2021-2022 学年江苏省苏州市高二（上）期中数学试卷

姓名：________ 得分：__________

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.

1．若（1，k）是直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$的一个方向向量，则 k 的值为（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=1$，$a_7=3$，则 a_{15} 的值为（　　）

A．9　　B．27　　C．81　　D．243

3．已知直线 l_1：$ax+2y=0$ 与直线 l_2：（$a+1$）$x-y+2=0$ 垂直，则 a 的值为（　　）

A．-2　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．1　　D．1 或 -2

4．《九章算术》是我国古代的数学巨著，书中有如下问题：“今有大夫、不更、簪裹、上造、公士，凡五人，共出百銭．欲令高爵出少，以次渐多，問各幾何？”意思是：“有大夫、不更、簪裹、上造、公士（爵位依次变低）5 个人共出 100 钱，按照爵位从高到低每人所出钱数成等差数列，这 5 个人各出多少钱？”在这个问题中，若公士出 28 钱，则不更出的钱数为（　　）

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

5．过点 P（a，6）引圆 C：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 的切线，切点为 A，则 PA 的最小值为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

6．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_n+a_{n+1}=2n$，则 S_{20} 的值为（　　）

A．100　　B．200　　C．400　　D．800

7．已知 A，B，C（$ABC\neq0$）成等差数列，直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2+2tx+ty-6=0$ 的位置关系是（　　）

A．相交　　B．相切

C．相离　　D．随着 t 的变化而变化

8．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n+1$，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n^2$．若将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中相同的项按从小到大的顺序排列后构成数列$\{c_n\}$，则 625 是数列$\{c_n\}$中的第（　　）

A．14 项　　B．15 项　　C．16 项　　D．17 项

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

9．记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则（　　）

A．S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列　　B．$\frac{S_3}{3}$，$\frac{S_6}{6}$，$\frac{S_9}{9}$成等差数列

C．$S_9=2S_6-S_3$　　D．$S_9=3$（S_6-S_3）

10．已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+2y-8=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-2x+10y-24=0$（　　）

A．两圆的圆心距为$2\sqrt{5}$

B．两圆的公切线有 3 条

C．两圆相交，且公共弦所在的直线方程为 $x-2y+4=0$

D．两圆相交，且公共弦的长度为$4\sqrt{5}$

11．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，若 $2a_5+a_4=a_3$，且存在两项 a_m，a_n，使得$4\sqrt{a_m a_n}=a_1$，则（　　）

A．$a_{n+1}=2a_n$　　B．$S_n=2a_1-a_n$　　C．$mn=5$　　D．$m+n=6$

12．已知 AB 为圆 O：$x^2+y^2=49$ 的弦，且点 M（4，3）为 AB 的中点，点 C 为平面内一动点，若 $AC^2+BC^2=66$，则（　　）

A．点 C 构成的图象是一条直线

B．点 C 构成的图象是一个圆

C．OC 的最小值为 2

D．OC 的最小值为 3

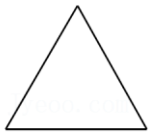
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分，请把答案填写在答题卡相应位置上**.**

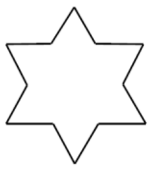
13．类比是学习探索中一种常用的思想方法，在等差数列与等比数列的学习中我们发现：只要将等差数列的一个关系式中的运算“+”改为“×”，“－”改为“÷”，正整数改为正整数指数幂，相应地就可以得到等比数列的一个形式相同的关系式，反之也成立.

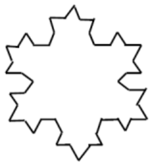
在等差数列$\{a_n\}$中有 $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$（$n>k$），借助类比，在等比数列$\{b_n\}$中有 _______.

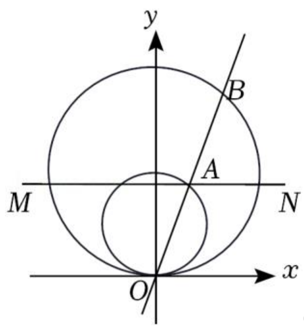
14．已知点 M（1，3），N（5，－2），若 x 轴上存在一点 P，使$|PM-PN|$最大，则点 P 的坐标为_______.

15．如图，将一个边长为 1 的正三角形的每条边三等分，以中间一段为边向形外作正三角形，并擦去中间一段，得图（2）．如此继续下去，得图（3）……，则第 5 个图形的边长为 _______；第 n 个图形的周长为 _______.


（1）


（2）


（3）



(16)

16．如图，已知圆 C_1：$x^2+(y-s)^2=s^2$（$s>0$）内切于圆 C_2：$x^2+(y-t)^2=t^2$（$t>0$），直线 l：$y=kx$（$k>0$）分别交圆 C_1，C_2 于 A，B 两点（A，B 在第一象限内），过点 A 作 x 轴的平行线交圆 C_2 于 M，N 两点，若点 A 既是线段 OB 的中点，又是线段 MN 的三等分点，那么 k 的值为 _______.

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.

17．（10 分）已知三角形的顶点 A（4，1），B（－6，3），C（3，0）.

（1）求 AC 边上的高 BH 所在的直线方程；

（2）求 AB 边上的中线 CD 所在的直线方程.

