADH$ 中，$AH=\frac{1}{2}$，$AD=1$，$\therefore DH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BDF$ 中，$\begin{cases} AD=BD \\ \angle A=\angle FBD \\ AE=BF \end{cases}$，$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDF$，$\therefore \angle 2=\angle 1$，$DE=DF$

$\therefore \angle 1+\angle BDE=\angle 2+\angle BDE=\angle EDF=60°$，$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形，$\therefore EF=DE$，

而当 E 点运动到 H 点时，DE 的值最小，其最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore EF$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

22、已知，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle DEF$ 绕点 D 旋转（$DE<AB$），$\angle EDF=90°$，$DE=DF$，连接 AE，CF．

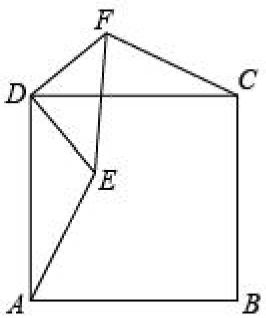


图1

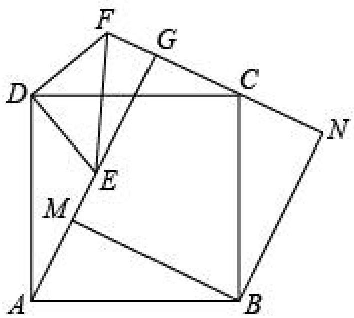


图2

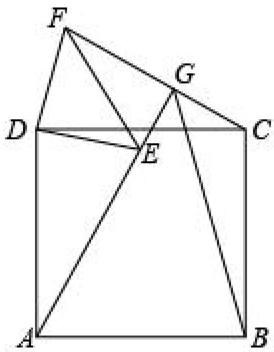


图3

(1)如图1，求证：$\triangle ADE \cong \triangle CDF$；(2)直线 AE 与 CF 相交于点 G．

① 如图2，$BM \perp AG$ 于点 M，$BN \perp CF$ 于点 N，求证：四边形 $BMGN$ 是正方形；

② 如图3，连接 BG，若 $AB=4$，$DE=2$，直接写出在 $\triangle DEF$ 旋转的过程中，线段 BG 长度的最小值．

【答案】(1)见解析(2)①见解析② $2\sqrt{6}$

【分析】(1) 根据SAS证明三角形全等即可；(2)① 根据邻边相等的矩形是正方形证明即可；② 作 $DH \perp AG$ 交 AG 于点 H，作 $BM \perp AG$ 于点 M，证明 $\triangle BMG$ 是等腰直角三角形，求出 BM 的最小值，可得结论．

【详解】（1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=DC$，$\angle ADC=90°$．

$\because DE=DF$，$\angle EDF=90°$．$\therefore \angle ADC=\angle EDF$，$\therefore \angle ADE=\angle CDF$，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases} DA=DC \\ \angle ADE=\angle CDF \\ DE=DF \end{cases}$ $\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF\,(\mathrm{SAS})$；

（2）① 证明：如图2中，设 AG 与 CD 相交于点 P．

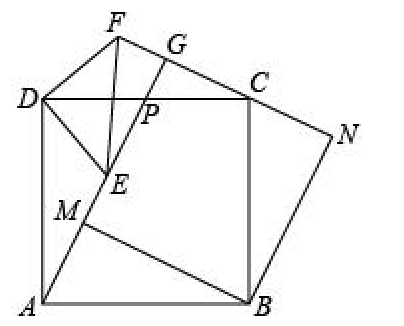


图2

$\because \angle ADP=90^\circ$，$\therefore \angle DAP+\angle DPA=90^\circ$．$\because \triangle ADE\cong\triangle CDF$，$\therefore \angle DAE=\angle DCF$．

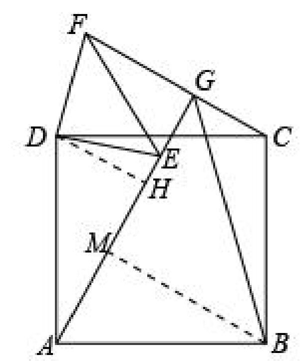
$\because \angle DPA=\angle GPC$，$\therefore \angle DAE+\angle DPA=\angle GPC+\angle GCP=90^\circ$．$\therefore \angle PGN=90^\circ$，

$\because BM\perp AG$，$BN\perp GN$，$\therefore$四边形 $BMGN$ 是矩形，$\therefore \angle MBN=90^\circ$．

$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=BC$，$\angle ABC=\angle MBN=90^\circ$．$\therefore \angle ABM=\angle CBN$．

又$\because \angle AMB=\angle BNC=90^\circ$，$\therefore \triangle AMB\cong\triangle CNB$．$\therefore MB=NB$．$\therefore$矩形 $BMGN$ 是正方形；

② 解：作 $DH\perp AG$ 交 AG 于点 H，作 $BM\perp AG$ 于点 M，



$\because \angle DHA=\angle AMB=90^\circ$, $\angle ADH=90^\circ-\angle DAH=\angle BAM$, $AD=AB$ $\therefore \triangle AMB\cong\triangle DHA$．$\therefore BM=AH$．

$\because AH^2=AD^2-DH^2$，$AD=4$，$\therefore DH$ 最大时，AH 最小，$DH_{最大值}=DE=2$．

$\therefore BM_{最小值}=AH_{最小值}=2\sqrt{3}$．由$(2)$①可知，$\triangle BGM$ 是等腰直角三角形，$\therefore BG_{最小值}=\sqrt{2}BM=2\sqrt{6}$．

【点睛】本题属于四边形综合题，考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考压轴题．