昆山市2025-2026学年高三数学一模考试模拟试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1. 已知集合 $A=\left\{x \mid 2x^2-x-1\le 0\right\}$，$B=\left\{x \mid x>0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

2. 已知样本空间 $\Omega=\{a,b,c,d\}$ 含有等可能的样本点，且 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $P\left(A\overline{B}\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

3. 已知 l,m 是两条不同的直线，α 为平面，$m\subset\alpha$，下列说法中正确的是（　　）

A. 若 $l\cap\alpha=A$，且 l 与 α 不垂直，则 l 与 m 一定不垂直

B. 若 l 与 α 不平行，则 l 与 m 一定是异面直线

C. 若 $l\cap\alpha=A$，且 $A\notin m$，则 l 与 m 可能平行

D. 若 $l//\alpha$，则 l 与 m 可能垂直

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1=-1, S_7=5a_4+10$，则 $S_4=$（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 10

5. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数.人体的血氧饱和度正常范围是 $95\%\sim100\%$，当血氧饱和度低于 90% 时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型：$S(t)=S_0\mathrm{e}^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S(t)$ 随给氧时间 t（单位：时）的变化规律，其中 S_0 为初始血氧饱和度，K 为参数.已知 $S_0=60\%$，给氧1小时后，血氧饱和度为 80%.若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为（　　）（精确到0.1，参考数据：$\ln 2\approx 0.69, \ln 3\approx 1.10$）

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.7　　D. 0.9

6. 在 ΔABC 中，“$\tan A\tan B<1$”是“ΔABC 为钝角三角形”的（　　）

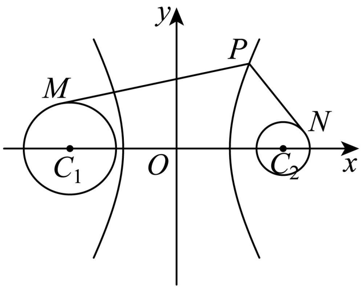
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7.已知函数 $f(x)=2^{\sin x}-2^{\cos x}$，则（　　）

A. $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$　　B. $f(x)$ 不是周期函数

C. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值　　D. $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有且只有一个零点

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的右支上一点 P，分别向 $\odot C_1:(x+4)^2+y^2=3$ 和 $\odot C_2:(x-4)^2+y^2=1$ 作切线，切点分别为 M，N，则 $\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}$ 的最小值为（　　）



A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 32

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题

9. 下列说法正确的是（　　）

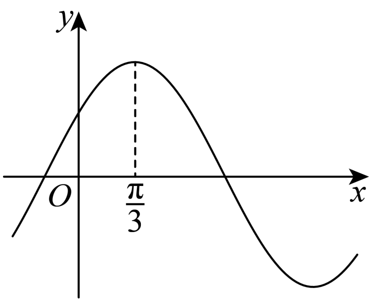
A. 若事件 A 和事件 B 互斥，$P(AB)=P(A)P(B)$

B. 数据 4，7，5，6，10，2，12，8 的第 70 百分位数为 8

C. 若随机变量 ξ 服从 $N\left(17,\sigma^2\right)$，$P(17<\xi\le 18)=0.4$，则 $P(\xi>18)=0.1$

D. 已知 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=0.3-0.7x$，则样本点 $(2,-3)$ 的残差为 -1.9

10. 函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x-1$（$0<\omega<1$）的图象如图所示，则（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $y=f(2x+\frac{\pi}{3})$ 是奇函数

C. $y=f(x+\frac{\pi}{6})\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

D. 若 $y=f(tx)$（$t>0$）在 $[0,\pi]$ 上有且仅有两个零点，则 $t\in[\frac{11}{6},\frac{17}{6})$

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 R，记 $g(x)=f'(x)$，且 $f(x)-f(-x)=2x$，$g(x)+g(2-x)=0$，则（　　）

A. $g(0)=1$

B. $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称

C. $f(x)+f(2-x)=0$

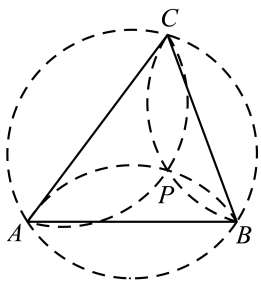
D. $\sum\limits_{k=1}^{n}g(k)=\dfrac{n-n^2}{2}$（$n\in\mathrm{N}^*$）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $(2+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，则 $\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}=$______.

13. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径为 6，且 $AB\perp BC$，$BC=2$，则该棱柱体积的最大值为____.

14. 某同学在学习和探索三角形相关知识时，发现了一个有趣的性质：将锐角三角形三条边所对的外接圆的三条圆弧（劣弧）沿着三角形的边进行翻折，则三条圆弧交于该三角形内部一点，且此交点为该三角形的垂心（即三角形三条高线的交点）.如图，已知锐角 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，且三条圆弧沿 $\triangle ABC$ 三边翻折后交于点 P.若 $AB=3$，则 $\sin\angle PAC=$__________；若 $AC:AB:BC=6:5:4$，则 $PA+PB+PC$ 的值为__________.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_n，S_n，a_n^2 成等差.

（1）求 a_1 及 $\{a_n\}$ 的通项公式；

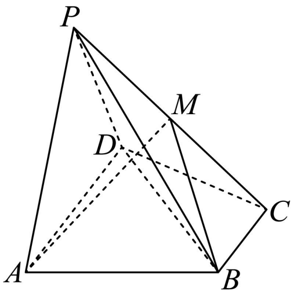
（2）记集合 $\left\{a_n \middle|\ a_n+\dfrac{4}{a_n}\le 2k, k\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的元素个数为 b_k，求数列 b_k 的前 50 项和.