18.（12 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且$\{b_n\}$的各项均为正数，若 $a_1=b_1=1$，$a_2-b_2=1$，$a_3+b_3=9$．

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n．

19.（12 分）已知圆 M 经过 $A(2,-\sqrt{3})$，$B(2,\sqrt{3})$，$C(-1,0)$．

（1）求圆 M 的标准方程；

（2）若点 $P(3,2)$，点 Q 是圆 M 上的一个动点，求$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$的最小值．

20.（12 分）在①$S_n=2a_n-1$，②$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+1$，③$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-1$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并解答．

问题：已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足____．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使得这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列$\{d_n\}$中是否存在三项 d_m，d_k，d_p（其中 m，k，p 成等差数列）成等比数列？若存在，求出这样的三项；若不存在，请说明理由．

21．（12 分）已知圆 C：$x^2+y^2-8x+12=0$，直线 l 是过原点 O 的一条动直线，且 l 与圆 C 交于 A，B 两点．

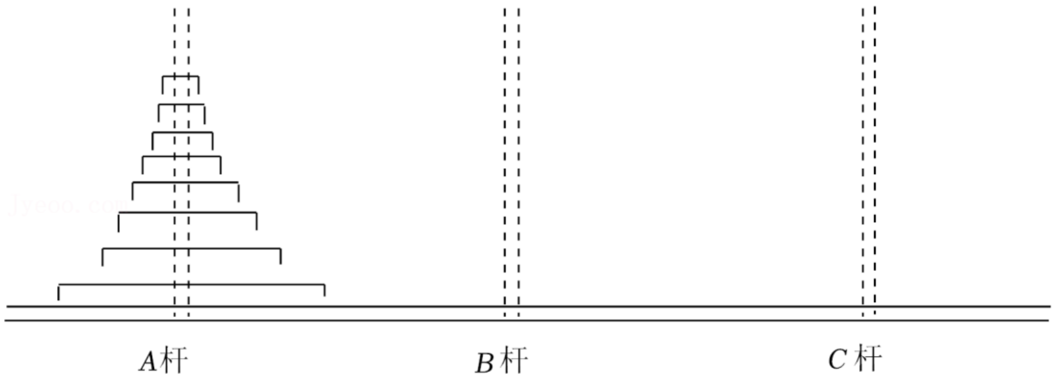
（1）若 A，B 恰好将圆 C 分成长度之比为 1：2 的两段圆弧，求 l 的斜率；

（2）记 AB 的中点为 M，在 l 绕着原点 O 旋转的过程中，点 M 在平面内形成一段曲线 E，求 E 的长度．

22．（12 分）有一种被称为汉诺塔（*Hanoi*）的游戏，该游戏是一块铜板装置上，有三根杆（编号 A、B、C），在 A 杆自下而上、由大到小按顺序放置若干个金盘（如图）．游戏的目标：把 A 杆上的金盘全部移到 C 杆上，并保持原有顺序叠好．操作规则如下：每次只能移动一个盘子，并且在移动过程中三根杆上都始终保持大盘在下，小盘在上，操作过程中盘子可以置于 A、B、C 任一杆上．记 n 个金盘从 A 杆移动到 C 杆需要的最少移动次数为 a_n．

（1）求 a_2，a_3，并直接写出 a_n 与 a_{n-1} $(n\geqslant 2,\ n\in N^*)$ 的关系式；

（2）求证：$\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{a_2+1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}<1$．



2021-2022 学年江苏省苏州市高二（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.每小题给出的四个选项中只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1．若（1，k）是直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$的一个方向向量，则 k 的值为（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

【分析】根据直线方向向量与斜率之间的关系即可得出．

【解答】解：∵（1，k）是直线 $x-\sqrt{3}y+2=0$的一个方向向量，

∴$\frac{k}{1}=-\frac{1}{-\sqrt{3}}$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：C．

【点评】本题考查了直线方向向量与斜率之间的关系，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

2．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=1$，$a_7=3$，则 a_{15}的值为（　　）

A．9　　B．27　　C．81　　D．243

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_7=a_3\bullet q^4$ 可得 $q^4=3$，从而根据 $a_{15}=a_3q^{12}=a_3(q^4)^3$ 进行求解即可．

【解答】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

由 $a_7=a_3\bullet q^4$，得 $q^4=3$，

所以 $a_{15}=a_3q^{12}=a_3(q^4)^3=3^3=27$．

故选：B．

【点评】本题考查等比数列的通项公式，考查学生基本的运算求解能力，属于基础题．

3．已知直线 l_1：$ax+2y=0$ 与直线 l_2：$(a+1)x-y+2=0$ 垂直，则 a 的值为（　　）

A．-2　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．1　　D．1 或 -2

【分析】由直线 l_1：$ax+2y=0$ 与直线 l_2：$(a+1)x-y+2=0$ 垂直，可得 $a(a+1)-2=0$，解得 a 即可得出．

【解答】解：∵直线 l_1：$ax+2y=0$ 与直线 l_2：$(a+1)x-y+2=0$ 垂直，

∴$a(a+1)-2=0$，即 $a^2+a-2=0$，

解得 $a=1$ 或 -2，

故选：D．

【点评】本题考查了直线垂直与斜率之间的关系，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

4．《九章算术》是我国古代的数学巨著，书中有如下问题：“今有大夫、不更、簪裹、上造、公士，凡五人，共出百錢．欲令高爵出少，以次渐多，問各幾何？”意思是：“有大夫、不更、簪裹、上造、公士（爵位依次变低）5 个人共出 100 钱，按照爵位从高到低每人所出钱数成等差数列，这 5 个人各出多少钱？”在这个问题中，若公士出 28 钱，则不更出的钱数为（　　）

A．14　　B．16　　C．18　　D．20

【分析】设大夫、不更、簪裹、上造、公士所出钱数成等差数列$\{a_n\}$，其公差为 d，前 n 项和为 S_n，由题意可得$\begin{cases}a_5=a_1+4d=28\\S_5=5a_1+10d=100\end{cases}$，从而求出 a_1 与 d 后再利用 $a_2=a_1+d$ 进行求解即可．

