

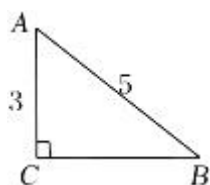
昆山 2022-2023 学年九年级上学期期末数学试题

姓名：_____ 得分：_____

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

- A. $y=2x-1$ B. $x^2=6$ C. $5xy-1=1$ D. $2(x+1)=2$

 2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $AC=3$ ，则 $\sin B$ 等于（ ）


- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{3}{5}$

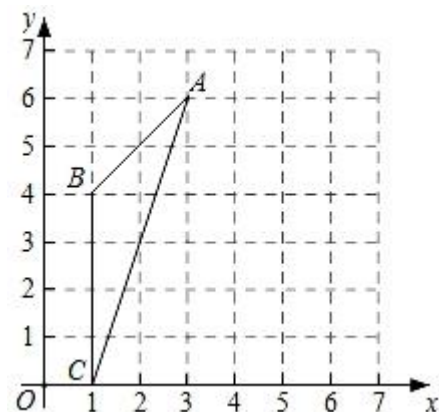
 3. 已知 $\odot O$ 的半径为 5cm ，点 P 在 $\odot O$ 上，则 OP 的长为（ ）

- A. 4cm B. 5cm C. 8cm D. 10cm

4. 九（1）班 45 名同学一周课外阅读时间统计如表所示，那么该班 45 名同学一周课外阅读时间的众数、中位数分别是（ ）

人数（人）	5	19	15	6
时间（小时）	6	7	9	10

- A. 7, 7 B. 19, 8 C. 10, 7 D. 7, 8

 5. 如图，已知点 $A(3, 6)$ 、 $B(1, 4)$ 、 $C(1, 0)$ ，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是（ ）


- A. $(0, 0)$ B. $(2, 3)$ C. $(5, 2)$ D. $(1, 4)$

6. 已知二次函数 $y=ax^2-2ax+1$ ($a<0$) 图象上三点 $A(-1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ ， $C(4, y_3)$ ，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系为（ ）

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_1 < y_3 < y_2$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

7. 为解决群众看病贵的问题, 有关部门决定降低药价, 对某种原价为 289 元的药品进行连续两次降价后为 256 元, 设平均每次降价的百分率为 x , 则下面所列方程正确的是 ()

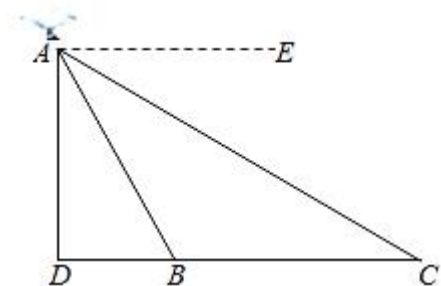
A. $289(1-x)^2=256$

B. $256(1-x)^2=289$

C. $289(1-2x)=256$

D. $256(1-2x)=289$

8. 如图, 嘉琪在一座桥的附近试飞一架小型无人机, 为了测量无人机飞行的高度 AD , 嘉琪通过操控装置测得无人机俯视桥头 B, C 的俯角分别为 $\angle EAB=60^\circ$ 和 $\angle EAC=30^\circ$, 且 D, B, C 在同一水平线上. 已知桥 $BC=30$ 米, 则无人机的飞行高度 $AD=$ ()



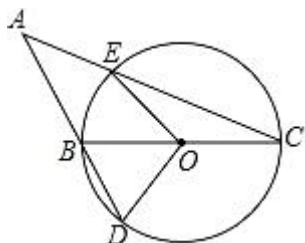
A. 15 米

B. $15\sqrt{3}$ 米

C. $(15\sqrt{3}-15)$ 米

D. $(15\sqrt{3}+15)$ 米

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 BC 为直径的 $\odot O$, 交 AB 的延长线于点 D , 交 AC 于点 E . 连接 OD, OE , 若 $\angle DOE=130^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()



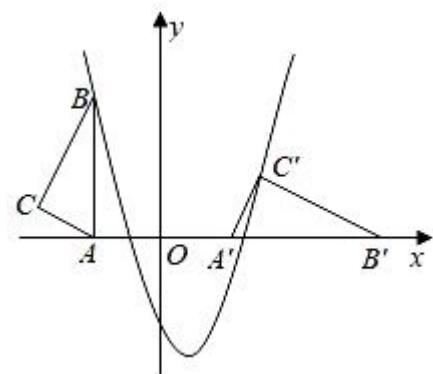
A. 45°

B. 40°

C. 35°

D. 25°

10. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的边 $AB \perp x$ 轴, $A(-2, 0)$, $C(-4, 1)$, 二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象经过点 B . 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移 m ($m>0$) 个单位, 使点 A 平移到点 A' , 然后绕点 A' 顺时针旋转 90° , 若此时点 C 的对应点 C' 恰好落在抛物线上, 则 m 的值为 ()



A. $\sqrt{5}+1$

B. $\sqrt{2}+3$

C. $\sqrt{6}+2$

D. $2\sqrt{2}+1$

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分，请将答案填在答题卷相应的位置上。）

11. 抛物线 $y=x^2+1$ 的顶点坐标是_____.

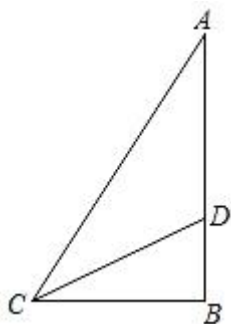
12. 一只不透明的袋子中有若干个黑球和若干个白球，共 15 个，这些球除颜色外都相同，搅匀后从中任意摸出一个球，若摸到白球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，则白球的个数为_____个.

13. 若圆锥的高为 4，底圆半径为 3，则这个圆锥的侧面积为_____。（用含 π 的结果表示）

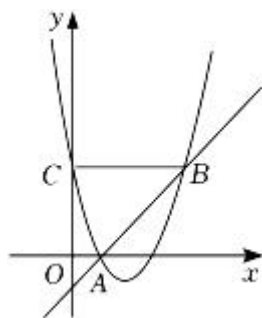
14. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

15. 将抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ 先向右平移 3 个单位，再向下平移 1 个单位，得到的新抛物线的函数表达式为_____.

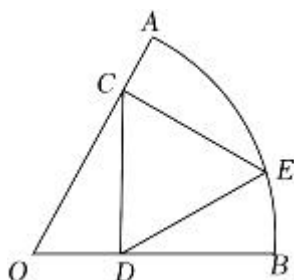
16. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AB = 5$ ， $\angle A = \alpha$ ，易知 $\tan \alpha = \frac{3}{5}$ ，聪明的小强想求 $\tan 2\alpha$ 的值，于是他在 AB 上取点 D ，使得 $CD = AD$ ，则 $\tan 2\alpha$ 的值为_____.



17. 如图，抛物线 $y_1 = a(x-2)^2 + c$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 C 两点，点 B 在抛物线上，且 BC 平行于 x 轴，直线 $y_2 = x - 1$ 经过 A 、 B 两点，则关于 x 的不等式 $a(x-2)^2 + c + 1 > x$ 的解集是_____.



18. 如图，半径为 4 的扇形 OAB 中， $\angle O = 60^\circ$ ， C 为半径 OA 上一点，过 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D ，以 CD 为边向右作等边 $\triangle CDE$ ，当点 E 落在 $\widehat{AB}$ 上时， $CD =$ _____.



三、解答题（本大题共 10 小题，共 76 分.）

19. 计算： $\sqrt{3}\sin 60^\circ - 3\tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ$.

20. 解方程： $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

21. 已知二次函数 $y = x^2 + 3mx + 1 - m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $(2, 0)$.(1) 求 m 的值；(2) 求这个函数图象与 x 轴另一个交点的横坐标.