16. 已知椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，点A，$C$分别是$E$的左、上顶点，$|AC|=\sqrt{5}$，且$E$的焦距为$2\sqrt{3}$.

（1）求E的方程和离心率；

（2）过点$(1,0)$且斜率不为零的直线交椭圆于R，S两点，设直线RS，CR，CS的斜率分别为k，k_1，k_2，若$k_1+k_2=-3$，求k的值.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为正三角形，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$AD\perp CD, AD=2BC=2, CD=\sqrt{3}, PB=\sqrt{6}$.



（1）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）点 M 为棱 PC 的中点，求 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值.

18. 随着科技的不断发展，人工智能技术的应用领域也将会更加广泛，它将会成为改变人类社会发展的重要力量．某科技公司发明了一套人机交互软件，它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答．在对该交互软件进行测试时，如果输入的问题没有语法错误，则软件正确应答的概率为80%；若出现语法错误，则软件正确应答的概率为30%．假设每次输入的问题出现语法错误的概率为10%．

（1）求一个问题能被软件正确应答的概率；

（2）在某次测试中，输入了$n(n \geq 6)$个问题，每个问题能否被软件正确应答相互独立，记软件正确应答的个数为X，$X=k(k=0,1,\cdots,n)$的概率记为$P\left(X=k\right)$，则n为何值时，$P\left(X=6\right)$的值最大？

19. 已知函数 $f(x)=2m\ln x-x+\dfrac{1}{x}$（$m>0$）.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$(1+\dfrac{1}{2^2})(1+\dfrac{1}{3^2})(1+\dfrac{1}{4^2})\cdots(1+\dfrac{1}{n^2})<\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$）；

（3）若函数 $g(x)=m^2\ln^2 x-x-\dfrac{1}{x}+2$ 有三个不同的零点，求 m 的取值范围

昆山市 2025-2026 学年高三数学一模考试模拟试题

答案与解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 2x^2-x-1\le 0\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意求集合 A，再根据交集运算求解.

【详解】由题意可得：$A=\{x\mid 2x^2-x-1\le 0\}=\left\{x\mid -\frac{1}{2}\le x\le 1\right\}$，

所以 $A\cap B=(0,1]$.

故选：D.

2. 已知样本空间 $\Omega=\{a,b,c,d\}$ 含有等可能的样本点，且 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $P(A\overline{B})=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意分别求得 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，结合独立事件的定义，可判定事件 A 与 B 相互独立，再结合对立事件的概念关系可运算得解.

【详解】由题意，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，

$\therefore P(AB)=P(A)P(B)$，

所以事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立，

$\therefore P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)(1-P(B))=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

故选：A.

3. 已知 l,m 是两条不同的直线，α 为平面，$m\subset\alpha$，下列说法中正确的是（　　）

A. 若 $l\,\mathrm{I}\,\alpha=A$，且 l 与 α 不垂直，则 l 与 m 一定不垂直

B. 若 l 与 α 不平行，则 l 与 m 一定是异面直线

C. 若 $l \cap \alpha = A$，且 $A \notin m$，则 l 与 m 可能平行

D. 若 $l // \alpha$，则 l 与 m 可能垂直

【答案】D

【解析】

【分析】结合点线面之间的关系逐项判断即可得.

【详解】对 A：在平面 α 内，存在无数条直线和 l 垂直，故 A 错误；

对 B：当 $l \subset \alpha$ 时，l 与 m 不是异面直线，故 B 错误；

对 C：若 $l \cap \alpha = A$，且 $A \notin m$，l 与 m 为异面直线，故 C 错误；

对 D：若 $l // \alpha$，在 α 内存在直线与 l 垂直，故其可能与 m 垂直，故 D 正确.

故选：D.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = -1, S_7 = 5a_4 + 10$，则 $S_4 =$（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，由等差数列的前 n 项和公式即可得到 $a_4 = 5$，再由等差数列的求和公式即可得到结果.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $S_7 = \dfrac{7(a_1 + a_7)}{2} = \dfrac{7 \times 2a_4}{2} = 7a_4$，

又 $S_7 = 5a_4 + 10$，则 $7a_4 = 5a_4 + 10$，即 $a_4 = 5$，

则 $S_4 = \dfrac{4(a_1 + a_4)}{2} = \dfrac{4(-1+5)}{2} = 8$.

故选：C

5. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数.人体的血氧饱和度正常范围是 $95\% \sim 100\%$，当血氧饱和度低于 90% 时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型：$S(t) = S_0 \mathrm{e}^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S(t)$ 随给氧时间 t（单位：时）的变化规律，其中 S_0 为初始血氧饱和度，K 为参数.已知 $S_0 = 60\%$，给氧 1 小时后，血氧饱和度为 80%.若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要给氧时间（单位：时）为（　　）

（精确到 0.1，参考数据：$\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$）

A. 0.3　　B. 0.5　　C. 0.7　　D. 0.9

【答案】B

【解析】

【分析】依据题给条件列出关于时间 t 的方程，解之即可求得给氧时间至少还需要的小时数.