【解答】解：设大夫、不更、簪裹、上造、公士所出钱数成等差数列$\{a_n\}$，其公差为 d，前 n 项和为 S_n，

由题意可得$\begin{cases}a_5=a_1+4d=28\\S_5=5a_1+10d=100\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=12\\d=4\end{cases}$，则 $a_2=a_1+d=12+4=16$，

所以不更出的钱数为 16 钱．

故选：*B*．

【点评】本题考查等差数列的通项公式与前 n 项和公式，解题的关键在于运用等差数列相关知识解决实际问题，考查学生的基本运算求解能力，属于基础题．

5．过点 P（a，6）引圆 C：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 的切线，切点为 A，则 PA 的最小值为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

【分析】求出圆的圆心与半径，判断 P 的轨迹，利用点到直线的距离以及圆的半径，转化求解即可．

【解答】解：圆 C：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 的圆心（3，1），半径为 3，点 P（a，6）的轨迹为 $y=6$，

过点 P（a，6）引圆 C：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 的切线，切点为 A，

则 PA 的最小值的平方就是圆的圆心到直线 $y=6$ 的距离的平方与半径的平方差，

可得：PA 的最小值：$\sqrt{(6-1)^2-3^2}=4$，

故选：*A*．

【点评】本题考查直线与圆的位置关系的应用，考查转化思想以及计算能力，是中档题．

6．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_n+a_{n+1}=2n$，则 S_{20} 的值为（　　）

A．100　　B．200　　C．400　　D．800

【分析】利用数列的递推关系式，直接求解数列的和即可．

【解答】解：数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_n+a_{n+1}=2n$，

则 $S_{20}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{19}+a_{20}=2\times1+2\times3+2\times5+\cdots+2\times19$

$=2(1+3+5+\cdots+19)=2\times\frac{1+19}{2}\times10=200$．

故选：*B*．

【点评】本题考查数列的递推关系式的应用，数列求和，考查计算能力，是基础题．

7．已知 A，B，C（$ABC\neq0$）成等差数列，直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2+2tx+ty-6=0$ 的位置关系是（　　）

A．相交　　B．相切

C．相离　　D．随着 t 的变化而变化

【分析】若 A，B，C 公差为 d，结合直线方程可得 $A(x+y+1)+d(y+2)=0$，即可确定所过的定点坐标，再判断定点与圆的位置关系即可．

【解答】解：若 A，B，C 公差为 d，则 $Ax+(A+d)y+(A+2d)=A(x+y+1)+d(y+2)=0$，

∴直线恒过定点（1，－2），

将代入圆中，可得 $5+2t-2t-6=-1<0$，

∴（1，－2）在圆 $x^2+y^2+2tx+ty-6=0$ 内，

故直线与圆相交．

故选：*A*．

【点评】本题主要考查直线恒过定点问题，点与圆的位置关系，直线与圆的位置关系等知识，属于中等题．

8．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n+1$，数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=n^2$．若将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中相同的项按从小到大的顺序排列后构成数列$\{c_n\}$，则 625 是数列$\{c_n\}$中的第（　　）

A．14 项　　B．15 项　　C．16 项　　D．17 项

【分析】利用数列的通项公式列举数列的项，进一步利用共性求出结果．

【解答】解：∵数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n+1$，数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=n^2$，

若将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中相同的项按从小到大的顺序排列后构成数列$\{c_n\}$，

令 $a_n=b_m$，即 $3n+1=m^2$，

1．若 $m=3k$，则 $b_m=9k^2\notin\{a_n\}$．

2．若 $m=3k+1$，则 $b_m=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1\in\{a_n\}$．

3．若 $m=3k+2$，则 $b_m=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1\in\{a_n\}$．

故当 $m=3k+1$ 和 $m=3k+2$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，项 b_m 才能在$\{a_n\}$中出现，即为公共项．

所以，公共项为 b_2，b_4，b_5，b_7，b_8，b_{10}，b_{11}，b_{13}，b_{14}，b_{16}，b_{17}，b_{19}，b_{20}，b_{22}，b_{23}，b_{25}，…

令 $m^2=625$，求得 $m=25$，即 $b_{25}=625$，

显然 625 是数列$\{c_n\}$中的第 16 项，

故选：C．

【点评】本题考查的知识要点：数列的通项公式的应用，列举法的应用，主要考查学生的运算能力和转化能力，属于中档题．

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，选错或不答的得 0 分.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

9．记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则（　　）

A．S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列

B．$\frac{S_3}{3}$，$\frac{S_6}{6}$，$\frac{S_9}{9}$成等差数列

C．$S_9=2S_6-S_3$

D．$S_9=3(S_6-S_3)$

【分析】设等差数列的公差为 d，利用等差数列的求和公式分别求出 S_3，S_6，S_9，然后利用等差中项的定义判断选项 A，B，利用 $S_9=9a_1+36d$，$S_6=6a_1+15d$，$S_3=3a_1+3d$，即可判断选项 C，D．