22. 为贯彻落实党中央关于打击治理电信网络诈骗的决策部署，我市加大了预防诈骗的宣传工作. 为了了解学生预防诈骗的意识情况，我市某中学在七年级随机抽取部分学生进行相关知识测试，并依据成绩（百分制）绘制出两幅不完整的统计图表，请根据图表中信息回答下列问题：

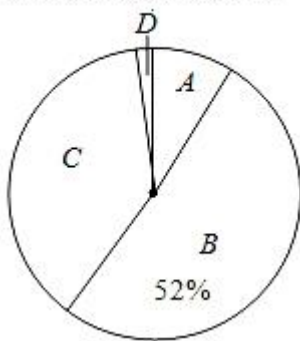
测试成绩统计表

等级	测试成绩 x	人数
A. 防范意识非常强	$90 < x \leq 100$	4
B. 防范意识比较强	$75 < x \leq 90$	26
C. 有基本防范意识	$60 < x \leq 75$	m
D. 防范意识较薄弱	$50 < x \leq 60$	1

(1) 本次抽取调查的学生共有____人，统计表中 m 的值为____，扇形统计图中表示 A 等级的扇形圆心角度数为____°；

(2) 已知该校七年级共有学生 1200 人，请你估计该校七年级对于电信网络诈骗的“防范意识非常强”和“防范意识比较强”的学生共有多少人？

测试成绩扇形统计图



23. 为大力弘扬“奉献、友爱、互助、进步”的志愿精神，我市某社区开展了“文明新风进社区”系列志愿服务活动，参加活动的每位志愿者必须从 A. “垃圾分类入户宣传”、B. “消防安全知识宣传”、C. “走访慰问孤寡老人”、D. “社区环境整治活动”四个活动主题中随机选取一个主题中随机选取一个主题.

- (1) 志愿者小李选取 A. “垃圾分类入户宣传”这个主题的概率是_____.
- (2) 志愿者小张和小李从 A、B、C、D 四个主题中分别随机选取一个主题，请用列表或画树状图的方法，求他们选取相同主题的概率.

24. 如图 1，是手机支架的实物图，图 2 是它的侧面示意图，其中 CD 长为 $6\sqrt{2}cm$ ， BC 长为 $12cm$. $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 45^\circ$.

- (1) 点 D 到 BC 的距离为_____cm;
- (2) 求点 D 到 AB 的距离.



图 1

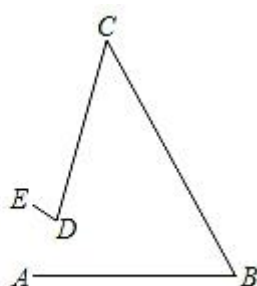


图 2

25. 某公司电商平台. 在 2021 年国庆期间举行了商品打折促销活动，经市场调查发现，某种商品的周销售量 y (件) 是关于售价 x (元/件) 的一次函数. 已知，当 $x=50$ 时， $y=200$ ；当 $x=80$ 时， $y=140$.

- (1) 求 y 与 x 的函数表达式 (不要求写出自变量的取值范围)；
- (2) 若该商品进价为 30 (元/件).
- ① 当售价 x 为多少元时，周销售利润 W 最大？并求出此时的最大利润；
- ② 因原料涨价，该商品进价提高了 a (元/件) ($a>0$)，公司为回馈消费者，规定该商品售价 x 不得超过 75 (元/件)，且该商品在今后的销售中，周销售量 y 与售价 x 仍满足 (1) 中的函数关系，若周销售最大利润是 6000 元，求 a 的值.

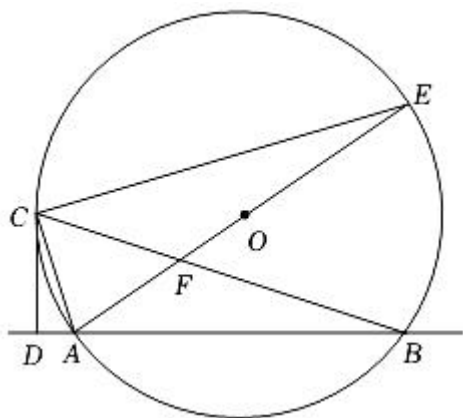
26. 如图，以 AE 为直径的 $\odot O$ 交直线 AB 于 A, B 两点，点 C 在 $\odot O$ 上，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，连接 AC, BC, CE ，其中 BC 与 AE 交于点 F ，且 AC 平分 $\angle DAE$ 。

(1) 求证： CD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AD=1, AB=8$ 。

①求 CD 的长；

②求 $\tan \angle AFC$ 的值。

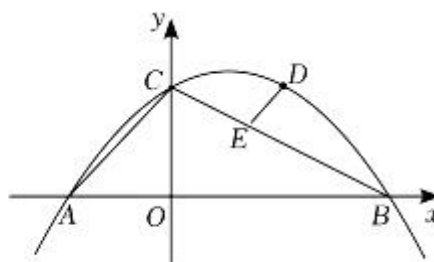
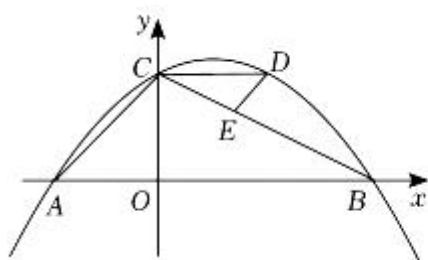


27. 如图，二次函数 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ 的图象交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C ，点 D 是 BC 上方抛物线上的一点，过 D 作 AC 的平行线，交 BC 于点 E 。

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 连接 CD ，当 $CD \parallel x$ 轴时，求 $\triangle CDE$ 的面积；

(3) 求 DE 的最大值。



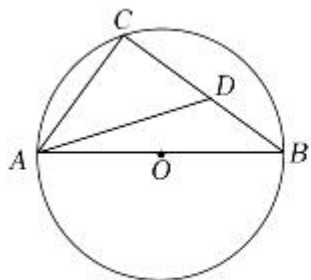
(备用图)

28. 如果三角形的两个内角 α 与 β 满足 $\alpha - \beta = 90^\circ$ ，那么我们称这样的三角形为“准直角三角形”.

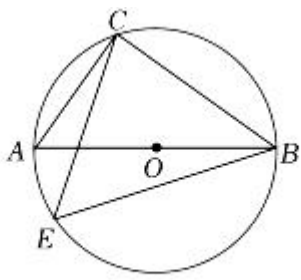
(1) 若 $\triangle ABC$ 是“准直角三角形”， $\angle C > 90^\circ$ ， $\angle A = 70^\circ$ ，则 $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

(2) 如图 1， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB = 10$ ， D 是 BC 上的一点， $\tan B = \frac{3}{4}$ ，若 $CD = \frac{9}{2}$ ，请判断 $\triangle ABD$ 是否为“准直角三角形”，并说明理由.

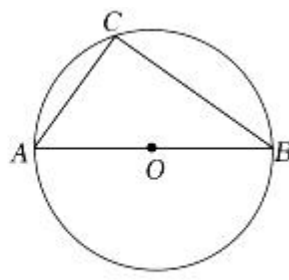
(3) 如图 2， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 是 $\odot O$ 的直径， E 是直径 AB 下方半圆上的一点， $AB = 10$ ， $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$ ，若 $\triangle ACE$ 为“准直角三角形”，求 CE 的长.



(图1)



(图2)



(备用图)

答案与解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，请将下列各题唯一正确的选项代号填涂在答题卷相应的位置上）

1. 下列方程中，是一元二次方程的是（ ）

- A. $y=2x-1$ B. $x^2=6$ C. $5xy-1=1$ D. $2(x+1)=2$

【分析】只含有一个未知数（元），并且未知数的指数是 1（次）的方程叫做一元一次方程，它的一般形式是 $ax+b=0$ （ a, b 是常数且 $a \neq 0$ ）。

解：A. 含有两个未知数，不是一元一次方程，故本选项不合题意；

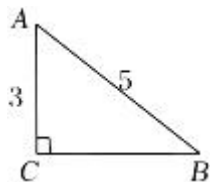
B. $x^2=6$ 是一元二次方程，故本选项符合题意；

C. 含有两个未知数，不是一元一次方程，故本选项不合题意；

D. 是一元一次方程的定义，故本选项不合题意；

故选：B.