【详解】设使得血氧饱和度达到正常值，给氧时间至少还需要 $t-1$ 小时，

由题意可得 $60e^{K}=80$， $60e^{Kt}=90$，两边同时取自然对数并整理，

得 $K=\ln\frac{80}{60}=\ln\frac{4}{3}=\ln 4-\ln 3=2\ln 2-\ln 3$， $Kt=\ln\frac{90}{60}=\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$，

则 $t=\frac{\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3}\approx\frac{1.10-0.69}{2\times 0.69-1.10}\approx 1.5$，则给氧时间至少还需要 0.5 小时

故选： B

6. 在ΔABC中，“ $\tan A\tan B<1$ ”是“ΔABC为钝角三角形”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】推出 $\tan A\tan B<1$ 的等价式子，即可判断出结论.

【详解】

$$\tan A\tan B<1\Leftrightarrow 1-\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}>0\Leftrightarrow\frac{-\cos C}{\cos A\cos B}>0$$

$\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C<0\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为钝角三角形.

∴在ΔABC中，“$\tan A\tan B<1$”是“ΔABC为钝角三角形”的充要条件.

故选：C.

【点睛】本题考查和与差的正切公式、充分性和必要性的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=2^{\sin x}-2^{\cos x}$，则（ ）

A. $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

B. $f\left(x\right)$不是周期函数

C. $f\left(x\right)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上存在极值

D. $f\left(x\right)$在区间$\left(0,\pi\right)$内有且只有一个零点

【答案】D

【解析】

【分析】对于 A，由诱导公式即可判断；对于 B，由三角函数周期可得 $f(2\pi+x)=f(x)$，由此即可判断；对于 C，由复合函数单调性即可判断；对于 D，令 $f(x)=2^{\sin x}-2^{\cos x}=0, x\in(0,\pi)$，解方程即可得解.

【详解】对于 A，

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}-2^{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=-\left(2^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}-2^{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，故 A 错误；

对于 B，$f(2\pi+x)=2^{\sin(2\pi+x)}-2^{\cos(2\pi+x)}=2^{\sin x}-2^{\cos x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，故 B 错误；

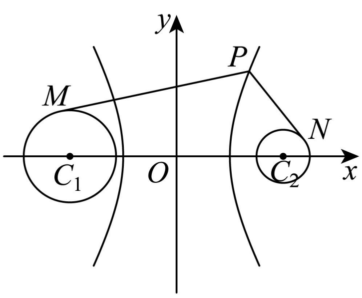
对于 C，由复合函数单调性可知 $y=2^{\sin x}, y=2^{\cos x}$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上分别单调递增、单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以不存在极值，故 C 错误；

对于 D，令 $f(x)=2^{\sin x}-2^{\cos x}=0, x\in(0,\pi)$，得 $2^{\sin x}=2^{\cos x}$，所以 $\sin x=\cos x$，即该方程有唯一解（函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内有唯一零点）$x=\frac{\pi}{4}$，故 D 正确.

故选：D.

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的右支上一点 P，分别向 $\odot C_1:(x+4)^2+y^2=3$ 和 $\odot C_2:(x-4)^2+y^2=1$ 作切线，切点分别为 M，N，则 $\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}$ 的最小值为（　　）



A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 32

【答案】C

【解析】

【分析】求得两圆的圆心和半径，设双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左右焦点为$F_1\left(-4,0\right)$，$F_2\left(4,0\right)$，连接$PF_1$，$PF_2$，$F_1M$，$F_2N$，运用勾股定理和双曲线的定义，结合三点共线时，距离之和取得最小值，计算即可得到所求值.

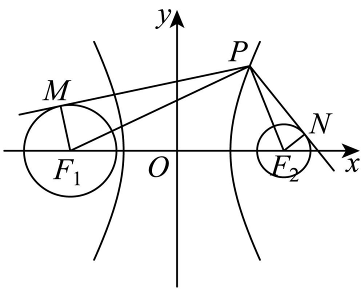
【详解】由双曲线方程$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$可知：$a=2,b=2\sqrt{3},c=\sqrt{a^2+b^2}=4$，

可知双曲线方程的左、右焦点分别为$F_1\left(-4,0\right)$，$F_2\left(4,0\right)$，

圆$C_1:\left(x+4\right)^2+y^2=3$的圆心为$C_1\left(-4,0\right)$（即$F_1$），半径为$r_1=\sqrt{3}$；

圆$C_2:\left(x-4\right)^2+y^2=1$的圆心为$C_2\left(4,0\right)$（即$F_2$），半径为$r_2=1$.

连接PF_1，PF_2，F_1M，F_2N，则$MF_1\perp PM,NF_2\perp PN$，



可得

$$\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}=\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)=\left|\overrightarrow{PM}\right|^2-\left|\overrightarrow{PN}\right|^2=\left(\left|PF_1\right|^2-r_1^2\right)-\left(\left|PF_2\right|^2-r_2^2\right)$$

$$=\left(\left|PF_1\right|^2-3\right)-\left(\left|PF_2\right|^2-1\right)=\left|PF_1\right|^2-\left|PF_2\right|^2-2=\left(\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|\right)\cdot\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|\right)-2$$

$$=2a\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|\right)-2\geq 2a\cdot 2c-2=2\times2\times2\times4-2=30,$$

当且仅当P为双曲线的右顶点时，取得等号，即$\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}$的最小值为30.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：根据数量积的运算律可得$\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}=\left|\overrightarrow{PM}\right|^2-\left|\overrightarrow{PN}\right|^2$，结合双曲线的定义整理得$\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)\cdot\overrightarrow{NM}=2a\left(\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|\right)-2$，结合几何性质分析求解.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 若事件A和事件B互斥，$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

B. 数据 4，7，5，6，10，2，12，8的第 70 百分位数为 8

C. 若随机变量ξ服从$N\left(17,\sigma^2\right)$，$P\left(17<\xi\le 18\right)=0.4$，则$P\left(\xi>18\right)=0.1$

D. 已知y关于x的回归直线方程为$\hat{y}=0.3-0.7x$，则样本点$(2,-3)$的残差为-1.9

【答案】BCD

【解析】

【分析】结合互斥事件易判断 A 错；将 8 个数排序，结合百分位数概念可判断 B 项；结合二项分布图象的对称特征得$P\left(\xi>18\right)=P\left(\xi>17\right)-P\left(17<\xi\le 18\right)$；结合残差概念可直接判断 D 项.