【解答】解：因为 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，

设等差数列的公差为 d，则 $S_9=9a_1+36d$，$S_6=6a_1+15d$，$S_3=3a_1+3d$，

则 $S_3=3a_1+3d$，$S_6-S_3=3a_1+12d$，$S_9-S_6=3a_1+21d$，

所以 $2(3a_1+12d)=(3a_1+3d)+(3a_1+21d)$，

则 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，故选项 A 正确；

因为 $S_9=9a_1+36d$，$S_6=6a_1+15d$，$S_3=3a_1+3d$，

则$\frac{S_3}{3}=a_1+d$，$\frac{S_6}{6}=a_1+\frac{5}{2}d$，$\frac{S_9}{9}=a_1+4d$，

所以$2(a_1+\frac{5}{2}d)=(a_1+d)+(a_1+4d)$，

则$\frac{S_3}{3}$，$\frac{S_6}{6}$，$\frac{S_9}{9}$成等差数列，故选项 B 正确；

因为 $S_9=9a_1+36d$，$S_6=6a_1+15d$，$S_3=3a_1+3d$，

所以 $2S_6-S_3=2(6a_1+15d)-(3a_1+3d)=9a_1+27d$，

则 $S_9\neq 2S_6-S_3$，故选项 C 错误；

因为 $S_9=9a_1+36d$，$S_6=6a_1+15d$，$S_3=3a_1+3d$，

所以 $3(S_6-S_3)=3[(6a_1+15d)-(3a_1+3d)]=9a_1+36d=S_9$，

故选项 D 正确．

故选：ABD．

【点评】本题考查了等差数列的前 n 项和公式，等差中项的应用，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于基础题．

10．已知圆 C_1：$x^2+y^2+2x+2y-8=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-2x+10y-24=0$（　　）

A．两圆的圆心距为$2\sqrt{5}$

B．两圆的公切线有 3 条

C．两圆相交，且公共弦所在的直线方程为$x-2y+4=0$

D．两圆相交，且公共弦的长度为$4\sqrt{5}$

【分析】化两圆的方程为标准方程，求得圆心坐标与半径，即可求得圆心距判定 A；由两圆相交判断 B 与 C；求出公共弦长判断 D.

【解答】解：由圆 C_1：$x^2+y^2+2x+2y-8=0$，得$(x+1)^2+(y+1)^2=10$，

由圆 C_2：$x^2+y^2-2x+10y-24=0$，得$(x-1)^2+(y+5)^2=50$，

可得 $C_1(-1,\ -1)$，$r_1=\sqrt{10}$，$C_2(1,\ -5)$，$r_2=5\sqrt{2}$．

两圆的圆心距为$|C_1C_2|=\sqrt{(-1-1)^2+(-1+5)^2}=2\sqrt{5}$，故 A 正确；

$\because 5\sqrt{2}-\sqrt{10}<|C_1C_2|<\sqrt{10}+5\sqrt{2}$，∴两圆相交，

公切线有 2 条，故 B 错误；

两圆方程作差，可得$x-2y+4=0$，即公共弦所在的直线方程为$x-2y+4=0$，故 C 正确；

圆心 $C_1(-1,\ -1)$ 到直线$x-2y+4=0$的距离$d=\frac{|-1+2+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$r_1=\sqrt{10}$，

则公共弦的长度为$2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$，故 D 错误．

故选：AC．

【点评】本题考查两圆位置关系的判定及应用，考查运算求解能力，是基础题．

11．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，若 $2a_5+a_4=a_3$，且存在两项 a_m，a_n，使得$4\sqrt{a_ma_n}=a_1$，则（　　）

A．$a_{n+1}=2a_n$　　　B．$S_n=2a_1-a_n$　　　C．$mn=5$　　　D．$m+n=6$

【分析】由题意利用等比数列的通项公式，求出公比，可得结论．

【解答】解：等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，

由各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足 $2a_5+a_4=a_3$，

可得 $2a_3q^2+a_3q=a_3$，

$\therefore 2q^2+q-1=0$，∴公比 $q=\frac{1}{2}$，$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，故 A 错误．

$\therefore S_n=\frac{a_1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=2a_1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=2a_1-a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2a_1-a_n$，故 B 成立．

$\because 4\sqrt{a_ma_n}=a_1$，$\therefore 16a_m\cdot a_n=a_1^2$，即 $a_m\cdot a_n=\frac{1}{16}\cdot a_1^2$，

又 $a_m\cdot a_n=a_1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2}=\frac{1}{16}\cdot a_1^2$，

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-2}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$，

$\therefore m+n-2=4$，即 $m+n=6$，$(m\in\mathbf{N}^*,\ n\in\mathbf{N}^*)$，故 D 正确．

再根据 $m+n=6$，m、n 为正整数，故 $mn=5$ 不一定成立，如 $m=2$，$n=4$ 时，故 C 错误，

故选：BD．

【点评】本题主要考查等比数列的通项公式，根据等比数列的通项公式求出公比是解决本题的关键，属于中档题．

12．已知 AB 为圆 O：$x^2+y^2=49$ 的弦，且点 M（4，3）为 AB 的中点，点 C 为平面内一动点，若 $AC^2+BC^2=66$，则（　　）

A．点 C 构成的图象是一条直线

B．点 C 构成的图象是一个圆

C．OC 的最小值为 2

D．OC 的最小值为 3

【分析】由题意画出图形，求出$|MA|$的值，再把 $AC^2+BC^2=66$ 转化为向量等式，可得$|MC|=3$，即可得到 C 的轨迹判断 A 与 B；再由圆与圆的位置关系求得 OC 的最小值判断 C 与 D．

【解答】解：如图，

∵M 是 AB 的中点，∴$OM\perp AB$，

∵$|OA|=r=7$，$|OM|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，∴$|MA|=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$．

又 $AC^2+BC^2=66$，∴$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2=66$，

可得 $(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})^2+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC})^2=66$，

∵$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}$，∴$(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})^2+(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{AM})^2=66$，