2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $AC=3$ ，则 $\sin B$ 等于（ ）



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{3}{5}$

【分析】根据锐角三角函数的正弦值进行解答即可。

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $AC=3$ ， $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ ，

故选：D.

3. 已知 $\odot O$ 的半径为 5cm ，点 P 在 $\odot O$ 上，则 OP 的长为（ ）

- A. 4cm B. 5cm C. 8cm D. 10cm

【分析】根据点与圆的位置关系解决问题即可。

解： $\because$ 点 P 在 $\odot O$ 上，

$\therefore OP=r=5\text{cm}$ ，

故选：B.

4. 九（1）班 45 名同学一周课外阅读时间统计如表所示，那么该班 45 名同学一周课外阅读时间的众数、中位数分别是（ ）

人数（人）	5	19	15	6
时间（小时）	6	7	9	10

- A. 7, 7 B. 19, 8 C. 10, 7 D. 7, 8

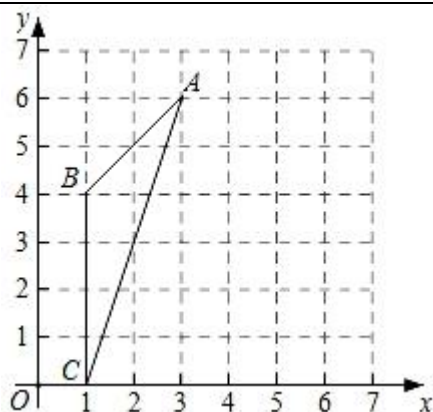
【分析】根据众数、中位数的概念分别求得这组数据的众数、中位数。

解：数据 7 出现的次数最多，所以众数是 7；

45 个数据从小到大排列后，排在第 23 位的是 7，故中位数是 7。

故选：A.

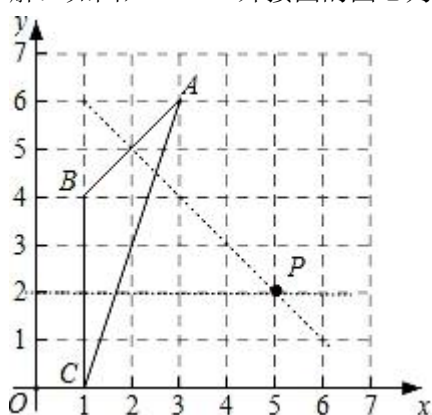
5. 如图，已知点 $A(3, 6)$ 、 $B(1, 4)$ 、 $C(1, 0)$ ，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是（ ）



- A. (0, 0) B. (2, 3) C. (5, 2) D. (1, 4)

【分析】利用网格特点作 AB 和 BC 的垂直平分线，它们的交点 P 即为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心。

解：如图， $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 P 点，其坐标为 (5, 2)。



故选：C。

6. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1$ ($a < 0$) 图象上三点 $A(-1, y_1)$, $B(2, y_2)$, $C(4, y_3)$, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系为 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_1 < y_3 < y_2$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【分析】求出抛物线的对称轴，求出 A 关于对称轴的对称点的坐标，根据抛物线的开口方向和增减性，即可求出答案。

解： $y = ax^2 - 2ax + 1$ ($a < 0$)，

对称轴是直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

即二次函数的开口向下，对称轴是直线 $x = 1$,

即在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，

A 点关于直线 $x = 1$ 的对称点是 $D(3, y_1)$,

$\because 2 < 3 < 4$,

$\therefore y_2 > y_1 > y_3$,

故选：D。

7. 为解决群众看病贵的问题，有关部门决定降低药价，对某种原价为 289 元的药品进行连续两次降价后为 256 元，设平均每次降价的百分率为 x ，则下面所列方程正确的是 ()

- A. $289(1-x)^2 = 256$ B. $256(1-x)^2 = 289$
C. $289(1-2x) = 256$ D. $256(1-2x) = 289$

【分析】设平均每次的降价率为 x ，则经过两次降价后的价格是 $289(1-x)^2$ ，根据关键语句“连续两次降价后为 256 元，”可得方程 $289(1-x)^2 = 256$ 。

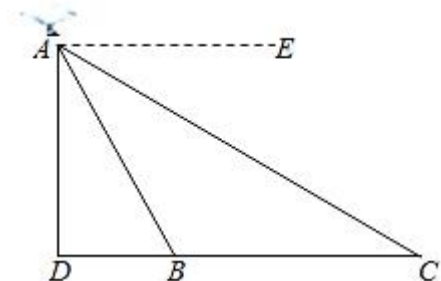
解：设平均每次降价的百分率为 x ，则第一次降价售价为 $289(1-x)$ ，则第二次售价为 $289(1-x)^2$ ，由

题意得：

$$289(1-x)^2=256.$$

故选：A.

8. 如图，嘉琪在一座桥的附近试飞一架小型无人机，为了测量无人机飞行的高度 AD ，嘉琪通过操控装置测得无人机俯视桥头 B 、 C 的俯角分别为 $\angle EAB=60^\circ$ 和 $\angle EAC=30^\circ$ ，且 D 、 B 、 C 在同一水平线上. 已知桥 $BC=30$ 米，则无人机的飞行高度 $AD=$ ()



- A. 15 米 B. $15\sqrt{3}$ 米 C. $(15\sqrt{3}-15)$ 米 D. $(15\sqrt{3}+15)$ 米

【分析】由 $\angle EAB=60^\circ$ 、 $\angle EAC=30^\circ$ 可得出 $\angle CAD=60^\circ$ 、 $\angle BAD=30^\circ$ ，进而可得出 $CD=\sqrt{3}AD$ 、 $BD=\frac{\sqrt{3}}{3}AD$ ，再结合 $BC=30$ 即可求出 AD 的长度.

解：∵ $\angle EAB=60^\circ$ ， $\angle EAC=30^\circ$ ，

∴ $\angle CAD=60^\circ$ ， $\angle BAD=30^\circ$ ，

$$\therefore CD=AD \cdot \tan \angle CAD = \sqrt{3}AD, \quad BD=AD \cdot \tan \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{3}AD,$$

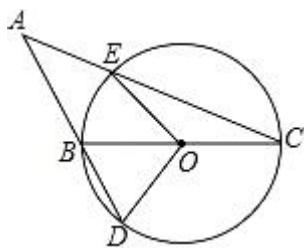
$$\therefore BC=CD-BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}AD=30,$$

$$\therefore AD=15\sqrt{3} \text{ (米)}.$$

答：无人机的飞行高度 AD 为 $15\sqrt{3}$ 米.

故选：B.

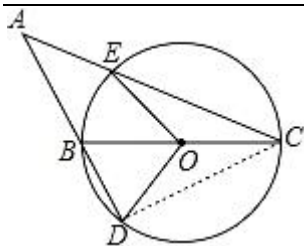
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 BC 为直径的 $\odot O$ ，交 AB 的延长线于点 D ，交 AC 于点 E . 连接 OD ， OE ，若 $\angle DOE=130^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 40° C. 35° D. 25°

【分析】连接 DC ，根据圆周角定理求出 $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle EOD=65^\circ$ ，根据圆周角定理求出 $\angle ADC=90^\circ$ ，再根据直角三角形的两锐角互余求出即可.