【详解】对于 A，若事件A和事件B互斥，$P\left(AB\right)=0$，未必有$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$，A 错；

对于 B，对数据从小到大重新排序，即：2，4，5，6，7，8，10，12，共 8 个数字，

由$8\times 70\%=5.6$，得这组数据的第 70 百分位数为第 6 个数 8，B 正确；

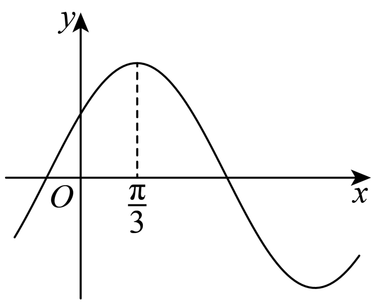
对于 C，因为变量ξ服从$N\left(17,\sigma^2\right)$，且$P\left(17<\xi\le 18\right)=0.4$，

则$P\left(\xi>18\right)=P\left(\xi>17\right)-P\left(17<\xi\le 18\right)=0.5-0.4=0.1$，故 C 正确；

对于 D，由$\hat{y}=0.3-0.7x$，得样本点$\left(2,-3\right)$的残差为$-3-\left(0.3-0.7\times 2\right)=-1.9$，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x-1$（$0<\omega<1$）的图象如图所示，则（　　）



A. $f(x)$的最小正周期为2π

B. $y=f(2x+\frac{\pi}{3})$是奇函数

C. $y=f(x+\frac{\pi}{6})\cos x$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称

D. 若$y=f(tx)$（$t>0$）在$\left[0,\pi\right]$上有且仅有两个零点，则$t\in[\frac{11}{6},\frac{17}{6})$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用二倍角公式、辅助角公式化简函数 $f(x)$，结合给定图象求出 ω，再逐项判断即可.

【详解】依题意，$f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$，

由 $f(\frac{\pi}{3})=2$，得 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，解得 $\omega=3k+\frac{1}{2},k\in Z$，而 $0<\omega<1$，

解得 $\omega=\frac{1}{2}$，$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，$f(x)$ 的最小正周期为 2π，A 正确；

$y=f(2x+\frac{\pi}{3})=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=2\cos 2x$ 是偶函数，B 错误；

$y=f(x+\frac{\pi}{6})\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x$，令 $g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x$，

则 $g(\frac{\pi}{6}-x)=2\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{6}-x)=2\cos x\cos[\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{3})]=2\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x=g(x)$，

$y=f(x+\frac{\pi}{6})\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，C 正确；

$f(tx)=2\sin(tx+\frac{\pi}{6})$，$t>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$tx+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},t\pi+\frac{\pi}{6}]$，

依题意，$2\pi\le t\pi+\frac{\pi}{6}<3\pi$，解得 $t\in[\frac{11}{6},\frac{17}{6})$，D 正确.

故选：ACD

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 及其导函数 $f'\left(x\right)$ 的定义域均为 R，记 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，且 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=2x$，$g\left(x\right)+g\left(2-x\right)=0$，则（　）

A. $g\left(0\right)=1$

B. $y=\frac{f\left(x\right)}{x}$ 的图象关于点 $\left(0,1\right)$ 对称

C. $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=0$

D. $\sum_{k=1}^{n}g\left(k\right)=\frac{n-n^2}{2}$（$n\in\mathrm{N}^*$）

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 A，对条件 $f(x)-f(-x)=2x$，求导可得；对于 B，对条件 $f(x)-f(-x)=2x$，两边同时除以 x 可得；对于 C，反证法，假设 C 正确，求导，结合条件 $g(x)+g(2-x)=0$，可得 $g(0)=0$ 与 $g(0)=1$ 矛盾，可判断 C；对于 D，求出 $g\left(1\right)=0$，$g\left(2\right)=-1$，所以有 $g(n+2)-g(n)=-2$，$g\left(2\right)-g\left(1\right)=-1$，$n\in\mathrm{N}^*$，得出数列 $\{g(n)\}$ 是以 0 为首项，-1 为公差的等差数列，利用等差数列求和公式即可判断.