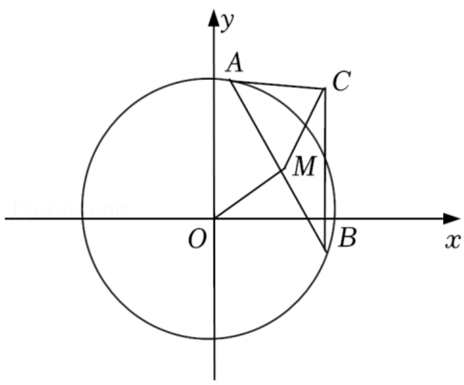
可得 $2\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{MC}^2=66$，则 $\overrightarrow{MC}^2=9$，$|MC|=3$．

∴点 C 构成的图象是一个圆，故 A 错误，B 正确；

又$|OM|=5$，∴当 O、M、C 共线，且 C 在 OM 之间时，OC 有最小值为 $5-3=2$．

故 C 正确，D 错误．

故选：BC．



【点评】本题考查轨迹方程的求法，考查点与圆、圆与圆位置关系的应用，考查运算求解能力，是中档题．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分，请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．类比是学习探索中一种常用的思想方法，在等差数列与等比数列的学习中我们发现：只要将等差数列的一个关系式中的运算“+”改为“×”，“﹣”改为“÷”，正整数改为正整数指数幂，相应地就可以得到等比数列的一个形式相同的关系式，反之也成立．

在等差数列 $\{a_n\}$ 中有 $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$（$n>k$），借助类比，在等比数列 $\{b_n\}$ 中有 $b_{n-k}b_{n+k}=b_n^2(n>k)$__．

【分析】根据题设描述，应用类比思想将等差数列$\{a_n\}$递推式左右两边按规则改写，即可得等比数列$\{b_n\}$

的递推关系式．

【解答】解：由题设描述，将左式加改乘，则相当于 $a_{n-k}+a_{n+k}$ 改写为 $b_{n-k}b_{n+k}$；

将右式正整数 2 改为指数，则相当于 $2a_n$ 改写为 b_n^2，

∴等比数列$\{b_n\}$中有 $b_{n-k}b_{n+k}=b_n^2(n>k)$．

故答案为：$b_{n-k}b_{n+k}=b_n^2(n>k)$

【点评】本题主要考查数列中的递推关系式，类比推理的应用等知识，属于基础题．

14．已知点 M（1，3），N（5，－2），若 x 轴上存在一点 P，使$|PM-PN|$最大，则点 P 的坐标为＿（13，0）＿．

【分析】作 M（1，3）关于 x 轴对称点 M'（1，－3），作直线 $M'N$ 交 x 轴于点 P，则点 P 即为所求，由此求出直线 $M'N$ 就能求出点 P 的坐标．

【解答】解：作 M（1，3）关于 x 轴对称点 M'（1，－3），作直线 $M'N$ 交 x 轴于点 P，

则点 P 即为所求，

设直线 $M'N$ 的解析式为 $y=kx+b$

将 M'（1，－3），N（5，－2）代入

$\begin{cases}-3=k+b\\-2=5k+b\end{cases}$，解得 $k=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{13}{4}$，

所以此函数的解析式为 $y=\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}$，

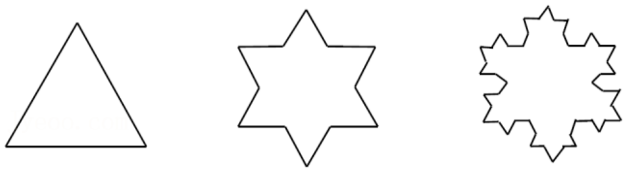
当 $y=0$ 时，$x=13$

所以 P 点坐标（13，0）．

故答案为：（13，0）

【点评】本题考查使某段线段长取得最大值的点的坐标的求法，解题时要认真审题，注意对称性的合理运用．

15．如图，将一个边长为 1 的正三角形的每条边三等分，以中间一段为边向形外作正三角形，并擦去中间一段，得图（2）．如此继续下去，得图（3）……，则第 5 个图形的边长为 ＿$\frac{1}{81}$＿；第 n 个图形的周长为 ＿$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}$＿．



（1）　　（2）　　（3）

【分析】根据题意，归纳分析第 n 个图形中边长和边数，由此计算可得答案．

【解答】解：根据题意，第一个图形有 3 条边，边长为 1，

第二个图形有 3×4 条边，边长为 $1\times\frac{1}{3}$，

第三个图形有 3×4^2 条边，边长为 $1\times\frac{1}{3^2}$，

……

第 n 个图形中有 $3\times4^{n-1}$ 条边，每条边的边长为$\frac{1}{3^{n-1}}$，

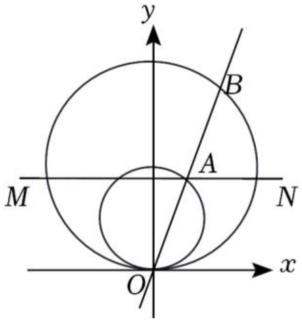
则第 5 个图形的边长为$\frac{1}{3^{5-1}}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$，

第 n 个图形的周长为（$3\times4^{n-1}$）$\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}$；

故答案为：$\frac{1}{81}$，$\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}$.

【点评】本题考查合情推理的应用，注意分析图形的边数、边长的关系，属于基础题.