解：连接 DC ，



$$\because \angle DOE = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle EOD = 65^\circ,$$

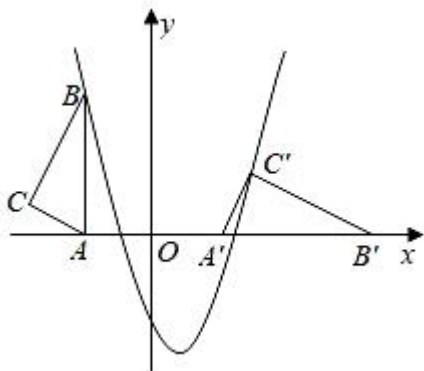
$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ,$$

故选: D.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的边 $AB \perp x$ 轴, $A(-2, 0)$, $C(-4, 1)$, 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象经过点 B . 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移 m ($m > 0$) 个单位, 使点 A 平移到点 A' , 然后绕点 A' 顺时针旋转 90° , 若此时点 C 的对应点 C' 恰好落在抛物线上, 则 m 的值为 ()



A. $\sqrt{5}+1$

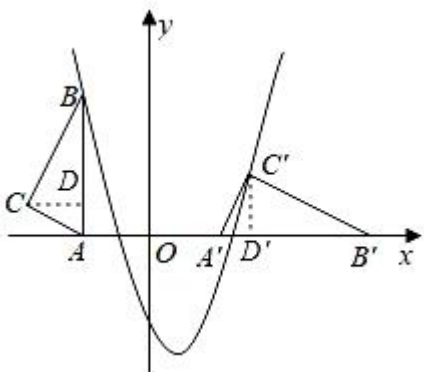
B. $\sqrt{2}+3$

C. $\sqrt{6}+2$

D. $2\sqrt{2}+1$

【分析】作 $CD \perp AB$ 于 D , $C'D' \perp A'B'$ 于 D' , 先根据已知条件求出点 B 坐标, 由 A 、 B 、 C 三点坐标可得 $CD = 2$, $AD = 1$. 设点 $A(-2, 0)$ 向右平移 m 个单位后得点 $A'(m-2, 0)$, 则点 A' 坐标为 $(m-2, 0)$. 进而表示出点 C' 的坐标为 $(m-1, 2)$, 最后将 C' 坐标代入二次函数解析式中计算即可得到点 C 坐标.

解: 作 $CD \perp AB$ 于 D , $C'D' \perp A'B'$ 于 D' ,



$\because AB \perp x$ 轴, 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象经过点 B ,

$\therefore$ 点 $B(-2, 5)$

$\because A(-2, 0)$, $C(-4, 1)$,

$\therefore CD = 2$, $AD = 1$.

设点 $A(-2, 0)$ 向右平移 m 个单位后得点 $A'(m > 0)$,

则点 A' 坐标为 $(m - 2, 0)$.

$\because AD' = AD = 1, CD' = CD = 2,$

$\therefore$ 点 C' 坐标为 $(m - 1, 2)$, 又点 C' 在抛物线上,

$\therefore$ 把 $C'(m - 1, 2)$ 代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 中,

得: $(m - 1)^2 - 2(m - 1) - 3 = 2,$

整理得: $m^2 - 4m - 2 = 0.$

解得: $m_1 = 2 + \sqrt{6}, m_2 = 2 - \sqrt{6}$ (舍去).

故选: C.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分, 请将答案填在答题卷相应的位置上.)

11. 抛物线 $y = x^2 + 1$ 的顶点坐标是 $(0, 1)$.

【分析】依据二次函数的顶点坐标公式求解即可.

解: $\because a = 1, b = 0, c = 1.$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{1 \times 2} = 0.$$

将 $x = 0$ 代入得到 $y = 1.$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为: $(0, 1).$

故答案为: $(0, 1).$

12. 一只不透明的袋子中有若干个黑球和若干个白球, 共 15 个, 这些球除颜色外都相同, 搅匀后从中任意摸出一个球, 若摸到白球的概率为 $\frac{2}{5}$, 则白球的个数为 6 个.

【分析】设袋子内有 n 个白球, 依据概率公式列出方程, 即可得到白球的数量.

解: 设袋子内有 n 个白球, 则

$$\frac{n}{15} = \frac{2}{5},$$

解得 $n = 6,$

故答案为: 6.

13. 若圆锥的高为 4, 底圆半径为 3, 则这个圆锥的侧面积为 15π . (用含 π 的结果表示)

【分析】利用勾股定理易得圆锥的母线长, 进而利用圆锥的侧面积 $= \pi \times$ 底面半径 $\times$ 母线长, 把相应数值代入即可求解.

解: $\because$ 圆锥的高为 4, 底圆半径为 3,

$\therefore$ 圆锥的母线长为 5,

$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $\pi \times 3 \times 5 = 15\pi.$

14. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 $k < 2$.

【分析】根据判别式的意义得到 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) > 0$, 然后解不等式即可.

解: 根据题意得 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) > 0,$

解得 $k < 2.$

故答案为 $k < 2.$

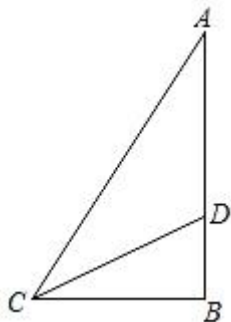
15. 将抛物线 $y = -(x + 1)^2 + 2$ 先向右平移 3 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到的新抛物线的函数表达式为 $y = -(x - 2)^2 + 1$.

【分析】直接根据“上加下减, 左加右减”的原则进行解答即可.

解: 将抛物线 $y = -(x + 1)^2 + 2$ 向右平移 3 个单位, 向下平移 1 个单位后所得到的新抛物线的表达式为 $y = -(x + 1 - 3)^2 + 2 - 1$, 即 $y = -(x - 2)^2 + 1.$

故答案是: $y = -(x - 2)^2 + 1.$

16. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, $BC=3$, $AB=5$, $\angle A=\alpha$, 易知 $\tan\alpha=\frac{3}{5}$, 聪明的小强想求 $\tan 2\alpha$ 的值, 于是他在 AB 上取点 D , 使得 $CD=AD$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值为 $\frac{15}{8}$.



【分析】根据等边对等角可得 $\angle A = \angle ACD$, 再利用三角形的外角可知 $\angle CDB = 2\alpha$, 然后在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中利用勾股定理先求出 BD 即可解答.

解: $\because CD=AD$,

$\therefore \angle A = \angle ACD$,

$\because \angle CDB$ 是 $\triangle ACD$ 的外角,

$\therefore \angle CDB = \angle A + \angle ACD = 2\alpha$,

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中, 设 BD 为 x , 则 $AD=CD=5-x$,

$\because BC^2 + BD^2 = CD^2$,

$\therefore 3^2 + x^2 = (5-x)^2$,

$\therefore x = 1.6$,

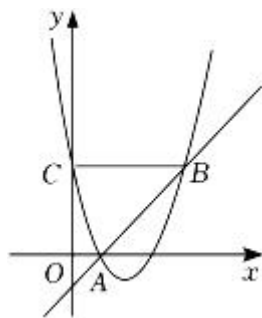
$\therefore BD = 1.6$,

$\therefore \tan \angle CDB = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{1.6} = \frac{15}{8}$,

$\therefore \tan 2\alpha = \frac{15}{8}$,

故答案为: $\frac{15}{8}$.

17. 如图, 抛物线 $y_1 = a(x-2)^2 + c$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 C 两点, 点 B 在抛物线上, 且 BC 平行于 x 轴, 直线 $y_2 = x - 1$ 经过 A 、 B 两点, 则关于 x 的不等式 $a(x-2)^2 + c + 1 > x$ 的解集是 $x < 1$ 或 $x > 4$.



【分析】根据抛物线的对称性求得 B 的横坐标, 由直线的解析式求得 A 的坐标, 然后根据图象写出抛物线在直线上方时的 x 的取值即可.