【详解】因为 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=2x$，

所以 $f'(x)+f'(-x)=2$，即 $g(x)+g(-x)=2$，

令 $x=0$，得 $g(0)=1$，故 A 正确；

因为 $f(x)-f(-x)=2x$，

当 $x\neq0$ 时，$\frac{f(x)}{x}+\frac{f(-x)}{-x}=2$，

所以 $y=\frac{f(x)}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故 B 正确；

对于 C，假设 $f(x)+f(2-x)=0$ 成立，

求导得 $f'(x)-f'(2-x)=0$，

即 $g(x)-g(2-x)=0$，又 $g(x)+g(2-x)=0$，

所以 $g(x)=0$，所以 $g(0)=0$ 与 $g(0)=1$ 矛盾，故 C 错误；

对于 D，因为 $g(x)+g(-x)=2$，$g(x)+g(2-x)=0$，

所以 $g(2-x)-g(-x)=-2$，$g(0)=1$，$g(1)=0$，$g(2)=-1$，

所以有 $g(n+2)-g(n)=-2$，

所以数列 $\{g(n)\}$ 的奇数项是以 0 为首项，-2 为公差的等差数列，

数列 $\{g(n)\}$ 的偶数项是以 -1 为首项，-2 为公差的等差数列，

又 $g(2)-g(1)=-1$，$n\in N^*$，

所以数列 $\{g(n)\}$ 是以 0 为首项，-1 为公差的等差数列，

所以 $g(n)=1-n$，

所以 $\sum_{k=1}^{n}g(k)=\frac{n-n^2}{2}$，故 D 正确．

故选：ABD．

【点睛】关键点点睛：本题解答的关键是 $f(x)-f(-x)=2x$，$g(x)+g(2-x)=0$ 的应用，D 选项关键是推出 $\{g(n)\}$ 是以 0 为首项，-1 为公差的等差数列．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $(2+i)z=i$，则 $\frac{z}{2-i}=$______．

【答案】$\frac{i}{5}$

【解析】

【分析】利用复数除法法则进行计算出答案..

【详解】$(2+\mathrm{i})z=\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，故 $\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}^2}=\dfrac{\mathrm{i}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{\mathrm{i}}{5}$

13. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径为 6，且 $AB\perp BC$， $BC=2$，则该棱柱体积的最大值为

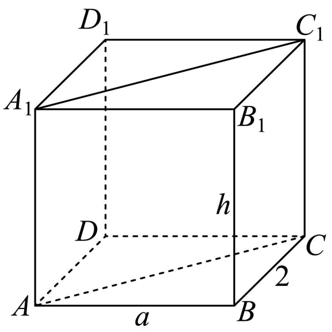
______.

【答案】16

【解析】

【分析】将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外补全成长方体，从而可得直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径即为该长方体的对角线 AC_1，从而可得 $6^2=a^2+2^2+h^2$，再根据重要不等式，即可求解.

【详解】如图，将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外补全成长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，



则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的直径即为该长方体的对角线 AC_1，

设 $AB=a$， $BB_1=h$，则 $6^2=a^2+2^2+h^2$， $\therefore a^2+h^2=32$，

$\therefore$ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\dfrac{1}{2}\times a\times 2\times h=ah\le\dfrac{a^2+h^2}{2}=16$，

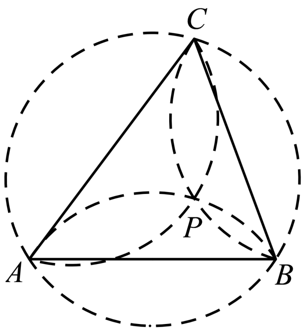
当且仅当 $a=h=4$ 时，等号成立，

$\therefore$ 该棱柱体积的最大值为 16.

故答案为：16.

14. 某同学在学习和探索三角形相关知识时，发现了一个有趣的性质：将锐角三角形三条边所对的外接圆的三条圆弧（劣弧）沿着三角形的边进行翻折，则三条圆弧交于该三角形内部一点，且此交点为该三角形的垂心（即三角形三条高线的交点）.如图，已知锐角 $\vartriangle ABC$ 外接圆的半径为 2，且三条圆弧沿 $\vartriangle ABC$ 三边翻折后交于点 P .若 $AB=3$，则 $\sin\angle PAC=$__________；若 $AC:AB:BC=6:5:4$，则 $PA+PB+PC$

的值为____________.



【答案】 ①. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ②. $\frac{23}{4}$##5.75

【解析】

【分析】第一空，由正弦定理求得$\sin\angle ACB=\frac{3}{4}$，可得$\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{7}}{4}$，利用三角形垂心性质结合三角形诱导公式推得$\sin\angle PAC=\cos\angle ACB$，即得答案；

第二空，设$\angle CAB=\theta,\angle CBA=\alpha,\angle ACB=\beta$，由余弦定理求得它们的余弦值，然后由垂心性质结合正弦定理表示出$PA+PB+PC=4(\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta)$，即可求得答案.

【详解】设外接圆半径为R，则$R=2$，

由正弦定理，可知$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{3}{\sin\angle ACB}=2R=4$，

即$\sin\angle ACB=\frac{3}{4}$，由于$\angle ACB$是锐角，故$\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

又由题意可知P为三角形ABC的垂心，即$AP\perp BC$，故$\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\angle ACB$，

所以$\sin\angle PAC=\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{7}}{4}$；

设$\angle CAB=\theta,\angle CBA=\alpha,\angle ACB=\beta$，

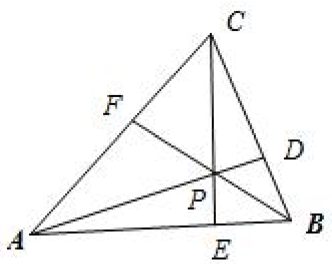
则$\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\beta,\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta,\angle PAB=\frac{\pi}{2}-\alpha$，

由于$AC:AB:BC=6:5:4$，不妨假设$AC=6,AB=5,BC=4$，

由余弦定理知$\cos\theta=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\frac{3}{4},\cos\alpha=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8},\cos\beta=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$，

设 AD,CE,BF 为三角形的三条高，由于 $\angle ECB+\angle EBC=\frac{\pi}{2},\angle PCD+\angle CPD=\frac{\pi}{2}$ ，

故 $\angle EBC=\angle CPD$ ，



则得 $\angle APC=\pi-\angle CPD=\pi-\angle EBC=\pi-\angle ABC$，

所以 $\frac{PC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}=\frac{PA}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{AC}{\sin\angle APC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R=4$，

同理可得 $\frac{PB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R=4$，

所以 $PA+PB+PC=4(\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta)=4\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{9}{16}\right)=\frac{23}{4}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{7}}{4}$；$\frac{23}{4}$

【点睛】本题重要考查了正余弦定理在解三角形中的应用，涉及到三角形垂心的性质的应用，解答时要能灵活地结合垂心性质寻找角之间的关系，应用正余弦定理，解决问题.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_n，S_n，a_n^2 成等差.