16．如图，已知圆 C_1：$x^2+(y-s)^2=s^2$（$s>0$）内切于圆 C_2：$x^2+(y-t)^2=t^2$（$t>0$），直线 l：$y=kx$（$k>0$）分别交圆 C_1，C_2 于 A，B 两点（A，B 在第一象限内），过点 A 作 x 轴的平行线交圆 C_2 于 M，N 两点，若点 A 既是线段 OB 的中点，又是线段 MN 的三等分点，那么 k 的值为 __$\sqrt{7}$__.



【分析】联立直线 $y=kx$ 与两圆的方程，求得 A，B 的坐标，由中点坐标公式可得 $t=2s$，将 B 的纵坐标代入圆 C_2 的方程，求得 M，N 的横坐标，再由 A 是线段 MN 的三等分点，解方程可得所求值.

【解答】解：由$\begin{cases}y=kx\\x^2+(y-s)^2=s^2\end{cases}$，解得 A（$\frac{2ks}{1+k^2}$，$\frac{2k^2s}{1+k^2}$），

由$\begin{cases}y=kx\\x^2+(y-t)^2=t^2\end{cases}$，解得 B（$\frac{2kt}{1+k^2}$，$\frac{2k^2t}{1+k^2}$），

因为点 A 是线段 OB 的中点，所以 $2\bullet\frac{2ks}{1+k^2}=\frac{2kt}{1+k^2}$，

即有 $t=2s$，s，$t>0$，

由$\begin{cases}y=\frac{2k^2s}{1+k^2}=\frac{k^2t}{1+k^2}\\x^2+(y-t)^2=t^2\end{cases}$，解得 $x_M=-\sqrt{t^2-(\frac{t}{1+k^2})^2}$，$x_N=\sqrt{t^2-(\frac{t}{1+k^2})^2}$，

因为 A 为线段 MN 的三等分点，所以$|MA|=2|AN|$，

即有$\frac{kt}{1+k^2}+\sqrt{t^2-(\frac{t}{1+k^2})^2}=2$（$\sqrt{t^2-(\frac{t}{1+k^2})^2}-\frac{kt}{1+k^2}$），

即$\frac{3kt}{1+k^2}=\sqrt{t^2-(\frac{t}{1+k^2})^2}$，两边平方化为 $9k^2t^2=t^2(1+k^2)^2-t^2$，

即有 $k^4=7k^2$，由于 $k>0$，

解得 $k=\sqrt{7}$．

故答案为：$\sqrt{7}$．

【点评】本题考查直线和圆、圆与圆的位置关系，以及线段的中点坐标公式，考查方程思想和运算能力、推理能力，属于中档题．

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（10 分）已知三角形的顶点 A（4，1），B（﹣6，3），C（3，0）．

（1）求 AC 边上的高 BH 所在的直线方程；

（2）求 AB 边上的中线 CD 所在的直线方程．

【分析】(1) 由已知求得 AC 所在直线的斜率，动点 BH 所在直线当斜率再由直线方程的点斜式得答案；

（2）由中点坐标公式求得 AB 中点的坐标，再由两点求斜率可得 CD 所在直线当斜率，然后利用直线方程的点斜式得答案．

【解答】解：（1）∵A（4，1），C（3，0），∴ $k_{AC}=\frac{0-1}{3-4}=1$，

∵BH 为 AC 边上的高，∴$k_{AC}\cdot k_{BH}=-1$，得 $k_{BH}=-1$，

又 BH 过点 B（﹣6，3），∴BH 所在直线的方程为 $y-3=-1\times(x-(-6))$，

即 $x+y+3=0$；

（2）∵A（4，1），B（﹣6，3），∴AB 的中点 $(\frac{4+(-6)}{2}，\frac{1+3}{2})$，即 D（﹣1，2），

又 C（3，0），∴ $k_{CD}=\frac{2-0}{-1-3}=-\frac{1}{2}$，

又∵直线 CD 过点 C（3，0），∴CD 所在直线的方程为 $y-0=-\frac{1}{2}\times(x-3)$，

即 $x+2y-3=0$．

【点评】本题考查直线方程的求法，考查运算求解能力，是基础题．

18．（12 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且$\{b_n\}$的各项均为正数，若 $a_1=b_1=1$，$a_2-b_2=1$，$a_3+b_3=9$．

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n．

【分析】(1) 先设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，然后根据已知条件列出关于公差 d 与公比 q 的方程组，解出 d 与 q 的值，即可计算出数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）先根据第（1）题的结果计算出数列$\{c_n\}$的通项公式，然后运用错位相减法计算出前 n 项和 S_n．

【解答】解：（1）由题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

∵数列$\{b_n\}$的各项均为正数，∴$q>0$，

由 $a_2-b_2=1$，$a_3+b_3=9$，

可得$\begin{cases}1+d-q=1\\1+2d+q^2=9\end{cases}$，

解得$\begin{cases}d=2\\q=2\end{cases}$，

∴$a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$b_n=1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（2）由（1）得，$c_n=a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot2^{n-1}$，

则 $S_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+$+（$2n-1$）$\times2^{n-1}$，

$2S_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，

两式相减，可得 $-S_n=1\times1+2\times2+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n-1)\times2^n$

$=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times2^n-1$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(2n-1)\times2^n-1$

$=-(2n-3)\times2^n-3$，

$\therefore S_n=(2n-3)\times2^n+3$．

【点评】本题主要数列求通项公式，以及运用错位相减法求前 n 项和．考查了方程思想，转化与化归思想，以及逻辑推理能力和数学运算能力，属中档题．

19．（12 分）已知圆 M 经过 $A(2,-\sqrt{3})$，$B(2,\sqrt{3})$，$C(-1,0)$．

（1）求圆 M 的标准方程；

（2）若点 $P(3,2)$，点 Q 是圆 M 上的一个动点，求 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值．