解: $\because$ 抛物线 $y_1 = a(x-2)^2 + c$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$,

$\therefore B$ 点的横坐标为 4 ,

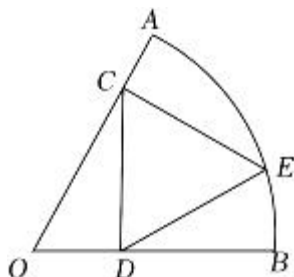
$\because$ 直线 $y_2 = x - 1$ 与 x 轴交于 A 点,

$\therefore A(1, 0)$,

由图象可知, 关于 x 的不等式 $a(x-2)^2+c+1>x$ 的解集是 $x<1$ 或 $x>4$,

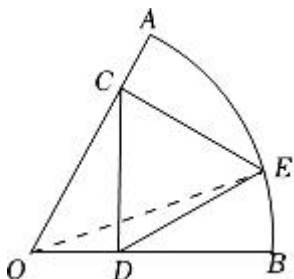
故答案为: $x<1$ 或 $x>4$.

18. 如图, 半径为 4 的扇形 OAB 中, $\angle O=60^\circ$, C 为半径 OA 上一点, 过 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D , 以 CD 为边向右作等边 $\triangle CDE$, 当点 E 落在 $\widehat{AB}$ 上时, $CD = \frac{4\sqrt{21}}{7}$.



【分析】如图, 连接 OE . 设 $OD=m$. 证明 $\angle OCE=90^\circ$, 利用勾股定理构建方程求解即可.

解: 如图, 连接 OE . 设 $OD=m$.



$\because CD \perp OB$,

$\therefore \angle CDO=90^\circ$,

$\because \angle COD=60^\circ$,

$\therefore \angle OCD=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore OC=2OD=2m$, $CD=\sqrt{3}m$,

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore CD=CE=\sqrt{3}m$, $\angle DCE=60^\circ$,

$\therefore \angle OCE=\angle OCD+\angle DCE=90^\circ$,

$\therefore OC^2+CE^2=OE^2$,

$\therefore 4m^2+3m^2=4^2$,

$\therefore m=\frac{4\sqrt{7}}{7}$ (负根已经舍去),

$\therefore CD=\sqrt{3}m=\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

故答案为: $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 76 分, 请写出必要的计算过程、推理步骤或文字说明, 并把解答过程写在答题卷相应的位置上.)

19. 计算: $\sqrt{3}\sin 60^\circ - 3\tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ$.

【分析】首先计算特殊角的三角函数值、乘方, 然后计算乘法, 最后从左向右依次计算即可.

解: $\sqrt{3}\sin 60^\circ - 3\tan 30^\circ + \cos^2 45^\circ$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}.$$

20. 解方程: $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

【分析】利用因式分解法求解即可.

解: $\because 2x^2 - 5x + 2 = 0$,

$\therefore (x - 2)(2x - 1) = 0$,

则 $x - 2 = 0$ 或 $2x - 1 = 0$,

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

21. 已知二次函数 $y = x^2 + 3mx + 1 - m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $(2, 0)$.

(1) 求 m 的值;

(2) 求这个函数图象与 x 轴另一个交点的横坐标.

【分析】(1) 把 $(2, 0)$ 代入二次函数解析式即可求出 m 的值;

(2) 根据 (1) 中 m 的值可以求出函数解析式, 再令 $y = 0$, 解方程即可,

解: (1) $\because$ 二次函数 $y = x^2 + 3mx + 1 - m$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $(2, 0)$,

$\therefore 4 + 6m + 1 - m = 0$,

解得: $m = -1$;

(2) 由 (1) 得: 二次函数解析式为 $y = x^2 - 3x + 2$,

令 $y = 0$, 则 $x^2 - 3x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$,

$\therefore$ 函数图象与 x 轴另一个交点的横坐标为 1.

22. 为贯彻落实党中央关于打击治理电信网络诈骗的决策部署, 我市加大了预防诈骗的宣传工作. 为了了解学生预防诈骗的意识情况, 我市某中学在七年级随机抽取部分学生进行相关知识测试, 并依据成绩 (百分制) 绘制出两幅不完整的统计图表, 请根据图表中信息回答下列问题:

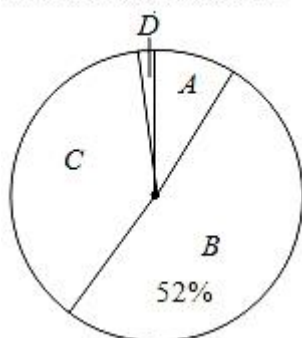
测试成绩统计表

等级	测试成绩 x	人数
A. 防范意识非常强	$90 < x \leq 100$	4
B. 防范意识比较强	$75 < x \leq 90$	26
C. 有基本防范意识	$60 < x \leq 75$	m
D. 防范意识较弱	$50 < x \leq 60$	1

(1) 本次抽取调查的学生共有 50 人, 统计表中 m 的值为 19, 扇形统计图中表示 A 等级的扇形圆心角度数为 28.8°;

(2) 已知该校七年级共有学生 1200 人, 请你估计该校七年级对于电信网络诈骗的“防范意识非常强”和“防范意识比较强”的学生共有多少人?

测试成绩扇形统计图



【分析】（1）根据 B 组人数，求出总人数，再求出 m 的值即可，圆心角 $= 360 \times \text{百分比}$ ；

（2）根据总人数 $\times$ “防范意识非常强”和“防范意识比较强”的学生百分比求解。

解：（1）本次抽取调查的学生有 $26 \div 52\% = 50$ （人），

$\therefore m = 50 - 4 - 26 - 1 = 19$ （人），

A 的圆心角为 $360 \times \frac{4}{50} = 28.8^\circ$ 。

故答案为：50，19，28.8；

（2） $1200 \times \frac{4+26}{50} = 720$ （人）。

答：估计该校七年级对于电信网络诈骗的“防范意识非常强”和“防范意识比较强”的学生共有 720 人

23. 为大力弘扬“奉献、友爱、互助、进步”的志愿精神，我市某社区开展了“文明新风进社区”系列志愿服务活动，参加活动的每位志愿者必须从 A. “垃圾分类入户宣传”、B. “消防安全知识宣传”、C. “走访慰问孤寡老人”、D. “社区环境整治活动”四个活动主题中随机选取一个主题中随机选取一个主题。

（1）志愿者小李选取 A. “垃圾分类入户宣传”这个主题的概率是 $\frac{1}{4}$ 。

（2）志愿者小张和小李从 A、B、C、D 四个主题中分别随机选取一个主题，请用列表或画树状图的方法，求他们选取相同主题的概率。

【分析】（1）直接根据概率公式求解即可；

（2）画树状图，共有 16 种等可能的结果，小张和小李选择相同主题的结果有 4 种，再由概率公式求解即可。

解：（1）志愿者小李选取 A. “垃圾分类入户宣传”这个主题的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ；

（2）画树状图如图：



共有 16 种等可能的结果，小明和小丽选择相同主题的结果有 4 种，

$\therefore$ 小张和小李选择相同主题的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

24. 如图 1，是手机支架的实物图，图 2 是它的侧面示意图，其中 CD 长为 $6\sqrt{2}\text{cm}$ ， BC 长为 12cm 。 $\angle B$

$=60^\circ$, $\angle C=45^\circ$.

(1) 点 D 到 BC 的距离为 6 cm ;

(2) 求点 D 到 AB 的距离.



图 1

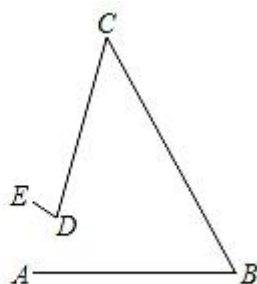


图 2

【分析】(1) 要求点 D 到 BC 的距离, 所以过点 D 作 $DF \perp BC$, 垂足为 F , 然后在 $Rt\triangle DCF$ 中即可解答;
(2) 要求点 D 到 AB 的距离, 所以过点 D 作 $DG \perp AB$, 垂足为 G , 连接 BD , 想利用 60° 的三角函数值, 所以想到过点 F 作 $FM \perp AB$, 垂足为 M , 在 $Rt\triangle FMB$ 中求出 FM , 从而求出 $\angle BFM=30^\circ$, 则 $\angle DFM=60^\circ$, 再把 $\angle DFM$ 放在直角三角形中, 所以过点 D 作 $DN \perp FM$, 垂足为 N , 即可求出 FN , 最后用 FM 减去 FN 求出 MN , 即可解答.