（1）求 a_1 及 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记集合 $\left\{a_n \middle| \ a_n+\frac{4}{a_n}\le 2k,k\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的元素个数为 b_k，求数列 b_k 的前 50 项和.

【答案】（1）$a_1=1$，$a_n=n$

（2）2497

【解析】

【分析】（1）根据等差中项可得 $2S_n=a_n+a_n^2$，结合 S_n 与 a_n 之间的关系分析可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，再利用等差数列通项公式运算求解；

（2）根据题意可得 $k \ge \frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)$，结合基本不等式可得 $b_k=\begin{cases}0,k=0\\1,k=1\\2k-1,k\ge 3\end{cases}$，结合等差数列求和公式运算求解.

【小问 1 详解】

因为 a_n， S_n， a_n^2 成等差，则 $2S_n=a_n+a_n^2$，且 $a_n>0$，

当 $n=1$ 时，可得 $2a_1=a_1+a_1^2$，解得 $a_1=1$ 或 $a_1=0$（舍去）;

当 $n\ge 2$ 时，可得 $2S_{n-1}=a_{n-1}+a_{n-1}^2$，

两式相减得 $2a_n=a_n-a_{n-1}+a_n^2-a_{n-1}^2$，整理得 $\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}\right)=\left(a_n+a_{n-1}\right)$，

且 $a_n+a_{n-1}>0$，则 $a_n-a_{n-1}=1$；

可知数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 1，公差为 1 的等差数列，所以 $a_n=1+n-1=n$.

【小问 2 详解】

因为 $a_n+\frac{4}{a_n}\le 2k$，由（1）可得 $n+\frac{4}{n}\le 2k$，即 $k\ge \frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)$,

因为 $\frac{1}{2}\left(n+\frac{4}{n}\right)\ge \frac{1}{2}\times 2\sqrt{n\cdot\frac{4}{n}}=2$，当且仅当 $n=\frac{4}{n}$，即 $n=2$ 时，等号成立，

可知 $b_1=0,b_2=1$；

当 $k\ge 3$ 时，因为 $\frac{1}{2}\left(2k-1+\frac{4}{2k-1}\right)=k-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2k-1}\right)\le k,\frac{1}{2}\left(2k+\frac{4}{2k}\right)=k+\frac{1}{k}>k$，

所以 $b_k=2k-1$；

综上所述：$b_k=\begin{cases}0,k=0\\1,k=1\\2k-1,k\ge 3\end{cases}$.

所以数列 b_k 的前 50 项和为 $0+1+5+7+\cdots+99=1+\frac{48(5+99)}{2}=2497$.

16. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，点 A，$C$ 分别是 E 的左、上顶点，$|AC|=\sqrt{5}$，且 E 的焦距为 $2\sqrt{3}$.

（1）求E的方程和离心率；

（2）过点$(1,0)$且斜率不为零的直线交椭圆于R，S两点，设直线RS，CR，CS的斜率分别为k，k_1，k_2，若$k_1+k_2=-3$，求k的值．

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）3

【解析】

【分析】（1）由$|AC|$的值，可得a，b的关系，再由焦距可得c的值，又可得a，b的关系，两式联立，可得a，b的值，即求出椭圆的方程；

（2）设直线RS的方程，与椭圆的方程联立，消元、列出韦达定理，求出直线CR，CS的斜率之和，由题意整理可得参数的值，进而求出直线RS的斜率的大小．

【小问1详解】

由题意可得$A(-a,0)$，$C(0,b)$，

可得$|AC|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，$2c=2\sqrt{3}$，可得$c=\sqrt{3}$，

可得$a^2-b^2=c^2=3$，$a^2+b^2=5$，

解得$a^2=4$，$b^2=1$，

所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

【小问2详解】

由（1）可得$C(0,1)$，

【小问3详解】

【小问4详解】

由题意设直线RS的方程为$x=my+1\left(m\neq0\right)$，则$k=\frac{1}{m}$，

设$R\left(x_1,y_1\right)$，$S\left(x_2,y_2\right)\left(x_1x_2\neq0\right)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=my+1\end{cases}$，整理可得$(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

显然$\Delta>0$，且$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{4+m^2}$，

直线CR，CS的斜率$k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1}$，$k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2}$，

则$k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{(my_2+1)(y_1-1)+(my_1+1)(y_2-1)}{(my_1+1)(my_2+1)}$

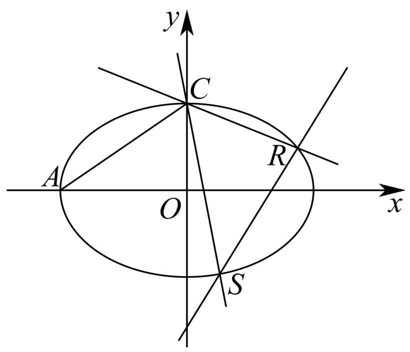
$=\dfrac{2my_1y_2+(1-m)(y_1+y_2)-2}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}$