【分析】（1）用待定系数法求解；（2）用向量数量积运算及正弦函数性质求解．

【解答】解：（1）设圆 M 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$，

由于圆经过 $A(2,-\sqrt{3})$，$B(2,\sqrt{3})$，$C(-1,0)$，

所以有 $\begin{cases}(2-a)^2+(-\sqrt{3}-b)^2=r^2,\\(2-a)^2+(\sqrt{3}-b)^2=r^2,\\(-1-a)^2+(0-b)^2=r^2,\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\\r=2,\end{cases}$

所以圆 M 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=4$．

（2）由（1）知 $M(1,0)$，设 $Q(1+2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\theta\in\mathbf{R}$，

$\overrightarrow{MQ}=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{PQ}=(2\cos\theta-2,2\sin\theta-2)$，

所以 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=(2\cos\theta)(2\cos\theta-2)+(2\sin\theta)(2\sin\theta-2)=4-4(\cos\theta+\sin\theta)=4-4\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\geqslant4-4\sqrt{2}$．

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 取得最小值为 $4-4\sqrt{2}$．

所以 $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$ 的最小值为 $4-4\sqrt{2}$．

【点评】本题考查了平面向量数量积的性质及其运算，考查了圆的标准方程问题，考查了最值问题，属于中档题．

20．（12 分）在①$S_n=2a_n-1$，②$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+1$，③$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-1$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并解答．

问题：已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足____．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使得这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列$\{d_n\}$中是否存在三项 d_m，d_k，d_p（其中 m，k，p 成等差数列）成等比数列？若存在，求出这样的三项；若不存在，请说明理由．

【分析】（1）分别取①②③三个条件，均可得数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，即可求得数

列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由（1）可知$a_n=2^{n-1}$，$a_{n+1}=2^n$．再由$a_{n+1}=a_n+(n+2-1)d_n$，得$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{2^{n-1}}{n+1}$．假设在数列$\{d_n\}$中存在三项$d_m$，$d_k$，$d_p$（其中$m$，$k$，$p$成等差数列）成等比数列，由等比数列的性质列式可得$k=m=p$，与题设矛盾，说明在数列$\{d_n\}$中不存在三项$d_m$，$d_k$，$d_p$（其中$m$，$k$，$p$成等差数列）成等比数列．

【解答】解：（1）如选①：

由于$S_n=2a_n-1$，当$n\geqslant 2$时，有$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

两式作差得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即$a_n=2a_{n-1}$，

又$n=1$时，有$S_1=a_1=2a_1-1$，所以$a_1=1\neq 0$，所以$a_{n-1}\neq 0$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，即数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^{n-1}$．

如选②：

由于$S_{n+1}=2S_n+1$，当$n\geqslant 2$时，有$S_n=2S_{n-1}+1$，

两式作差得$a_{n+1}=2a_n$（$n\geqslant 2$），

又$n=1$时，有$a_1=1$且$S_2=a_1+a_2=1+a_2=2S_1+1=2a_1+1=3$，所以$a_2=2$，有$a_2=2a_1$，

所以$a_{n+1}=2a_n$（$n\geqslant 1$），且$a_1=1\neq 0$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，即数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^{n-1}$．

如选③：

由于$S_n=a_{n+1}-1$，当$n\geqslant 2$时，有$S_{n-1}=a_n-1$，

两式作差得$a_n=a_{n+1}-a_n$，即$a_{n+1}=2a_n$（$n\geqslant 2$），

又$n=1$时，有$a_1=1$且$S_1=a_1=1=a_2-1$，所以$a_2=2$，有$a_2=2a_1$，

所以$a_{n+1}=2a_n$（$n\geqslant 1$），且$a_1=1\neq 0$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，即数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^{n-1}$．

（2）由（1）可知$a_n=2^{n-1}$，$a_{n+1}=2^n$．

因为$a_{n+1}=a_n+(n+2-1)d_n$，

所以$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{2^{n-1}}{n+1}$．

假设在数列$\{d_n\}$中存在三项d_m，d_k，d_p（其中m，k，p成等差数列）成等比数列，

则$d_k^2=d_md_p$，即$(\frac{2^{k-1}}{k+1})^2=\frac{2^{m-1}}{m+1}\cdot\frac{2^{p-1}}{p+1}$，化简得$\frac{2^{2k}}{(k+1)^2}=\frac{2^{m+p}}{(m+1)(p+1)}$（*），

因为m，k，p成等差数列，所以$m+p=2k$，从而（*）可以化简为$k^2=mp$．

联立$\begin{cases}m+p=2k,\\k^2=mp,\end{cases}$ 可得 $k=m=p$，这与题设矛盾．

所以在数列$\{d_n\}$中不存在三项 d_m，d_k，d_p（其中 m，k，p 成等差数列）成等比数列．

【点评】本题考查等差数列与等比数列的通项公式、前 n 项和及性质，考查运算求解能力，是中档题．

21．（12 分）已知圆 C：$x^2+y^2-8x+12=0$，直线 l 是过原点 O 的一条动直线，且 l 与圆 C 交于 A，B 两点．

（1）若 A，B 恰好将圆 C 分成长度之比为 1：2 的两段圆弧，求 l 的斜率；

（2）记 AB 的中点为 M，在 l 绕着原点 O 旋转的过程中，点 M 在平面内形成一段曲线 E，求 E 的长度．

【分析】（1）因为 A，B 将圆 C 分成长度之比为 1：2 的两段圆弧，所以$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，可求得圆心到直线的距离为 1，由点到线的距离可求得直线 l 的斜率；