解: (1) 过点 D 作 $DF \perp BC$, 垂足为 F ,

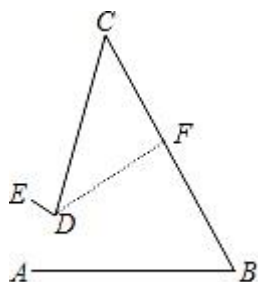


图 2

在 $Rt\triangle CDF$ 中, $CD=6\sqrt{2}cm$, $\angle C=45^\circ$,

$$\therefore DF = CD \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6cm,$$

$\therefore$ 点 D 到 BC 的距离为 $6cm$,

故答案为: 6;

(2) 过点 D 作 $DG \perp AB$, 垂足为 G , 连接 BD , 过点 F 作 $FM \perp AB$, 垂足为 M , 过点 D 作 $DN \perp FM$, 垂足为 N ,

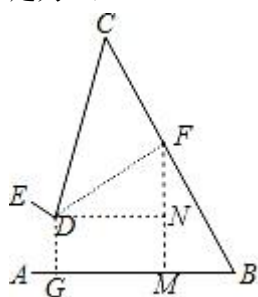


图 2

$\therefore \angle CFD=90^\circ$, $\angle C=45^\circ$,

$\therefore CF=DF=6cm$,

$\therefore BC=12cm$,

$\therefore BF=BC - CF=12 - 6=6cm$,

$$\therefore CF=BF,$$

$\therefore DF$ 是 BC 的垂直平分线,

$$\therefore CD=DB=6\sqrt{2}cm,$$

$$\text{在 Rt}\triangle FMB \text{ 中, } FM=BF\sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}cm,$$

$$\therefore \angle FMB=90^\circ, \angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFM=90^\circ - \angle ABC=30^\circ,$$

$$\therefore \angle DFM=\angle DFB - \angle BFM=90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle FDN \text{ 中, } FN=FD\cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3cm,$$

$$\therefore MN=FM - FN=(3\sqrt{3} - 3)cm,$$

$$\therefore \angle DGB=\angle FMG=\angle DNM=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DNMG$ 是矩形,

$$\therefore DG=MN=(3\sqrt{3} - 3)cm,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 到 } AB \text{ 的距离为 } (3\sqrt{3} - 3)cm.$$

25. 某公司电商平台. 在 2021 年国庆期间举行了商品打折促销活动, 经市场调查发现, 某种商品的周销售量 y (件) 是关于售价 x (元/件) 的一次函数. 已知, 当 $x=50$ 时, $y=200$; 当 $x=80$ 时, $y=140$.

(1) 求 y 与 x 的函数表达式 (不要求写出自变量的取值范围);

(2) 若该商品进价为 30 (元/件).

①当售价 x 为多少元时, 周销售利润 W 最大? 并求出此时的最大利润;

②因原料涨价, 该商品进价提高了 a (元/件) ($a>0$), 公司为回馈消费者, 规定该商品售价 x 不得超过 75 (元/件), 且该商品在今后的销售中, 周销售量 y 与售价 x 仍满足 (1) 中的函数关系, 若周销售最大利润是 6000 元, 求 a 的值.

【分析】(1) 设 $y=kx+b$, 把 $x=50$ 时, $y=200$; $x=80$ 时, $y=140$, 代入可得解析式.

(2) ①根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 数量, 得 $W = (-2x+300)(x-30)$, 化成顶点式 $W = -2(x-90)^2+7200$, 顶点的纵坐标是有最大值.

②根据利润 = (售价 - 进价) $\times$ 数量, 得 $W = -2(x-150)(x-30-a)$ ($x \leq 75$), 其对称轴 $x=90+\frac{a}{2}$, >60 , $0 < x \leq 75$ 时, 函数单调递增, 只有 $x=75$ 时周销售利润最大, 即可得 $m=5$.

解: (1) 设 $y=kx+b$, 由题意有:

$$\begin{cases} 50k+b=200 \\ 80k+b=140 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-2 \\ b=300 \end{cases},$$

所以 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -2x+300$;

$$(2) \text{ ①由 (1) } W = (-2x+300)(x-30) = -2x^2+360x-9000 = -2(x-90)^2+7200,$$

所以售价 $x=90$ 时, 周销售利润 W 最大, 最大利润为 7200;

$$\text{②由题意 } W = -2(x-150)(x-30-a) \quad (x \leq 75),$$

$$\text{其对称轴 } x=90+\frac{a}{2} > 90,$$

$\therefore 0 < x \leq 75$ 时, W 的值随 x 增大而增大,

$\therefore$ 只有 $x=75$ 时周销售利润最大,

$$\therefore 6000 = -2(75-150)(75-30-a),$$

$$\therefore a=5.$$

26. 如图, 以 AE 为直径的 $\odot O$ 交直线 AB 于 A 、 B 两点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 连

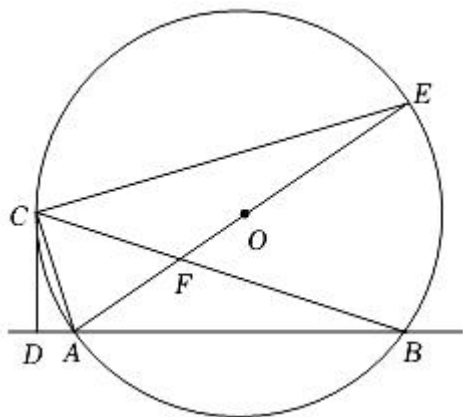
接 AC , BC , CE , 其中 BC 与 AE 交于点 F , 且 AC 平分 $\angle DAE$.

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AD=1$, $AB=8$.

①求 CD 的长;

②求 $\tan \angle AFC$ 的值.



【分析】(1) 连接 OC , 根据 $OA=OC$ 推出 $\angle OCA=\angle OAC$, 根据角平分线得出 $\angle OCA=\angle OAC=\angle DCA$, 推出 $OC \parallel AB$, 得出 $OC \perp CD$, 根据切线的判定推出即可;

(2) ①由 (1) 知, $\angle OCD=90^\circ$, 所以 $\angle OCA+\angle ACD=90^\circ$, 因为 AE 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle ACE=90^\circ$, 则 $\angle OCA+\angle OCE=90^\circ$, 所以 $\angle ACD=\angle OCE$, 又 $OC=OE$, 所以 $\angle OCE=\angle E=\angle B=\angle ACD$, 可得 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 所以 $AD:CD=CD:BD$, 则 $CD^2=AD \cdot BD$, 又 $BD=AD+AB=9$, 所以 $CD^2=1 \times 9=9$, 即 $CD=3$.

②过点 C 作 $CG \perp AE$ 于点 G , 过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H , 因为 $CD \perp AB$, $CD=3$, $BD=9$, 所以 $BC=3\sqrt{10}$, 因为 $OH \perp BC$, 则 $CH=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, 易证 $\triangle ADC \sim \triangle ACE$, 所以 $AD:AC=AC:AE$, 因为 CD

$\perp AB$, $AD=1$, $CD=3$, 所以 $AC^2=10$, 则 $AE=\frac{AC^2}{AD}=10$, $OA=\frac{1}{2}AE=5=OC$; 易证 $\triangle ACD \cong \triangle ACG$

(AAS), 所以 $AG=AD=1$, $CG=CD=3$, $OG=OA-AG=5-1=4$, 因为 $OH \perp BC$, $OC=5$, $CH=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, 所以 $OH=\frac{\sqrt{10}}{2}$, 易证 $\triangle CFG \sim \triangle OFH$, 所以 $CG:OH=CF:OF=GF:FH$, 即 $3:\frac{\sqrt{10}}{2}=CF:$

$(4-GF)=GF:(\frac{3\sqrt{10}}{2}-CF)$, 整理得, $\frac{\sqrt{10}}{2}CF=12-3GF$, $\frac{\sqrt{10}}{2}GF=\frac{9\sqrt{10}}{2}-3CF$, 解之, 求解

的 CG 和 GF 的值, 因为 $CG \perp AE$, $CG=3$, $GF=\frac{27}{13}$, 所以 $\tan \angle AFC=\frac{CG}{GF}=\frac{3}{\frac{27}{13}}=\frac{13}{9}$.