$=\dfrac{2m\cdot\dfrac{-3}{4+m^2}+(1-m)\cdot\dfrac{-2m}{4+m^2}-2}{m^2\cdot\dfrac{-3}{4+m^2}+m\cdot\dfrac{-2m}{4+m^2}+1}=\dfrac{2}{m-1}$，

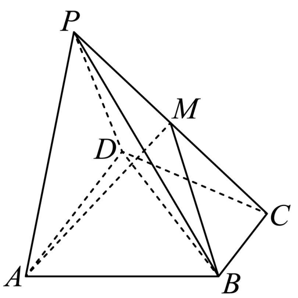
因为$k_1+k_2=-3$，即$-3=\dfrac{2}{m-1}$，解得$m=\dfrac{1}{3}$，

所以直线RS的斜率$k=\dfrac{1}{m}=3$．

即k的值为3.



17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$\triangle PAD$为正三角形，底面$ABCD$为直角梯形，$AD//BC$，$AD\perp CD, AD=2BC=2, CD=\sqrt{3}, PB=\sqrt{6}$.



（1）求证：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

（2）点M为棱PC的中点，求BM与平面PCD所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

【解析】

【分析】（1）取 AD 的中点 K，连接 PK,BK，可证 $PK\perp$平面 $ABCD$，根据判定定理可证平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$；

（2）以 K 为坐标原点 KA,KB,KP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，利用线面角的向量公式可求线面角的正弦值.

【小问 1 详解】

证明：如图，取 AD 的中点 K，连接 PK,BK，

$\because \triangle PAD$ 为正三角形，$AD=2$，$\therefore PK=\sqrt{3}$ 且 $PK\perp AD$.

$\because AD=2BC=2$，K 为 AD 的中点，$\therefore DK=BC$，

又$\because$底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$ 即 $DK//BC$，故四边形 $BKDC$ 为平行四边形，

而 $AD\perp DC$，所以四边形 $BKDC$ 为矩形，$\therefore BK\perp AD, BK=CD=\sqrt{3}$.

$\because PB=\sqrt{6},\therefore PK^2+BK^2=PB^2,\therefore PK\perp BK.$

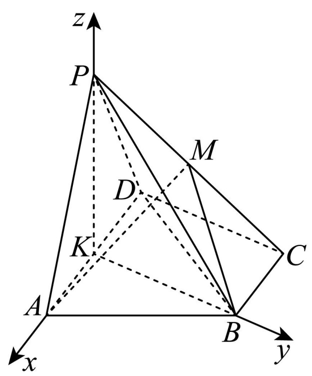
$\because PK\perp AD, BK\cap AD=K, BK, AD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PK\perp$平面 $ABCD$.

$\because PK\subset$平面 PAD，$\therefore$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$.

【小问 2 详解】

由（1）得 $PK\perp AD, PK\perp KB$，由（1）又可得 $BK\perp AD$，

如图，以 K 为坐标原点 KA,KB,KP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $P(0,0,\sqrt{3}),B(0,\sqrt{3},0),C(-1,\sqrt{3},0),D(-1,0,0)$，$M(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(0,-\sqrt{3},0),\overrightarrow{PD}=(-1,0,-\sqrt{3}),\overrightarrow{BM}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\sqrt{3}y=0\\ -x-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=0,z=-1$，$\vec{n}=(\sqrt{3},0,-1)$，

设 BM 与平面 PCD 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\overrightarrow{BM},\vec{n}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right||\vec{n}|}=\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$

$\therefore$ BM 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

18. 随着科技的不断发展，人工智能技术的应用领域也将会更加广泛，它将会成为改变人类社会发展的重要力量．某科技公司发明了一套人机交互软件，它会从数据库中检索最贴切的结果进行应答．在对该交互软件进行测试时，如果输入的问题没有语法错误，则软件正确应答的概率为 80%；若出现语法错误，则软件正确应答的概率为 30%．假设每次输入的问题出现语法错误的概率为 10%．

（1）求一个问题能被软件正确应答的概率；

（2）在某次测试中，输入了 $n(n\geq 6)$ 个问题，每个问题能否被软件正确应答相互独立，记软件正确应答的个数为 X，$X=k(k=0,1,\cdots,n)$ 的概率记为 $P\left(X=k\right)$，则 n 为何值时，$P\left(X=6\right)$ 的值最大？

【答案】（1）0.75

（2）7 或 8

【解析】

【分析】（1）根据题意结合全概率公式运算求解；

（2）由题意可知：$X\sim B\left(n,\frac{3}{4}\right)$ 且 $P\left(X=6\right)=\mathrm{C}_n^6\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^{n-6}$，结合数列单调性分析求解.

【小问 1 详解】

记“输入的问题没有语法错误”为事件 A，“回答正确”为事件 B，

由题意可知：$P\left(\overline{A}\right)=0.1,P\left(B\mid A\right)=0.8,P\left(B\mid\overline{A}\right)=0.3$，则 $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=0.9$，

所以 $P(B)=P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})+P(B\mid A)P(A)=0.75$.