（2）由垂径定理可知 $AB\perp CM$，即 $OM\perp CM$，则点 M 在以 OC 为直径的圆上，求出曲线 E 所对圆心角的大小，可得弧长．

【解答】解：（1）设直线 l 的斜率为 k，则 l：$kx-y=0$，圆 C：$(x-4)^2+y^2=4$ 以点 C（4，0）为圆心，2 为半径，

因为 A，B 将圆 C 分成长度之比为 1：2 的两段圆弧，所以$\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，

又因为半径 $r=2$，所以圆心 C 到弦 AB 的距离为 l（记圆心 C 到弦 AB 的距离为 d），

所以$d=\frac{|k\times 4-0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $16k^2=k^2+1$，

所以$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$．

（2）由于 M 为 AB 中点，过原点 O 的直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，

由垂径定理可知 $AB\perp CM$，即 $OM\perp CM$，

所以点 M 在以 OC 为直径的圆上，设 OC 的中点为 T，则 T（2，0），所以 $TC=2$，

所以点 M 在以 T（2，0）为圆心，2 为半径的圆 T 上，

所以，曲线 E 为圆 T 在圆 C 内部的部分圆弧，记圆 T 与圆 C 的交点为 P，Q，

易得 $PC=PT=TC=2$，所以$\angle PTC=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle PTQ=\frac{2\pi}{3}$，

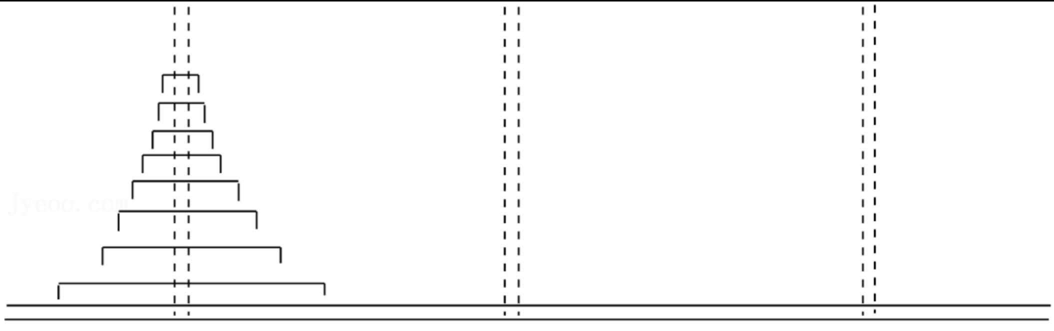
所以$\overset{\frown}{PCQ}=2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，即曲线 E 的长度为$\frac{4\pi}{3}$．

【点评】本题考查圆与直线的位置关系，以及圆的弧长问题．属中档题．

22．（12 分）有一种被称为汉诺塔（*Hanoi*）的游戏，该游戏是一块铜板装置上，有三根杆（编号 A、B、C），在 A 杆自下而上、由大到小按顺序放置若干个金盘（如图）．游戏的目标：把 A 杆上的金盘全部移到 C 杆上，并保持原有顺序叠好．操作规则如下：每次只能移动一个盘子，并且在移动过程中三根杆上都始终保持大盘在下，小盘在上，操作过程中盘子可以置于 A、B、C 任一杆上．记 n 个金盘从 A 杆移动到 C 杆需要的最少移动次数为 a_n．

（1）求 a_2，a_3，并直接写出 a_n 与 a_{n-1} $(n\geqslant 2,\ n\in N^*)$ 的关系式；

（2）求证：$\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{a_2+1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}<1$．



【分析】（1）当 $n=1$ 时，求解 $a_1=1$，通过变化规律求解 $a_2=3$，$a_3=7$，推出关系式.

（2）推出数列$\{a_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，求解通项公式化简$\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，利用裂项相消法求解数列的和，推出结果.

【解答】（1）解：当 $n=1$ 时，金盘从 A 杆移到 C 杆需要的最少移动次数为 1 次，即 $a_1=1$；

当 $n=2$ 时，将第一层（自上而下）金盘从 A 杆移到 B 杆需要的最少次数为 1 次，将第二层（自上而下）金盘从 A 杆移到 C 杆需要的最少次数为 1 次，再将已移动到 B 杆上的金盘从 B 杆移到 C 杆需要的最少次数为 1 次，所以 $a_2=3$；

当 $n=3$ 时，将第一层、第二层（自上而下）金盘从 A 杆移到 B 杆需要的最少次数为 $a_2=3$ 次，将第三层（自上而下）金盘从 A 杆移到 C 杆需要的最少次数为 1 次，再将已移动到 B 杆上的金盘从 B 杆移到 C 杆需要的最少次数为 $a_2=3$ 次，所以 $a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$；

依此类推：$a_n=2a_{n-1}+1\ (n\geqslant2,\ n\in N^*)$

（2）证明：记$S_n=\frac{a_1+1}{a_1a_2}+\frac{a_2+1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}$，

由（1）知 $a_n=2a_{n-1}+1\ (n\geqslant2,\ n\in N^*)$即$a_n+1=2(a_{n-1}+1)\ (n\geqslant2,\ n\in N^*)$，

由于 $a_1+1=1+1=2$，所以$a_{n-1}+1\neq0\ (n\geqslant2,\ n\in N^*)$，

所以$\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=2\ (n\geqslant2,\ n\in N^*)$.

即数列$\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，即 $a_n=2^n-1$，

所以$\frac{a_n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

所以$S_n=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

所以 $S_n<1$.

【点评】本题考查数列的应用，数列的递推关系式的应用以及数列求和，不等式的证明，是中档题