【解答】(1) 证明: 连接 OC .

$\because OC=OA$,

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$.

$\because AC$ 平分 $\angle DAE$,

$\therefore \angle DAC=\angle OAC$,

$\therefore \angle DAC=\angle OCA$,

$\therefore AD \parallel OC$.

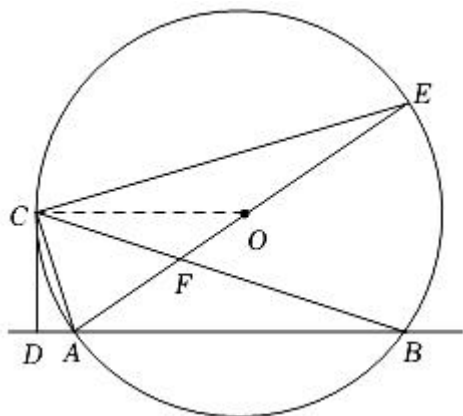
$\because CD \perp DA$,

$\therefore \angle ADC=\angle OCD=90^\circ$,

即 $CD \perp OC$,

$\because$ 点 C 在 $\odot O$ 上,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.



(2) 解: ①由 (1) 知, $\angle OCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCA + \angle ACD = 90^\circ$,

$\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACE = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCA + \angle OCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle OCE$,

$\because OC = OE$,

$\therefore \angle OCE = \angle E$,

$\because \angle E = \angle B$,

$\therefore \angle ACD = \angle B$,

$\because \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CDB$,

$\therefore AD : CD = CD : BD$,

$\therefore CD^2 = AD \cdot BD$,

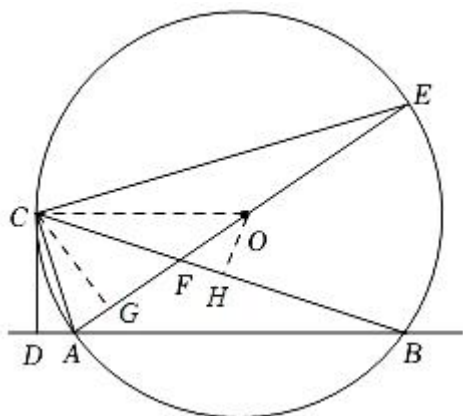
$\because AD = 1, AB = 8$,

$\therefore BD = AD + AB = 9$,

$\therefore CD^2 = 1 \times 9 = 9$,

$\therefore CD = 3$.

②过点 C 作 $CG \perp AE$ 于点 G , 过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ,



$\because CD \perp AB, CD = 3, BD = 9$,

$$\therefore BC = 3\sqrt{10},$$

$$\because OH \perp BC,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}BC = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

$$\because \angle ADC = \angle ACE = 90^\circ, \quad \angle ACD = \angle AEC,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore AD : AC = AC : AE,$$

$$\therefore AE = \frac{AC^2}{AD},$$

$$\because CD \perp AB, \quad AD = 1, \quad CD = 3,$$

$$\therefore AC^2 = 10,$$

$$\therefore AE = \frac{AC^2}{AD} = 10,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AE = 5 = OC,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACG$ 中,

$$\because \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ, \quad \angle CAD = \angle CAG, \quad AC = AC,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ACG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AG = AD = 1, \quad CG = CD = 3,$$

$$\therefore OG = OA - AG = 5 - 1 = 4,$$

$$\because OH \perp BC, \quad OC = 5, \quad CH = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore OH = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\because \angle CFG = \angle OFH, \quad \angle CGF = \angle OHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CFG \sim \triangle OFH,$$

$$\therefore CG : OH = CF : OF = GF : FH,$$

$$\therefore 3 : \frac{\sqrt{10}}{2} = CF : (4 - GF) = GF : \left(\frac{3\sqrt{10}}{2} - CF\right),$$

$$\text{整理得, } \frac{\sqrt{10}}{2}CF = 12 - 3GF, \quad \frac{\sqrt{10}}{2}GF = \frac{9\sqrt{10}}{2} - 3CF$$

$$\text{解得 } GF = \frac{27}{13},$$

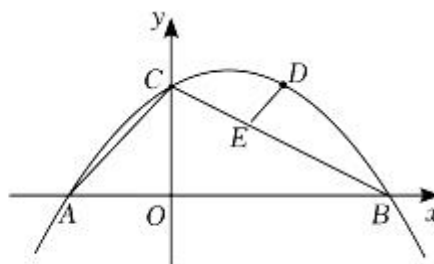
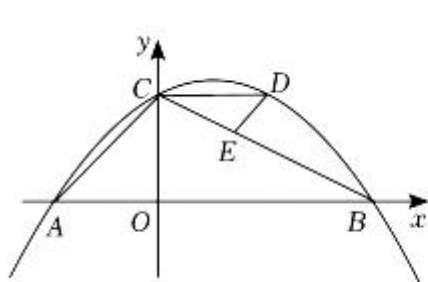
$$\because CG \perp AE, \quad CG = 3, \quad GF = \frac{27}{13},$$

$$\therefore \tan \angle AFC = \frac{CG}{GF} = \frac{3}{\frac{27}{13}} = \frac{13}{9},$$

$$\therefore \tan \angle AFC \text{ 的值为 } \frac{13}{9}.$$

27. 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ 的图象交 x 轴于 A, B 两点, 交 y 轴于点 C , 点 D 是 BC 上方抛物线上的一点, 过 D 作 AC 的平行线, 交 BC 于点 E .

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- (2) 连接 CD , 当 $CD \parallel x$ 轴时, 求 $\triangle CDE$ 的面积;
- (3) 求 DE 的最大值.



(备用图)

【分析】(1) 先令 $x=0$ 求得点 C 的坐标, 再令 $y=0$ 求得点 A 和点 B 的坐标, 然后求得 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 先由 $CD \parallel x$ 轴求得点 D 的坐标得到线段 CD 的长度, 然后结合 $DE \parallel AC$ 得证 $\triangle CDE \sim \triangle BAC$, 再利用相似三角形的性质得到 $\triangle CDE$ 的面积;
 (3) 过点 D 作 $DF \parallel y$ 轴交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp DF$ 于点 H , 然后由 $DE \parallel AC$ 可知 $\angle DEF$ 的度数不变, 由 $DF \parallel y$ 轴可知 $\angle EFD$ 的度数不变, 从而知道在点 D 的移动过程中 $\triangle DEF$ 的形状保持不变, 即有当 DF 最大时, DE 的长度也最大, 然后设点 D 的坐标, 进而得到点 F 的坐标, 再表示出 DF 的长度, 得到 DF 取最大值时的点 D 的坐标, 即可得到直线 DE 的解析式, 最后联立直线 DE 的解析式和直线 BC 的解析式求得点 E 的坐标, 进而得到 DE 长的最大值.

解: (1) 当 $x=0$ 时, $y=3$,

$\therefore C(0, 3)$, $OC=3$,

当 $y=0$ 时, $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$,

解得: $x = -3$ 或 $x = 6$,

$\therefore A(-3, 0)$, $B(6, 0)$,

$\therefore AB=9$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = \frac{27}{2}$.

(2) $\because C(0, 3)$, $CD \parallel x$ 轴,

$\therefore D(3, 3)$, $\angle DCE = \angle ABC$,

$\therefore CD=3$,

$\therefore DE \parallel AC$,

$\therefore \angle DEC = \angle ACB$,

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$,

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{27}{2}$,

$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{3}{2}$.