【小问 2 详解】

由（1）可知：$P(B)=0.75=\dfrac{3}{4}$,

则 $X\sim B\left(n,\dfrac{3}{4}\right)$，可得 $P(X=6)=C_n^6\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^{n-6}=C_n^6\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-6}$,

令 $a_n=C_n^6\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-6}$，则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{C_{n+1}^6\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-5}}{C_n^6\left(\dfrac{3}{4}\right)^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-6}}=\dfrac{n+1}{4(n-5)}$,

令 $\dfrac{n+1}{4(n-5)}>1$，解得 $n<7$，可知当 $n\le 6$，可得 $a_{n+1}>a_n$；

令 $\dfrac{n+1}{4(n-5)}<1$，解得 $n>7$，可知当 $n\ge 8$，可得 $a_{n+1}<a_n$；

令 $\dfrac{n+1}{4(n-5)}=1$，解得 $n=7$，可得 $a_8=a_7$；

所以当 $n=7$ 或 $n=8$ 时，a_n 最大，即 n 为 7 或 8 时，$P(X=6)$ 的值最大.

19. 已知函数 $f(x)=2m\ln x-x+\dfrac{1}{x}$（$m>0$）.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$(1+\dfrac{1}{2^2})(1+\dfrac{1}{3^2})(1+\dfrac{1}{4^2})\cdots(1+\dfrac{1}{n^2})<e^{\frac{2}{3}}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\ge 2$）；

（3）若函数 $g(x)=m^2\ln^2 x-x-\dfrac{1}{x}+2$ 有三个不同的零点，求 m 的取值范围.

【答案】（1）答案见解析；

（2）证明见解析；（3）$(1,+\infty)$.

【解析】

【分析】（1）求出函数 $f(x)$ 的导数，按 $0<m\le 1$ 与 $m>1$ 分类讨论求出 $f(x)$ 的单调区间.

（2）利用（1）中 $m=1$ 时的结论，再利用裂项相消法求和，推理即得.

（3）变形函数 $g(x)$，将 $g(x)$ 的零点个数问题转化为 $f(t)$ 的零点个数，再借助导数及零点存在性定理求解.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\dfrac{2m}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+2mx-1}{x^2}$，

设 $k(x)=-x^2+2mx-1$，则 $\Delta=4(m^2-1)$，

①当 $0<m\le 1$ 时，$\Delta\le 0, f'(x)\le 0$ 恒成立，且至多一点处为 0，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减；

②当 $m>1$ 时，$\Delta>0, k(x)$ 有两个零点 $x_1=m-\sqrt{m^2-1}>0, x_2=m+\sqrt{m^2-1}>0$，

则当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$k(x)<0$，即 $f'(x)<0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$k(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，

所以当 $0<m\le 1$ 时，$f(x)$ 的递减区间为 $(0,+\infty)$；

当 $m>1$ 时，$f(x)$ 的递减区间为 $(0,m-\sqrt{m^2-1}),(m+\sqrt{m^2-1},+\infty)$，递增区间为 $(m-\sqrt{m^2-1},m+\sqrt{m^2-1})$.

【小问 2 详解】

由（1）知，当 $m=1$ 时，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<f(1)=0$，

则 $\ln x<\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}$，令 $x=1+\dfrac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}^*,n\ge 2)$，

于是 $\ln(1+\dfrac{1}{n^2})<\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n^2})-\dfrac{1}{2(1+\dfrac{1}{n^2})}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2})<\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{n-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{2}}$，

$$\ln(1+\frac{1}{2^2})+\ln(1+\frac{1}{3^2})+\ln(1+\frac{1}{4^2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n^2})$$

$$<(\frac{1}{2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2+\frac{1}{2}})+(\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3+\frac{1}{2}})+\cdots+(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})=\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}，$$

所以 $(1+\dfrac{1}{2^2})(1+\dfrac{1}{3^2})(1+\dfrac{1}{4^2})\cdots(1+\dfrac{1}{n^2})<\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$.

【小问 3 详解】

函数 $g(x)=m^2\ln^2 x-x-\dfrac{1}{x}+2=m^2\ln^2 x-\dfrac{(x-1)^2}{x}=(m\ln x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}})(m\ln x+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}})$，

由于 $\ln x$ 与 $x-1$ 同号，则 $y=m\ln x+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ 只有一个零点 $x=1$，

令 $t=\sqrt{x}$，由 $f(1)=0$，则 $g(x)$ 有三个不同的零点等价于函数 $f(t)$ 有三个不同的零点，

由（1）知，当$0<m\le 1$时，$f(t)$在$(0,+\infty)$上单调递减，不合题意；

当$m>1$时，由（1）知，$f(x)$的两极值点x_1,x_2满足$x_1x_2=1$，所以$t_1t_2=1$，得$t_1<1<t_2$，

由$f(1)=0$， 则$f(t_1)<f(1)=0<f(t_2)$，由（2）知，当$t>1$时，$\ln t<\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}$，

则$\ln\sqrt{t}<\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{t}}$，即$\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$，

因此$f(4m^2)=2m\ln(4m^2)-4m^2+\frac{1}{4m^2}<2m(2m-\frac{1}{2m})-4m^2+\frac{1}{4m^2}=\frac{1-4m^2}{4m^2}<0$ ，

由零点存在性定理知，$f(t)$在区间$(t_2,4m^2)$上有唯一的一个零点t_0，

显然$f(t_0)+f(\frac{1}{t_0})=2m\ln t_0-t_0+\frac{1}{t_0}+2m\ln\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t_0}+t_0=0$，

而$f(t_0)=0$，则$f(\frac{1}{t_0})=0$，于是当$m>1$时，$f(t)$存在三个不同的零点$\frac{1}{t_0},1,t_0$，

所以m的取值范围是$(1,+\infty)$.

【点睛】思路点睛：涉及含参的函数零点问题，利用函数零点的意义等价转化，构造函数并用导数探讨函数的单调性、最值等，结合零点存在性定理，借助数形结合思想分析解决问题