(3) 如图, 过点 D 作 $DF \parallel y$ 轴交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp DF$ 于点 H ,

$\because DE \parallel AC$, $DF \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle DEF$ 的度数不变, $\angle EFD$ 的度数不变,

$\therefore$ 在点 D 的移动过程中 $\triangle DEF$ 的形状保持不变,

∴当 DF 最大时, DE 的长度也最大,

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$, 则

$$\begin{cases} 6k+b=0 \\ b=3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b=3 \end{cases}$$

∴直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$,

设点 D 的坐标 $(x, -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+3)$, 则点 F 的坐标 $(x, -\frac{1}{2}x+3)$,

$$\therefore DF = -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x+3 - (-\frac{1}{2}x+3) = -\frac{1}{6}x^2+x = -\frac{1}{6}(x-3)^2+\frac{3}{2},$$

∴当 $x=3$ 时, DF 有最大值,

此时, 点 D 的坐标为 $(3, 3)$,

∴直线 DE 是由直线 AC 向右平移 3 个单位所得,

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+n$, 则

$$\begin{cases} -3m+n=0 \\ n=3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$$

∴直线 AC 的解析式为 $y=x+3$,

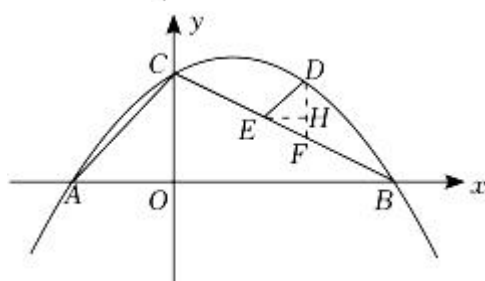
∴直线 DE 的解析式为 $y=x+3-3=x$,

联立直线 DE 的解析式和直线 BC 的解析式, 得

$$\begin{cases} y=x \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

∴点 E 的坐标为 $(2, 2)$,

$$\therefore DE_{\text{最大值}} = \sqrt{2}.$$

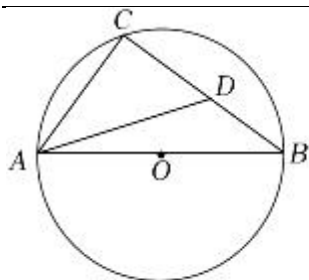


28. 如果三角形的两个内角 α 与 β 满足 $\alpha - \beta = 90^\circ$, 那么我们称这样的三角形为“准直角三角形”.

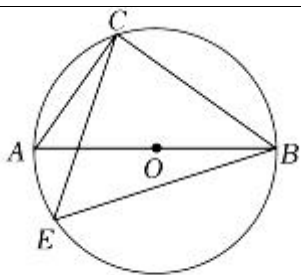
(1) 若 $\triangle ABC$ 是“准直角三角形”, $\angle C > 90^\circ$, $\angle A = 70^\circ$, 则 $\angle B = \underline{10}^\circ$.

(2) 如图 1, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB=10$, D 是 BC 上的一点, $\tan B = \frac{3}{4}$, 若 $CD = \frac{9}{2}$, 请判断 $\triangle ABD$ 是否为“准直角三角形”, 并说明理由.

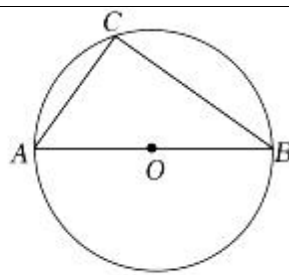
(3) 如图 2, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是 $\odot O$ 的直径, E 是直径 AB 下方半圆上的一点, $AB=10$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 若 $\triangle ACE$ 为“准直角三角形”, 求 CE 的长.



(图1)



(图2)



(备用图)

【分析】(1) 根据“准直角三角形”的概念和三角形内角和是 180° 求角度即可；

(2) 根据三角函数求出 AC 和 BC 的值，再根据 $\tan \angle CAD = \tan B$ ，得出 $\angle CAD = \angle B$ ，再根据“准直角三角形”的概念得出结论即可；

(3) 根据“准直角三角形”的概念分两种情况分别求出 CE 的值即可。

解：(1) $\because \triangle ABC$ 是“准直角三角形”， $\angle C > 90^\circ$ ， $\angle A = 70^\circ$ ，

$$\therefore \textcircled{1} \angle C - \angle A = 70^\circ,$$

此时 $\angle C = 160^\circ$ ， $\angle A + \angle C > 180^\circ$ ，

$\therefore$ 此情况不存在，舍去，

$$\textcircled{2} \angle C - \angle B = 90^\circ,$$

此时 $\angle C = 100^\circ$ ， $\angle B = 10^\circ$ ，

故答案为： 10° ；

(2) $\triangle ABD$ 是准直角三角形，

$$\because AB = 10, \tan B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AC = 6, BC = 8,$$

$$\because CD = \frac{9}{2},$$

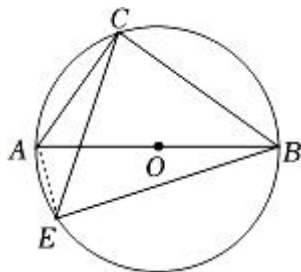
$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{9}{2}}{6} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \angle CAD = \angle B,$$

$$\therefore \angle ADB - \angle CAD = \angle ADB - \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是准直角三角形；

(3) 连接 AE ，



由(2)知， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，

$\because \triangle ACE$ 为准直角三角形， E 为直径 AB 下方圆上的一点，

$\therefore \angle CAE > 90^\circ$ ， $\angle CEA < 90^\circ$ ， $\angle ECA < 90^\circ$ ，且 $\angle CEA = \angle CBA$ ，

①当 $\angle CAE = 90^\circ + \angle CEA$ 时，

$$\text{即 } \angle CAE = 90^\circ + \angle CBA = 180^\circ - 90^\circ + \angle CBA = \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ - \angle CAB,$$

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 的内角和是 360° ， $\angle ACB = 90^\circ = \angle AEB$ ，

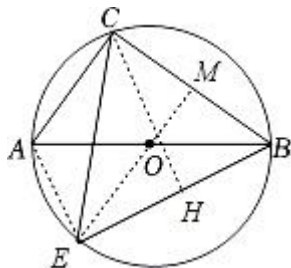
$$\therefore \angle CBE = 180^\circ - \angle CAE = \angle CAB,$$

$$\text{又} \because \angle CAB = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CEB,$$

$$\therefore CE = BC = 8;$$

②当 $\angle CAE = 90^\circ + \angle ECA$ 时,



$$\text{即} \angle CAE = 90^\circ + \angle ABE = \angle AEB + \angle ABE = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CBE,$$

$$\text{即} \angle CBE = \angle ECB,$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\because \tan \angle ABC = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \tan \angle CEB = \frac{4}{3},$$

作 $CH \perp BE$ 于 H , 作 $EM \perp BC$ 于 M ,

设 $EH = 3x$, 则 $CH = 4x$,

$$\therefore EC = BE = \sqrt{EH^2 + CH^2} = 5x,$$

$$\because \frac{1}{2} BE \cdot CH = \frac{1}{2} BC \cdot EM,$$

$$\therefore EM = \frac{5}{2} x^2,$$

$$\because EC^2 = CM^2 + EM^2, \text{ 且 } CM = \frac{1}{2} BC = 4,$$

$$\therefore (5x)^2 = 4^2 + \left(\frac{5}{2} x^2\right)^2,$$

$$\text{令 } (5x)^2 = t, \text{ 即 } CE^2 = t,$$

$$\text{则上式可表示为 } t = 16 + \left(\frac{t}{10}\right)^2,$$

解得 $t = 80$ 或 $t = 20$ (不合题意舍去),

$$\therefore CE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

综上, 若 $\triangle ACE$ 为“准直角三角形”, CE 的长为 8 或 $4\sqrt{5}$.